CMNE/CILAMCE 2007
Porto, 13 a 15 de Junho, 2007
© APMTAC, Portugal 2007

VIBRAÇÕES ASSOCIADAS À VARIAÇÃO RÁPIDA DA RIGIDEZ DA VIA FÉRREA POR ACÇÃO DE CARGA MÓVEL

Zuzana Dimitrovová[1*], José N. Varandas[1], João R. de Almeida[1], e Manuel A.G. Silva[1]

1: UNIC - Departamento de Engenharia Civil
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa
2829-516 Caparica
e-mail: {zdim,jnvs,jr,mgs}@fct.unl.pt

Palavras-chave: Comboios de alta velocidade, Variação brusca da rigidez de fundação, Análise dinâmica em regime transitório, Soluções analíticas

Resumo. *A variação rápida da rigidez das vias férreas, quer devido a mudança de solução estrutural, quer devido a alteração das condições geotécnicas pode induzir vibrações de amplitude excessiva à passagem de comboios de alta velocidade. Este comportamento causa desgaste da via. Nesta comunicação abordam-se aspectos de modelação e análise do problema. A contribuição consiste em desenvolvimento das soluções analíticas transientes de modelos simplificados em que a alteração de rigidez é implementada de duas formas. O primeiro caso corresponde à existência de uma rigidez adicional localizada e o segundo caso representa a passagem entre duas zonas de rigidez constante.*

1. INTRODUÇÃO

A alta velocidade ferroviária tem levantado constantes, variados e inovadores desafios à comunidade científica, em particular no estudo da mitigação de vibrações excessivas originadas por condições especiais da via. Este efeito de aumento dos movimentos transientes do conjunto formado pela via estrutural e o seu terreno de fundação pode originar sérios riscos para a circulação ferroviária, provocando um maior desgaste da via e do material rolante, dano do balastro, aumento da poluição ambiental e desconforto para os passageiros.

A variação rápida da rigidez de fundação das vias férreas é uma das possíveis razões que originam este efeito. Esta variação pode ser devida a mudança brusca das condições geotécnicas ou a alteração súbita da solução estrutural, como por exemplo na transição de via ordinária para ponte, viaduto ou túnel e na mudança de via balastrada para via sem balastro em laje de betão armado. Nestes últimos casos a variação do valor da rigidez vertical da via pode ser brusca e muito acentuada. Um exemplo de estudo realizado sobre a minimização destes efeitos pela definição de uma zona de transição gradual de rigidez entre dois pontos de rigidez muito diferenciada encontra-se em [1].

A resposta completa e detalhada do comportamento dinâmico da via férrea sujeita a passagem de um comboio de alta velocidade pode ser determinada através de modelos tridimensionais com elementos finitos. Estes modelos exigem malhas muito finas, tendo em conta as características geométricas da via e os comprimentos de onda e frequências que compõem o fenómeno de propagação associado. Por outro lado, a modelação de zonas de variação de rigidez e o cálculo da respectiva resposta transiente requer a construção de modelos de dimensão elevada, mesmo incorporando elementos de fronteira absorventes. Por estes motivos, estes modelos exigem um elevado tempo de cálculo computacional tornando-se por isso inviáveis em projecto.

Em muito menor tempo de cálculo podem ser obtidas respostas aproximadas através de modelos simplificados. Existem vários trabalhos onde se apresentam soluções analíticas em termos de campo de deslocamentos como resposta da via à carga móvel, por exemplo em [2-3]. Nestes, são usados modelos uni ou bidimensionais formados por vigas, lajes, interfaces viscoelásticas e, habitualmente, fundação elástica caracterizada pela constante de Winkler. A metodologia implementada nestes trabalhos conduz ao cálculo de soluções estacionárias da resposta dinâmica, não permitindo, como tal, outro cenário que não a homogeneidade e a uniformidade geométrica e mecânica dos modelos em análise. A resposta da via férrea à variação brusca de rigidez vertical só poderá ser determinada numa análise transiente, para a qual as soluções analíticas continuam a ser escassas. Estas soluções analíticas possibilitam ainda o estudo directo de sensibilidade o que igualmente contribuiu para a selecção desta via de análise. O objectivo deste trabalho consiste em apresentar soluções analíticas transientes de modelos simplificados da via férrea em que a alteração de rigidez será implementada de duas formas distintas. O primeiro caso corresponde à existência de uma rigidez adicional localizada, actuante pontualmente na via (Secção 3) e o segundo caso representa a passagem entre duas zonas de rigidez constante (Secção 4). Estes resultados representam extensões da metodologia apresentada em [4] que, de acordo com o conhecimento dos autores, não foram

ainda publicados. Os desenvolvimentos analíticos foram programados em software Matlab [5] e confirmados numericamente em modelos "equivalentes" com software ANSYS [6]. No entanto, pode concluir-se que em ambos os casos de alteração de rigidez vertical da via a representação da carga móvel através de força móvel, omitindo o sistema de massas suspensas com elementos viscoelásticos representando o veículo ferroviário, não representa uma resposta realística. A introdução do modelo do veículo está a ser presentemente desenvolvida e permitirá no futuro a desejável interacção directa de veículo-via-solo.

2. ALTERAÇÃO LOCALIZADA DE RIGIDEZ VERTICAL DA VIA FÉRREA

Para implementar uma alteração localizada da rigidez vertical da via férrea, optou-se pela representação da via através de uma viga finita de fundação elástica com apoios simples nas extremidades. Com este objectivo a solução apresentada em [4] para viga simplesmente apoiada foi alterada de forma a contemplar o apoio elástico da viga e a existência de uma rigidez localizada, esta ultima implementada de uma forma aproximada. O resultado final permite análise directa de sensibilidades.

2.1. Viga finita de fundação elástica sujeita a carga móvel

A resposta transiente, expressa em termos do deslocamento vertical, w, de uma viga simplesmente apoiada sujeita a carga móvel constate de valor P, corresponde a solução da equação, [4]:

$$\mathrm{EI}\frac{\partial \mathrm{w}^4(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}^4}+\mu\frac{\partial \mathrm{w}^2(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}^2}+2\mu\omega_\mathrm{b}\frac{\partial \mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}=\delta(\mathrm{x}-\mathrm{ct})\mathrm{P}\,. \tag{1}$$

Como é habitual nestes casos, adoptaram-se para o comportamento da viga os seguintes pressupostos: a hipótese dos pequenos deslocamentos, o comportamento de Euler-Bernoulli e a lei constitutiva linear elástica caracterizada pelo módulo de Young constante E. Assume-se ainda que a viga tem a secção transversal caracterizada pelo momento de inércia constante I, e a massa constante por unidade de comprimento, μ. Na Equação (1) ω_b representa a frequência circular de amortecimento, x e t são variáveis espacial e temporal e δ designa a função de Dirac. Pressupõe-se que a massa da carga é desprezável, comparando com a massa da viga, permitindo representar a carga pela força P, que se move com velocidade, c, assumida também constante.
O efeito da fundação elástica de constante Winkler, k, pode introduzir-se da forma seguinte:

$$\mathrm{EI}\frac{\partial \mathrm{w}^4(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}^4}+\mu\frac{\partial \mathrm{w}^2(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}^2}+2\mu\omega_\mathrm{b}\frac{\partial \mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}+\mathrm{kw}(\mathrm{x},\mathrm{t})=\delta(\mathrm{x}-\mathrm{ct})\mathrm{P} \tag{2}$$

Assumindo que o comprimento total da viga é L, as condições de fronteira e iniciais escrevem-se:

$$w(0,t)=0,\quad w(L,t)=0,\quad \left.\frac{\partial w^2(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial w^2(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0, \tag{3}$$

$$w(x,0)=0,\quad \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{4}$$

O problema definido pelas Equações (2-4) poderá ser resolvido através de métodos de transformadas integrais. Primeiro implementa-se a transformação finita de senos de Fourier e em seguida a transformação integral de Laplace-Carson. A solução tem a forma seguinte:

$$w(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{j=1}^{\infty}W(j,t)\sin\frac{j\pi x}{L} \tag{5}$$

Onde a imagem $W(j,t)$ exprime-se:

$$W(j,t)=\frac{Pc}{\mu\left(\left(a^2+b^2-c^2\right)^2+4a^2c^2\right)}\cdot \left(\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)}{c}\sin(ct)-\frac{\left(b^2-a^2-c^2\right)}{b}e^{-at}\sin(bt)-2a\left(\cos(ct)-e^{-at}\cos(bt)\right)\right), \tag{6}$$

com

$$a=\omega_b,\quad b=\sqrt{\tilde{\omega}_{(j)}^2-\omega_b^2},\quad c=j\omega. \tag{7}$$

Além dos termos já referidos, surge ainda a frequência circular, ω, e a frequência circular da viga simplesmente apoiada sem e com fundação elástica, respectivamente, $\omega_{(j)}$ e $\tilde{\omega}_{(j)}$.

$$\omega=\frac{\pi c}{L},\quad \omega_{(j)}=\frac{j^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}},\quad \tilde{\omega}_{(j)}=\sqrt{\frac{j^4\pi^4}{L^4}\frac{EI}{\mu}+\frac{k}{\mu}}. \tag{8}$$

Para fácil comparação dos casos analisados, é possível introduzir constantes adimensionais, que caracterizam a intensidade de velocidade e de amortecimento, na forma:

$$\xi=\frac{\omega}{\tilde{\omega}_{(1)}},\qquad \psi=\frac{\omega_b}{\omega_{(1)}},\qquad \zeta=\frac{\omega}{\omega_{(1)}}, \tag{9}$$

Para validar os resultados das Equações (5-8), foram criados modelos equivalentes de elementos finitos com software ANSYS. Da base dos elementos finitos disponíveis foi escolhido o BEAM54, que permite directamente introdução da fundação elástica. A frequência circular de amortecimento da viga foi incorporada no coeficiente $\alpha=2\omega_b$ do amortecimento de Rayleigh. Dado que o software ANSYS não tem o comando de carga

móvel disponível, a carga foi redefinida em cada nó consoante a velocidade aplicada. Cada passo de carga correspondeu assim a uma nova definição de carga no nó adjacente ao nó onde a carga foi aplicada no passo de carga anterior. Optou-se primeiro pela escolha de sub-passos de tempo automático. O software não detectou a necessidade de diminuir o passo de tempo em nenhum dos casos estudados e foi precisa apenas uma iteração para obter os resultados. No entanto, forçou-se uma divisão de cada passo de tempo em três ou cinco sub-passos, consoante o caso analisado, para aumentar a precisão.

Vários casos representativos foram testados para confirmar a metodologia e os resultados. Na Figura 1 apresenta-se o caso correspondente a: L=10m, EI=1000Nm^2, P=1N, μ=0,06kg/m, ξ=2, ψ=5 e ζ=2,1. Os gráficos mostram que a concordância dos resultados analíticos e numéricos é excelente, designadamente as curvas analíticas de cor violeta sobrepõem-se totalmente sobre as curvas numéricas de cor azul. A comparação é feita para dez posições da carga móvel ao longo do comprimento da viga, ou seja, para a carga aplicada em cada metro inteiro.

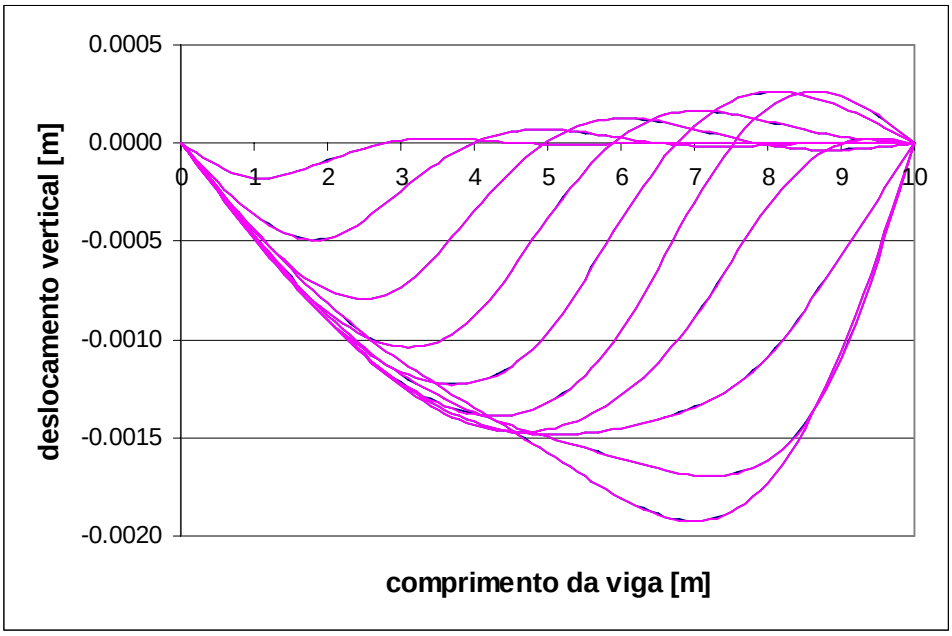

Figura 1. Deslocamento vertical no caso ξ=2, ψ=5 e ζ=2,1 desenhado para 10 posições da carga móvel (curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica).

Depois dos casos de teste, com valores dos parâmetros escolhidos arbitrariamente, procedeu-se à análise dos resultados correspondentes a um caso próximo da realidade. Assumiu-se que a viga corresponde a toda a estrutura superior da via férrea, incluindo os carris, as travessas e as camadas de balastro e de sub-balastro. As dimensões da secção transversal considerada foram 4m×1m, o módulo de Young E=200MPa, a densidade volúmica do material ρ=1800kg/m^3, a carga aplicada P=100kN e a velocidade implementada

c=45,3m/s=163,2km/h. Considerou-se um comprimento da viga de 100m e um valor para a constante de Winkler de 2000kN/m^2, este, no entanto, bastante mais baixo que possíveis valores reais. Neste caso, a resposta transiente aproxima-se da solução estacionária, tal como se verifica na Figura 2. Assim como na Figura 1, a resposta da via é desenhada para dez posições da carga móvel ao longo do comprimento. Por razões de simplicidade, não se considerou amortecimento na análise. Apesar da concordância dos resultados ser boa, notam-se ligeiras diferenças entre as curvas analíticas e numéricas. Da análise das possíveis razões para estas diferenças, concluiu-se deverem-se a erros da solução numérica. Verificou-se que existem erros na solução numérica no valor das frequências naturais que ultrapassa 1% a partir do 16º modo de vibração. Ao contrário da resposta da viga representada na Figura 1, onde o primeiro modo de vibração natural é dominante, para a resposta representada na Figura 2 foi necessário considerar quase 1000 modos para a composição da solução analítica. Estes erros nas soluções modais da estrutura transferem-se naturalmente para a resposta transiente do modelo.

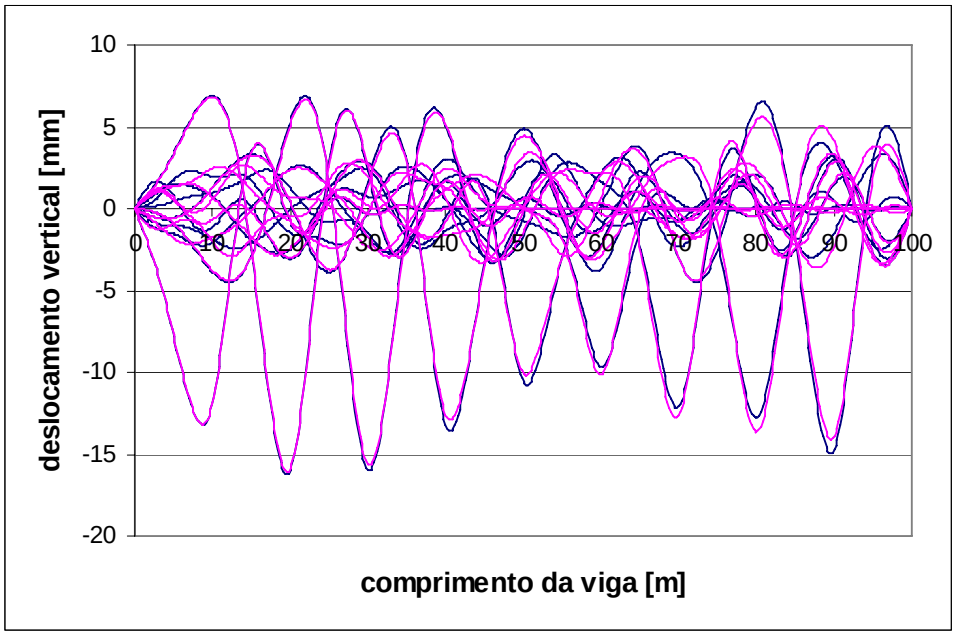

Figura 2. Deslocamento vertical do caso c=45,3m/s, k=2000kN/m^2, P=100kN e sem amortecimento, desenhado para 10 posições da carga móvel (curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica).

Ao aumentar a constante de Winkler para um caso real, e.g. 40000kN/m^2, o erro numérico das frequências naturais mantém-se na mesma ordem de grandeza. No entanto, dado as primeiras frequências naturais serem muito semelhantes, tal como se pode deduzir da Equação (8), o erro numérico no software ANSYS causa a alteração da ordem dos modos de vibração, o que afecta os resultados numéricos. Para comprovar esta conclusão, mostra-se em seguida na Figura 3 uma comparação do deslocamento vertical para uma posição de

carga nos 20m, correspondente aos dados do problema anterior, mas com a constante de Winkler igual a 40000kN/m^2. Apesar do valor máximo do deslocamento ser idêntico, nota-se um desfasamento significativo da resposta numérica, o que complica confirmação de algumas conclusões analíticas. Entretanto a resposta analítica, representada numericamente no software Matlab, foi facilmente e quase instantaneamente obtida mesmo considerando 1000 termos da série de senos.

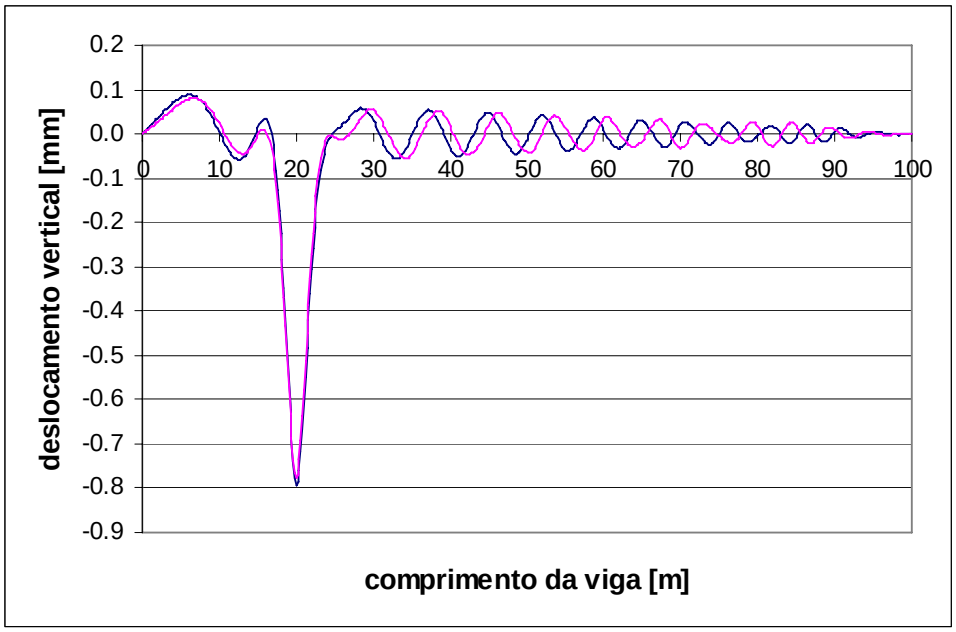

Figura 3. Deslocamento vertical do caso c=45,3m/s, k=40000kN/m^2, P=100kN e sem amortecimento, desenhado para posição da carga móvel em 20m (curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica).

2.2. Alteração de rigidez localizada

O aumento ou a diminuição localizada da rigidez vertical da fundação elástica pode ser representada pela adição de um termo, alterando a Equação (2) para:

$$EI\frac{\partial w^4(x,t)}{\partial x^4}+\mu\frac{\partial w^2(x,t)}{\partial t^2}+2\mu\omega_b\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+kw(x,t)+\delta(x-x_0)k_0w(x,t)=\delta(x-ct)P, \quad (10)$$

onde x_0 e k_0 correspondem à posição e ao valor da alteração de rigidez localizada. Valor positivo e negativo do parâmetro k_0 corresponde ao aumento e à diminuição da rigidez, respectivamente. Dado não ser possível resolver a Equação (10) analiticamente, é necessário exprimir a sua solução de uma forma aproximada, adoptando o pressuposto que:

$$w(x,t)\big|_{x=x_0} \cong \frac{2}{L} W(j,t) \sin\frac{j\pi x_0}{L}. \tag{11}$$

Com este pressuposto a solução da Equação (10) com as condições de fronteira e iniciais (3-4) é dada novamente pelas Equações (5-6), apenas com nova definição da variável b:

$$b = \sqrt{\tilde{\omega}_{(j)}^2 - \omega_b^2 + \frac{2k_0}{L\mu}\sin^2\left(\frac{j\pi x_0}{L}\right)}. \tag{12}$$

Para testar a viabilidade do pressuposto (11), foi analisado um caso de teste com um aumento significativo de rigidez vertical de $k = 1N/m^2$ para k_0=1000N/m, implementado na posição $x_0 = 0.3L$. Por razões de comparação foi introduzido um parâmetro adimensional:

$$\kappa = \frac{k_0}{kL}. \tag{13}$$

Nas Figuras 4-6 apresenta-se a comparação da solução analítica (aproximada) e numérica novamente para os dados: L=10m, EI=1000Nm^2, P=1N, μ=0,06kg/m, ξ=2, ψ=5 e ζ=2,1; assim o parâmetro adicional κ=100 e $x_0 = 3m$. Para efeitos de comparação, juntou-se nestas figuras ainda a resposta da viga original, ou seja sem o aumento k_0 implementado. As figuras correspondem às posições de carga em 2m, 3m, e 7m, ou seja, na região anterior, em cima e posterior ao aumento de k_0, respectivamente.

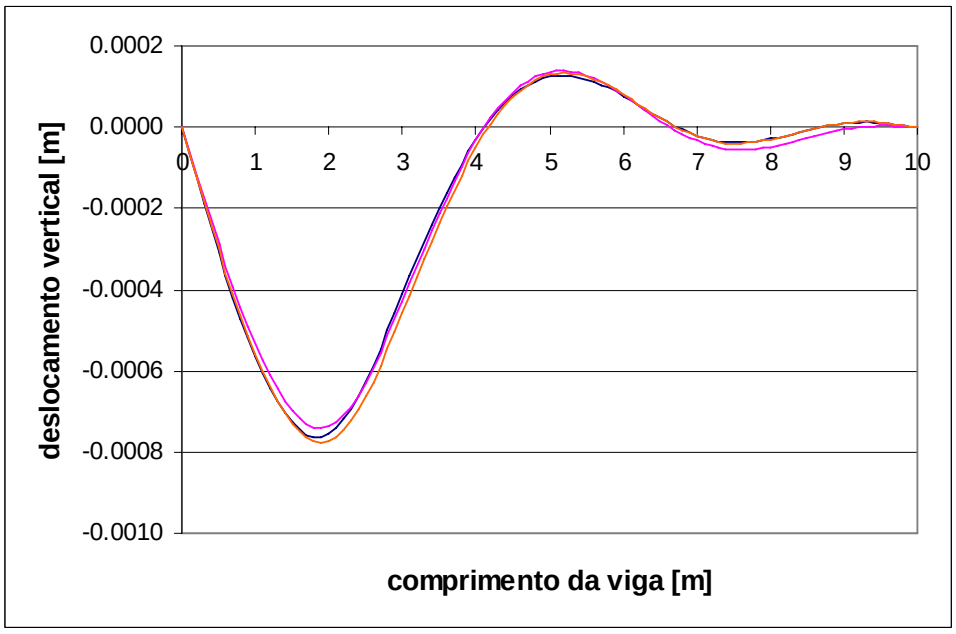

Figura 4. Deslocamento vertical do caso ξ=2, ψ=5, ζ=2,1 e κ=100, desenhado na posição da carga móvel em 2m (curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica, curva laranja: solução com κ=0).

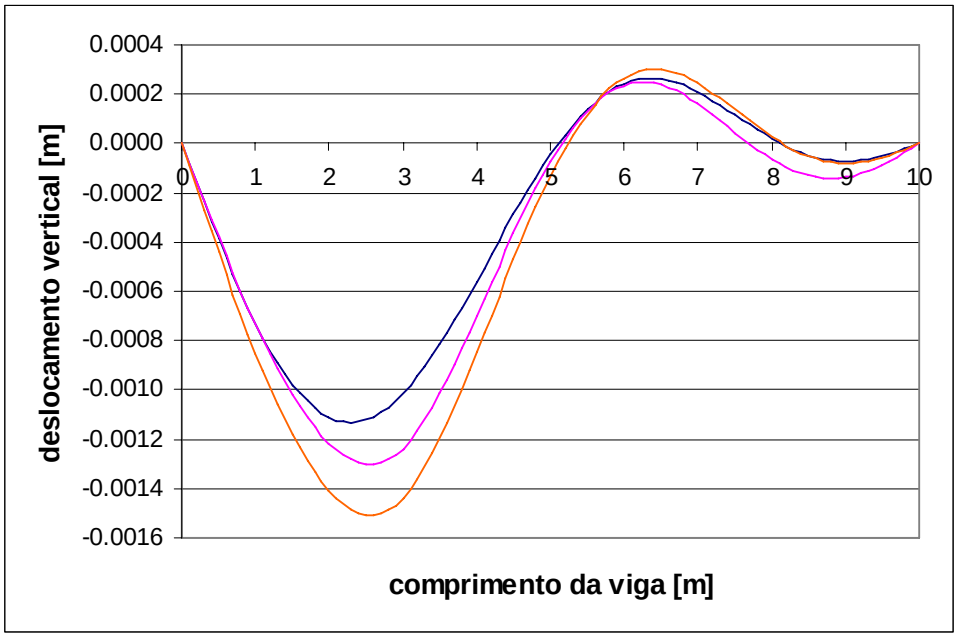

Figura 5. Deslocamento vertical do caso ξ=2, ψ=5, ζ=2,1 e κ=100, desenhado na posição da carga móvel em 3m (curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica, curva laranja: solução com κ=0)).

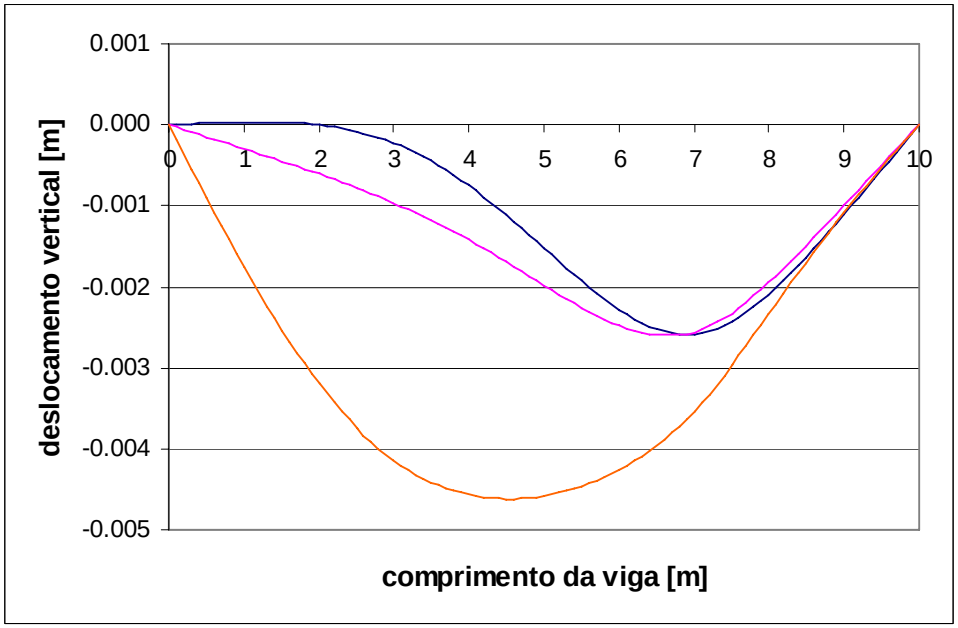

Figura 6. Deslocamento vertical do caso ξ=2, ψ=5, ζ=2,1 e κ=100, desenhado na posição da carga móvel em 7m (curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica, curva laranja: solução com κ=0).).

É possível concluir que neste caso de teste o pressuposto adoptado é razoavelmente adequado. No entanto, nota-se que o local do aumento de rigidez localizado funciona como um apoio flexível da viga, o que reduz os deslocamentos verticais e não produz efeitos adicionais indesejáveis. Para obter um resposta do sistema que corresponda à experiência real, será necessário implementar um modelo simplificado do veículo ferroviário, dado que neste caso a interacção do sistema de massas suspensas em elementos viscoelásticos é indispensável para o estudo destes referidos efeitos. Estes desenvolvimentos encontram-se actualmente em curso.

2.3. Análise directa de sensibilidade

É do conhecimento geral que as soluções analíticas têm variadas vantagens e uma delas é a possibilidade de análise directa de sensibilidades. Com o objectivo de, por exemplo, estudar a sensibilidade do deslocamento vertical numa dada posição e tempo relativamente ao valor da alteração de rigidez localizada k_0, basta fazer uma derivada parcial e obter:

$$\frac{\partial}{\partial k_0} w(x,t) \cong \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial W(j,t)}{\partial k_0} \sin \frac{j\pi x}{L}, \tag{14}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(j,t)}{\partial k_0} &= \frac{\partial b}{\partial k_0} \frac{-4Pbc\left(a^2+b^2-c^2\right)}{\mu\left(\left(a^2+b^2-c^2\right)^2+4a^2c^2\right)^2} \cdot \\ &\left(\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)}{c} \sin(ct) - \frac{\left(b^2-a^2-c^2\right)}{b} e^{-at} \sin(bt) - 2a\left(\cos(ct) - e^{-at}\cos(bt)\right) \right) + \\ &\frac{\partial b}{\partial k_0} \frac{Pc}{\mu\left(\left(a^2+b^2-c^2\right)^2+4a^2c^2\right)} \cdot \\ &\left(\frac{2b}{c} \sin(ct) - \left(1+\frac{a^2+c^2}{b^2}\right) e^{-at} \sin(bt) - t\frac{\left(b^2-a^2-c^2\right)}{b} e^{-at}\cos(bt) - 2ate^{-at}\sin(bt) \right) \end{aligned} \tag{15}$$

e

$$\frac{\partial b}{\partial k_0} = \frac{\frac{1}{L\mu}\sin^2\left(\frac{j\pi x_0}{L}\right)}{\sqrt{\omega_{(j)}^2 - \omega_b^2 + \frac{k}{\mu} + \frac{2k_0}{L\mu}\sin^2\left(\frac{j\pi x_0}{L}\right)}}. \tag{16}$$

A implementação das Equações (14-16) é imediata.
Em caso de maior complexidade, como por exemplo, para o estudo de sensibilidade do deslocamento máximo ao longo da viga e ao longo do tempo em relação a k_0, proceder-se-ia de forma análoga, embora neste caso as respectivas expressões analíticas serem consideravelmente mais extensas e por tal não listadas no presente trabalho.

3. MUDANÇA SÚBITA DA RIGIDEZ VERTICAL DA FUNDAÇÃO ELÁSTICA

Para a análise da passagem da carga móvel em zonas com variação súbita da rigidez vertical da fundação da via férrea, optou-se pela representação da via através de uma viga finita com fundação elástica encastrada nas extremidades. Com este objectivo a solução geral apresentada em [4] para viga em consola foi adaptada de forma a contemplar o apoio elástico e o amortecimento da viga. Em seguida, particularizou-se a solução para o caso da existência de uma força transversal e um momento flector directamente aplicados na extremidade livre, ou seja com as condições de fronteira estáticas não-homogéneas e variáveis no tempo. O sistema pretendido de viga bi-encastrada com variação brusca da rigidez de fundação foi assim obtido através da união das duas soluções referidas, tendo por base a condição de continuidade na secção de união das duas consolas. Como a descontinuidade da constante de Winkler não afecta a continuidade dos esforços internos da viga, estes foram introduzidos nas duas consolas com valor igual, mas desconhecido. Os dois valores dos esforços internos obtiveram-se então das condições de igualdade do deslocamento e da rotação na secção de ligação entre consolas, o que, no entanto, exige um procedimento numérico, repetido em cada passo e tempo.

3.1. Consola de apoio elástico sujeita a carga móvel

A forma geral do deslocamento vertical da resposta transiente da viga sujeita a carga móvel escreve-se da forma seguinte:

$$w(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu}{W_j}W(j,t)w_{(j)}(x), \tag{17}$$

onde

$$w_{(j)}(x)=\sin\frac{\lambda_j x}{L}+A_j\cos\frac{\lambda_j x}{L}+B_j\sinh\frac{\lambda_j x}{L}+C_j\cosh\frac{\lambda_j x}{L} \tag{18}$$

representam as formas de vibração natural e

$$W_j=\int_0^L \mu w_{(j)}^2(x)dx\,. \tag{19}$$

As constantes da Equação (18), λ_j, A_j, B_j, C_j, são determinadas numericamente de acordo com as condições de fronteira especificadas. Os parâmetros λ_j, ligados aos valores das frequências naturais, correspondem às raízes da equação:

$$1+\cos\lambda_j\cosh\lambda_j=0\,, \tag{20}$$

quer no caso da viga encastrada à esquerda ou à direita. Por sua vez, as constantes A_j poderão ser calculadas, para ambos os casos, de:

$$A_j = -\frac{\sin\lambda_j + \sinh\lambda_j}{\cos\lambda_j + \cosh\lambda_j}\,. \tag{21}$$

De seguida, para o encastramento à esquerda e à direita, $C_j = -A_j$, $B_j = -1\ \forall j$ e $C_j = A_j$, $B_j = 1\ \forall j$, respectivamente. A equação fundamental do problema é novamente dada pela Equação (2) e as frequências naturais, para os casos com e sem a fundação elástica, são definidas pelas fórmulas seguintes:

$$\omega_{(j)} = \sqrt{\frac{\lambda_j^4\pi^4}{L^4}\frac{EI}{\mu}}\,,\ \widetilde{\omega}_{(j)} = \sqrt{\frac{\lambda_j^4\pi^4}{L^4}\frac{EI}{\mu} + \frac{k}{\mu}}\,. \tag{22}$$

Tal como especificado, neste caso a imagem $W(j,t)$ da transformação integral Laplace-Carson tem de contemplar as condições de fronteira estáticas não-homogéneas e variáveis no tempo. Esta introdução é feita através da função z(0,L,t) e a imagem $W(j,t)$ toma a forma seguinte:

$$W(j,t) = \frac{1}{b\mu}\int_0^t \left(P w_{(j)}(c\tau) - EI\, z(0,L,\tau)\right) e^{-a(t-\tau)} \sin\left(b(t-\tau)\right) d\tau\,, \tag{23}$$

onde

$$\begin{aligned} z(0,L,t) &= -\frac{V(L,t)}{EI} w_{(j)}(L) + \frac{M(L,t)}{EI}\left.\frac{dw_{(j)}(x)}{dx}\right|_{x=L}\,, \\ z(0,L,t) &= \frac{V(0,t)}{EI} w_{(j)}(0) - \frac{M(0,t)}{EI}\left.\frac{dw_{(j)}(x)}{dx}\right|_{x=0} \end{aligned} \tag{24}$$

para os casos do encastramento colocado à esquerda e à direita, respectivamente, e

$$a = \omega_b,\quad b = \sqrt{\widetilde{\omega}_{(j)}^2 - \omega_b^2}\,. \tag{25}$$

Por razões de comparação, parâmetros semelhantes aos da Secção 2 poderão ser introduzidos de acordo com:

$$,\quad \xi = \frac{\omega}{\widetilde{\omega}_{(1)}},\quad \psi = \frac{\omega_b}{\omega_{(1)}},\quad \zeta = \frac{\omega}{\omega_{(1)}}, \tag{26}$$

onde ω corresponde à frequência circular da carga móvel:

$$\omega = \frac{\lambda_1 c}{L}\,. \tag{27}$$

Os resultados expressos nas equações acima foram validados em modelos equivalentes de elementos finitos com software ANSYS, tal como nos casos anteriores. Testaram-se várias combinações dos parâmetros definidos pela Equação (26), tal como nos casos com carga móvel introduzida e/ou forças generalizadas na extremidade, variáveis no tempo, implementadas. Para os casos de teste foi novamente adoptado: L=10m, EI=1000Nm^2, P=1N, μ=0,06kg/m. A concordância entre valores analíticos e numéricos foi excelente em todos os casos analisados, tal como se vê na Figura 7, onde se apresentam os resultados da consola com encastramento à direita, com a carga móvel e as forças generalizadas aplicadas na extremidade livre em função de tempo. Dado tratar-se de um caso de teste os valores de deslocamento vertical obtido não têm representatividade real.

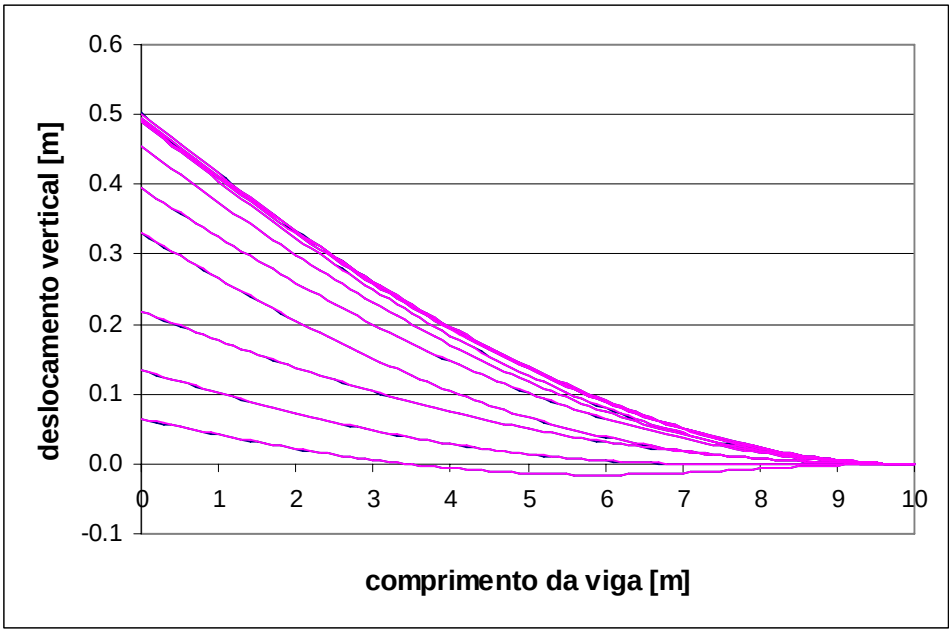

Figura 7. Deslocamento vertical do caso ξ=0,5, ψ=0,5 e ζ=0,6 com forças generalizadas aplicadas na extremidade, desenhado para 10 posições da carga móvel
(curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica).

3.2. Viga encastrada de apoio elástico com descontinuidade sujeita a carga móvel

Tal como já referido, para conseguir modelar a passagem de carga móvel entre zonas de rigidez vertical diferente, é necessário juntar a partir das condições de continuidade duas soluções, uma da consola encastrada à esquerda e outra da consola encastrada à direita, cada qual com constantes de Winkler diferentes. Como a descontinuidade da constante de Winkler não afecta a continuidade dos esforços internos da viga, estes poderão ser determinados da igualdade do deslocamento e do declive na secção de ligação. Este passo exige uma solução numérica em cada passo de tempo. A maior dificuldade consiste na

implementação da Equação (23), onde a função z(0,L,t), dada pela Equação (24), tem que ser integrada ao longo do tempo, mesmo quando contém os esforços internos, incógnitas do problema, de variação temporal desconhecida. Assume-se por isso uma variação linear dos esforços internos em cada passo de tempo e os seus valores iniciais nulos. Com este procedimento consegue-se calcular o valor dos esforços internos no final de cada passo de tempo considerado. No entanto, devido ao integral de convolução da Equação (23), nenhuma das integrações parciais de um passo de tempo anterior poderá ser usada no novo passo de tempo.

A metodologia foi testada de forma inversa, ou seja, primeiro uma viga bi-encastrada de comprimento 20m foi resolvida numericamente no software ANSYS. Os esforços internos foram retirados da secção onde se considerou a ligação das duas soluções, que por razões de simplificação foi considerada a meio da viga. Usando estes valores nas fórmulas analíticas, conseguiu-se recuperar completamente a solução numérica. Em mais pormenores, durante a primeira metade do tempo total de passagem da carga móvel, a consola com encastramento à esquerda foi sujeita à carga móvel e às forças generalizadas aplicadas na extremidade livre e variáveis no tempo. Na consola com encastramento à direita apenas as forças generalizadas, variáveis no tempo, foram implementadas. Passada a metade de tempo, quando a carga atravessou a secção de ligação, as consolas mudaram as suas funções. A concordância dos resultados foi novamente excelente, tal como se mostra nas Figuras 8-10. Nestas figuras apresentam-se os gráficos dos deslocamentos calculados numericamente e recuperados analiticamente para os casos: $\xi=\zeta=1$ e $\psi=0$, posição da carga em 0.1, 0.2,…, 1m e os resultados na consola direita; $\xi=\zeta=1$ e $\psi=0$, posição da carga em 1, 1.1, 1.2, …, 2m e os resultados na consola esquerda; $\xi=0{,}268$, $\psi=2$ e $\zeta=1$, posição da carga em 1, 1.1, 1.2, …, 2m e os resultados na consola direita.

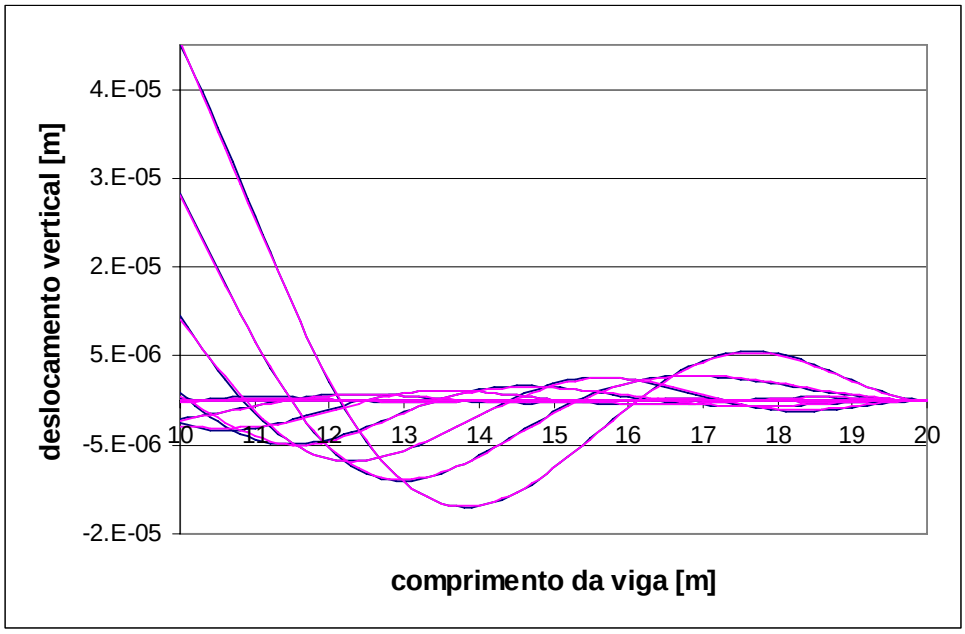

Figura 8. Deslocamento vertical do caso ξ=1, ψ=0 e ζ=1, desenhado para 10 posições da carga móvel de 0 até 1m (curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica).

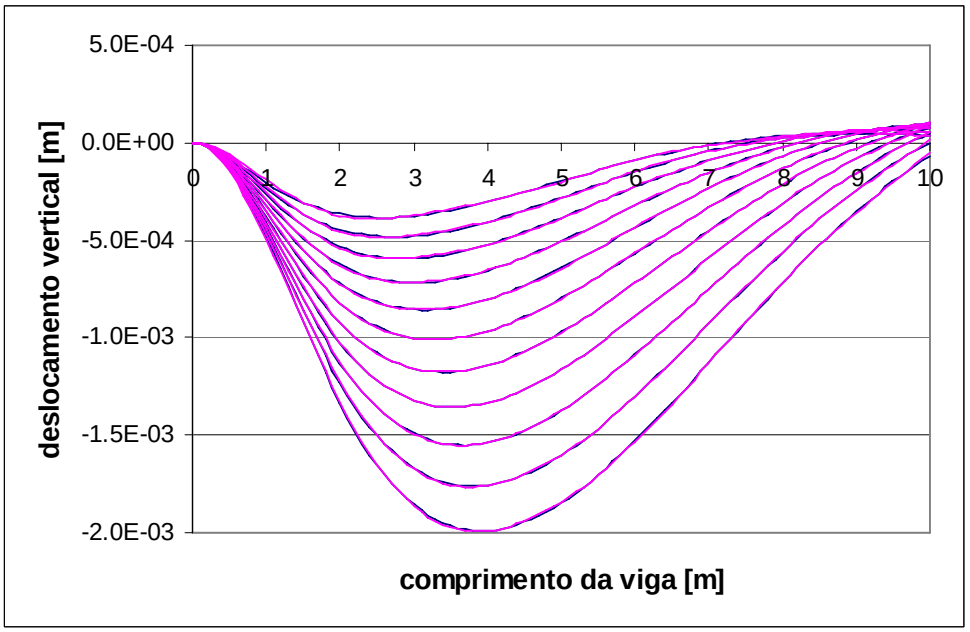

Figura 9. Deslocamento vertical do caso ξ=1, ψ=0 e ζ=1, desenhado para 11 posições da carga móvel de 1 até 2m (curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica).

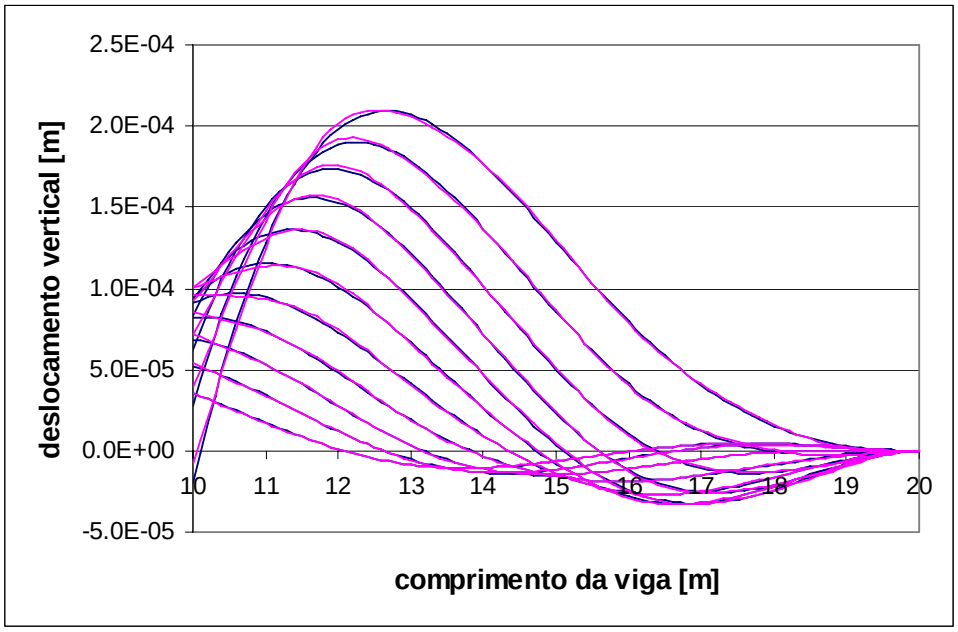

Figura 10. Deslocamento vertical do casoξ=0.268, ψ=2 e ζ=1, desenhado para 11 posições da carga móvel de 1 até 2m (curva violeta: solução analítica; curva azul: solução numérica).

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho são apresentadas as soluções analíticas da resposta dinâmica de uma estrutura unidimensional com fundação elástica e variação súbita da rigidez vertical. O caso da existência de uma variação brusca localizada é resolvido de forma aproximada, ou passo que o caso de mudança súbita numa determinada secção do valor da rigidez da fundação elástica é resolvido de forma exacta, embora a solução analítica obrigue a cálculos numéricos. As respostas dinâmicas são determinadas em termos de deslocamento vertical. Ainda, evidencia-se a importância das soluções analíticas simples em estudo de sensibilidade e comparam-se os resultados com os obtidos pela utilização de código comercial conhecido. Estes resultados representam extensões da metodologia apresentada em [4] que, de acordo com o conhecimento dos autores, não foram ainda publicados. Apesar de referidos a modelos simplificados unidimensionais, estes resultados fornecem primeiras impressões sobre a resposta dinâmica em regime transiente de um comboio a atravessar zonas com variação brusca da rigidez da via ou fundação e servir de base para futuros desenvolvimentos nos modelos.

REFERÊNCIAS

[1] A. Lundqvist, T. Dahlberg, "Railway track stiffness variations – consequences and countermeasures", Apresentado na 19th IAVSD Symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks, Milão, Italia, 2005

[2] M. Shamalta, A.V. Metrikine, "Analytical study of the dynamic response of an embedded railway track to a moving load", *Archive of Applied Mechanics*. Vol. **73**, pp. 131-146, (2003).

[3] A.V. Vostroukhov, A.V. Metrikine, "Periodically supported beam on visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track", *International Journal of Solids and Structures*. Vol. **40**, pp. 5723-5752, (2003).

[4] L. Frýba, *Vibration of solids and structures under moving loads*, 3th Edition. Thomas Telford, (1999).

[5] *Release 10.0 Documentation for ANSYS*, Swanson Analysis Systems IP, Inc., (2006).

[6] *Release 14 Documentation for MATLAB*, The MathWorks, Inc., (2004).