ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 349, № 1, с. 10–12

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968:517.983

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В РЕФЛЕКСИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

© 1996 г. **А. Ю. Карлович**

Представлено академиком В.С. Владимировым 22.09.94 г.

Поступило 11.10.94 г.

1°. В настоящей статье получены критерии нётеровости и формулы для вычисления индекса сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами в рефлексивных пространствах Орлича на гладком замкнутом контуре. Некоторое достаточное условие нётеровости было получено И.Ц. Гохбергом и Н.Я. Крупником [1] для симметричных пространств (см. [2, с. 79]), частным случаем которых являются пространства Орлича.

В качестве следствия вычислен существенный спектр оператора сингулярного интегрирования с ядром Коши в рефлексивном пространстве Орлича на гладком разомкнутом контуре. При этом выявлено новое качество: в отличие от частного случая пространств Лебега этот спектр, вообще говоря, имеет ненулевую плоскую меру.

2°. Пусть Γ – гладкая замкнутая кривая, делящая комплексную плоскость на две области $\mathfrak{D}^+(\ni 0)$ и $\mathfrak{D}^-(\ni\infty)$. Пусть $M(x)$ – функция Юнга, т.е. M: $\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ – четная выпуклая непрерывная функция такая, что $M(0)=0$, $M(x)>0$ при $x\neq 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{M(x)} = 0.$$

Взаимно дополнительной к функции $M(x)$ называется функция Юнга

$$N(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{y\geq 0}\{y|x|-M(y)\}.$$

Через $L_M(\Gamma)$ будем обозначать пространство Орлича – множество измеримых на Γ комплекснозначных функций, для которых

$$\|u\|_M \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\int_\Gamma |u(t)v(t)||dt| : \int_\Gamma N(|v(t)|)|dt|\leq 1\right\}<\infty.$$

Пространство Орлича $L_M(\Gamma)$ с функцией Юнга $M(x)=p^{-1}|x|^p$, где $1<p<\infty$, изометрично пространству Лебега $L_p(\Gamma)$.

Одесский государственный университет, Украина

Согласно [3], пространству Орлича сопоставляются индексы Бойда:

$$\alpha_M = \lim_{t\to+\infty}\theta(t) = \sup_{t>1}\theta(t),$$

$$\beta_M = \lim_{t\to 0+}\theta(t) = \inf_{0<t<1}\theta(t),$$

где

$$\theta(t) = -\frac{\ln h(t)}{\ln t},\quad h(t) = \limsup_{x\to\infty}\frac{M^{-1}(x)}{M^{-1}(tx)},$$

$M^{-1}(x)$ – функция, обратная к $M(x)$ на $(0,+\infty)$. Легко видеть, что для пространств Лебега $L_p(\Gamma)$ $\alpha_M=\beta_M=1/p$.

Теорема 1 (см. [4, с. 255; 5; 2, с. 96; 6]). *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *пространство Орлича* $L_M(\Gamma)$ *рефлексивно*;

2) $\limsup\limits_{x\to\infty}\dfrac{M(2x)}{M(x)}<\infty$, $\quad\limsup\limits_{x\to\infty}\dfrac{N(2x)}{N(x)}<\infty$;

3) $0<\alpha_M\leq\beta_M<1$;

4) *оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши*

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}$$

ограничен в пространстве $L_M(\Gamma)$.

При выполнении условий теоремы 1 пространства Орлича $L_M(\Gamma)$ и $L_N(\Gamma)$ являются взаимно сопряженными.

3°. В рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$ рассмотрим оператор

$$R_G = GP_+ + P_-, \tag{1}$$

где функция $G\in L_\infty(\Gamma)$, а $P_\pm = \frac{1}{2}(I\pm S)$.

Факторизацией функции $G\in L_\infty(\Gamma)$ в пространстве Орлича называется ее представление в виде

$$G(t) = G_-(t)t^\varkappa G_+(t),\quad t\in\Gamma, \tag{2}$$

где κ – целое число,

$$G_+ \in L_N^+(\Gamma) = P_+L_N(\Gamma), \quad G_+^{-1} \in L_M^+(\Gamma) =$$
$$= P_+L_M(\Gamma), \quad G_- \in L_M^-(\Gamma) = P_-L_M(\Gamma) \dotplus \mathbb{C},$$
$$G_-^{-1} \in L_N^-(\Gamma) = P_-L_N(\Gamma) \dotplus \mathbb{C},$$

оператор $G_+^{-1}P_+G_-^{-1}I$ ограничен в $L_M(\Gamma)$.

Аналогично случаю пространств Лебега [7, гл. 9] доказываются следующие два утверждения.

Теорема 2. *Для того, чтобы функция $G \in L_\infty(\Gamma)$ допускала факторизацию (2) в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы оператор (1) был нётеровым в пространстве $L_M(\Gamma)$. Если оператор (1) нётеров, то его индекс*

$$\operatorname{Ind} R_G = -\kappa.$$

Теорема 3. *Пусть функция $G \in L_\infty(\Gamma)$ допускает факторизацию (2) в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$. Тогда оператор (1) обратим в $L_M(\Gamma)$ слева, справа или с двух сторон в зависимости от того, будет ли число κ положительным, отрицательным или равным нулю. Во всех случаях оператор, обратный к (1) с соответствующей стороны, задается равенством*

$$R_G^{-1} = (t^{-\kappa}P_+ + P_-)(G_+^{-1}P_+ + G_-P_-)G_-^{-1}I.$$

С помощью результатов [8], а также интерполяционной теоремы Бойда [9] доказывается

Теорема 4. *Пусть $G \in L_\infty(\Gamma)$ и оператор (1) нётеров во всех пространствах Лебега $L_p(\Gamma)$, где $p^{-1} \in [\alpha_M, \beta_M]$. Тогда оператор (1) нётеров в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$ с индексами Бойда α_M, β_M. При этом*

$$\operatorname{Ind} R_G\big|_{L_M(\Gamma)} = \operatorname{Ind} R_G\big|_{L_p(\Gamma)}, \quad \text{где} \quad p^{-1} \in [\alpha_M, \beta_M]. \quad (3)$$

4°. Пусть $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ и удовлетворяют неравенствам $0 < \gamma \le \delta < 1$. Определим луночку с вершинами $z, w \in \mathbb{C}$:

$$H(z, w, \gamma, \delta) := \left\{ u \in \mathbb{C}\backslash\{z, w\}: \frac{1}{2\pi}\arg\frac{u-z}{u-w} \in [\gamma, \delta] \right\} \cup \{z, w\}.$$

Здесь и ниже считаем, что значения arg лежат в полусегменте $[0, 2\pi)$. Свяжем с каждой кусочно-непрерывной функцией G множество $G_M \subset \mathbb{C}$, состоящее из образа функции G, дополненного в точках t_k ее разрыва луночками $H(G(t_k - 0), G(t_k + 0), \alpha_M, \beta_M)$. Ясно, что

$$G_M = \bigcup_{t \in \Gamma} H(G(t-0), G(t+0), \alpha_M, \beta_M).$$

Кусочно-непрерывную функцию G назовем M-неособенной, если $0 \notin G_M$. В этом случае множество G_M^φ, получающееся из G_M заменой каждой луночки $H(G(t_k - 0), G(t_k + 0), \alpha_M, \beta_M)$ на дугу $H(G(t_k - 0), G(t_k + 0), \varphi, \varphi)$, где $\varphi \in [\alpha_M, \beta_M]$, есть непрерывная замкнутая естественно ориентированная кривая, не проходящая через точку $z = 0$. Число оборотов этой кривой вокруг нуля не зависит от φ, называется индексом M-неособенной функции G и обозначается $\operatorname{ind}_M G$.

Теорема 5. *Пусть G – кусочно-непрерывная функция, $L_M(\Gamma)$ – рефлексивное пространство Орлича с индексами Бойда α_M, β_M. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *оператор (1) нётеров в $L_M(\Gamma)$;*

2) $G(t \pm 0) \neq 0, \quad \dfrac{1}{2\pi}\arg\dfrac{G(t-0)}{G(t+0)} \notin [\alpha_M, \beta_M]$

для всех $t \in \Gamma$;

3) *функция G M-неособенна.*

Достаточность условий теоремы 5 следует из аналогичного результата для пространств Лебега $L_p(\Gamma)$ [7, гл. 9] и теоремы 4. Необходимость первого условия в 2) устанавливается аналогично случаю пространства $L_p(\Gamma)$ [7, с. 256]. Если это условие выполняется, то в силу локального принципа (см. [7, гл. 12]) нётеровость оператора (1) эквивалентна нётеровости операторов $G_tP_+ + P_-$ для всех $t \in \Gamma$, где $G_t(\tau) = \tau^\gamma$ – непрерывная на $\Gamma\backslash\{t\}$ функция,

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(t-0)}{G(t+0)}, \quad \operatorname{Re}\gamma \in [0, 1).$$

Наиболее сложной частью доказательства является исследование нётеровости оператора $G_tP_+ + P_-$ в пространстве $L_M(\Gamma)$, которое проводится с использованием идеи работы [10].

Следствие 1. *Пусть γ – разомкнутая гладкая кривая, $L_M(\Gamma)$ – рефлексивное пространство Орлича с индексами Бойда α_M, β_M. Тогда существенный спектр оператора S в пространстве $L_M(\Gamma)$, т.е. множество тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\lambda I - S$ не нётеров, имеет вид*

$$\sigma(S) = H(-1, 1, \alpha_M, \beta_M) \cup H(1, -1, \alpha_M, \beta_M).$$

Замечание 1. Существенный спектр оператора S в рефлексивном пространстве Орлича $L_M(\Gamma)$ имеет ненулевую плоскую меру, если $\alpha_M < \beta_M$.

Теорема 6. *Пусть $t_1, \ldots, t_m$ – все точки разрыва функции G и $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ – дуги, на которые* *контур* Γ *разбивается этими точками. Если оператор* (1) *нётеров в* $L_M(\Gamma)$, *то его индекс вычисляется по формуле*

$$\operatorname{Ind} R_G = -\operatorname{ind}_M G,$$

или, эквивалентно,

$$\operatorname{Ind} R_G = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{m} \arg\frac{G(t_j-0)}{G(t_j+0)} - \sum_{j=1}^{m}\{\operatorname{Arg} G(t)\}_{\Gamma_j}\right) - l,$$

где $\{\operatorname{Arg} G(t)\}_{\Gamma_j}$ – *приращение аргумента вдоль дуги* Γ_j, l – *число точек разрыва, для которых*

$$\frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(t_j-0)}{G(t_j+0)} > \beta_M.$$

Следствие 2. *Пусть* G – *кусочно-непрерывная функция. Оператор* (1) *нётеров в рефлексивном пространстве Орлича* $L_M(\Gamma)$ *с индексами Бойда* α_M, β_M *тогда и только тогда, когда он нётеров во всех пространствах* $L_p(\Gamma)$, *где* $p^{-1} \in [\alpha_M, \beta_M]$. *Если оператор* (1) *нётеров в пространстве* $L_M(\Gamma)$, *то его индекс вычисляется по формуле* (3).

Замечание 2. С помощью локального принципа теоремы 5, 6 и следствие 2 обобщаются на случай линейчатых коэффициентов G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* // Studia Mathematica. 1968. V. 31. P. 347–362.
2. *Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семёнов Е.М.* Итоги науки и техники. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 24. 161 с.
3. *Boyd D.W.* // Pacif. J. Math. 1971. V. 38. № 2. P. 315–323.
4. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.
5. *Симоненко И.Б.* // Мат. сб. 1964. Т. 63. № 4. С. 536–553.
6. *Deng Yaohua* // Acta Math. Sci. 1983. V. 3. № 1. P. 71–83.
7. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 426 с.
8. *Шнейберг И.Я.* // ДАН. 1973. Т. 212. № 1. С. 57–59.
9. *Boyd D.W.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. № 2. P. 215–219.
10. *Spitkovsky I.M.* // J. Funct. Analysis. 1992. V. 105. P. 129–143.