МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE, REPUBLIC OF BELARUS
BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ДРОБНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ,
ПОСВЯЩЕННОЙ 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
АКАДЕМИКА Ф.Д.ГАХОВА
(Беларусь, Минск, 16-20 февраля 1996 года)

BOUNDARY VALUE PROBLEMS, SPECIAL FUNCTIONS AND FRACTIONAL CALCULUS

PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL CONFERENCE
DEDICATED TO 90th BIRTHDAY OF
ACADEMICIAN F.D.GAKHOV
(Belarus, Minsk, February 16-20, 1996)

Минск, 1996
Minsk, 1996

УДК 517.3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ДРОБНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Ф.Д. Гахова (Минск, 16-20 февраля 1996 года) / Под редакцией А.А.Килбаса. -Мн.: Белгосуниверситет, 1996. 417с.

В данном издании в основном представлены расширенные варианты докладов участников Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Ф.Д.Гахова. Тематика докладов связана с проблемами, разрабатываемыми в школе по теории краевых задач и особых интегральных уравнений, созданной и в течение долгих лет руководимой Ф.Д.Гаховым и его учениками. Конференция была организована Белорусским государственным университетом при финансовой поддержке Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований и проводилась с 16 по 20 февраля в г.Минске.

ISBN 985-6144-40-X

Посвящается памяти нашего Учителя и Коллеги

Dedicated to the Memory of our Teacher and Collegue

$$i_1(x,y,\tau) = -\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0}; \quad i_2 = \frac{c_{66}\beta_3}{2c_{44}c_{55}} T(x,y,o,\tau) - \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right|_{z=0}.$$

Литература

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М. - Л. 1950.
2. Прусов И.А. Термоупругие анизотропные пластинки. - Минск: Изд-во Белорус. ун-
1978.
3. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряже
в тонких пластинках. - Киев: Наукова думка. 1972.
4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Лозбень В.Л. Термоупругость тел при перемен
коэффициентах теплоотдачи. - Киев: Наукова думка. 1977.
5. Байда Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. - Л.: Изд
Ленингр. ун-та. 1983.
6. Королев В.В. Напряженное состояние трансверсально-изотропного полупростран
при локальном нагреве. Прикл. механика. 1992. т.28, N6. с.8-14.
7. Подильчук Ю.Н. Общая задача теории упругости для трансверсально-изотропн
конуса. . Прикл. механика. 1991. т.27, N12. с.14-20.
8. Моссаковская С. Функция напряжений для упругих тел, обладающих трехос
ортотропией. Бюллетень Польской АН (отд.4). 1955. т.3, N1. с. 3-6.
9. Чен. Некоторые задачи для трансверсально-изотропных материалов. Тр. Амери
об-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. 1966. т.33, N2. с. 98-107.
10. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир. 1975.

Об алгебре сингулярных интегральных операторов в рефлексивных пространствах Орлича на кривых Карлесона

А.Ю. Карпович (Одесса, Украина)

Настоящая работа посвящена изучению банаховой алгебры сингулярных интегральных операторов с матричными кусочно непрерывными коэффициентами в рефлексивных пространствах Орлича $L^n_M(\Gamma)$ на кривой Карлесона Γ. Полученные результаты примыкают к исследованиям И.М.Спитковского [11], А.Беттчера и Ю.И.Карповича [3,4] сингулярных интегральных операторов в весовых пространствах Лебега на кривых Карлесона.

Функцией Юнга называется выпуклая непрерывная функция $M:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, для которой $M(0) = 0, M(x) > 0$ при $x > 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{M(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{M(x)} = 0.$$

Дополнительной к функции M называется функция Юнга

$$N(x) := \max_{y\ge 0}\{xy - M(y)\}.$$

Будем называть кривую на плоскости жордановой (простой), если она гомеоморфна окружности. Пусть Γ - спрямляемая жорданова кривая, снабженная мерой Лебега $|d\tau|$ и ориентированная против часовой стрелки. Пространством Орлича $L_M(\Gamma)$ называется множество всех измеримых на Γ комплекснозначных функций u, для каждой из которых при некотором $\lambda > 0$ выполняется неравенство $\int_\Gamma M(|u(\tau)|/\lambda)|d\tau| < \infty$. Пространство $L_M(\Gamma)$ снабдим нормой Орлича:

$$\|u\|_M := \sup\left\{\int_\Gamma |u(\tau)v(\tau)||d\tau| : \int_\Gamma N(|v(\tau)|)|d\tau| \le 1\right\},$$

относительно этой нормы пространство $L_M(\Gamma)$ является банаховым.

Важными интерполяционными и геометрическими характеристиками пространства Орлича являются индексы Бойда (см., например, [9, 10]). Рассмотрим функцию

$$g(x) := \lim_{y\to\infty} \sup \frac{M^{-1}(y)}{M^{-1}(x^{-1}y)}, \quad x \in (0,\infty),$$

где M^{-1} – функция, обратная к M. Индексами Бойда пространства Орлича называются величины

$$\alpha_M := \lim_{x\to 0} \frac{\log g(x)}{\log(x)}, \quad \beta_M := \lim_{x\to\infty} \frac{\log g(x)}{\log(x)}.$$

Лемма 1. (см., например, [9, теор. 3.2.(b)]). *Пространство Орлича* $L_M(\Gamma)$ *рефлексивно тогда и только тогда, когда* $0 < \alpha_M \le \beta_M < 1$.

Пространство Орлича, порожденное функцией Юнга $M(x) = x^p$, $1 < p <$ изоморфно пространству Лебега $L_p(\Gamma)$. Индексы Бойда пространства $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, совпадают и равны $1/p$. Примеры функций Юнга, порождающ рефлексивные пространства Орлича, не изоморфные пространствам Лебега, для котор индексы Бойда совпадают (различны) приведены в [10, с. 93].

Для $\varphi \in L_1(\Gamma)$ полагаем

$$(S\varphi)(t) := \lim_{R\to 0} \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma\setminus\Gamma(t,R)} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad t \in \Gamma,$$

где $\Gamma(t,R) := \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < R\}$. Из теоремы Давида [5] об ограниченно оператора S в пространствах Лебега $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, применяя техн интерполяции линейных операторов, несложно получить следующий результат.

Теорема 1. (см. [8, теор. 3.6]). *Оператор* S *ограничен в рефлексивн пространстве Орлича* $L_M(\Gamma)$, *тогда и только тогда, когда* Γ *является крив Карлесона, т.е.* $\sup_{t\in\Gamma}\sup_{R>0}|\Gamma(t,R)|/R < \infty$, *где* $|\Gamma(t,R)|$ *- длина (мера) порции* $\Gamma(t,R)$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что Γ - жорданова крив Карлесона, $L_M(\Gamma)$ - рефлексивное пространство Орлича.

Зафиксируем произвольную точку $t\in\Gamma$ и выберем произвольную непрерыв ветвь $arg(\tau - t)$ на $\Gamma\setminus\{t\}$. Согласно [1] любая кривая Карлесона Γ удовлетвор условию

$$arg(\tau - t) = O(-\log|\tau - t|), \quad \tau \to t;$$

Полагаем $\eta_t(\tau) := e^{-arg(\tau - t)}$ при $\tau \in \Gamma\setminus\{t\}$,

$$\rho_t(x) := \limsup_{R\to 0}\left(\max_{\tau\in\Gamma, |\tau-t|=xR}\eta_t(\tau) \Big/ \min_{\tau\in\Gamma, |\tau-t|=R}\eta_t(\tau)\right), \quad x \in (0,\infty).$$

Лемма 2. (см. [3, лемма 6.4]). *Для каждой точки* $t \in \Gamma$ *существуют преде*

$$\delta_t^- := \lim_{x\to 0}\frac{\log\rho_t(x)}{\log x}, \quad \delta_t^+ := \lim_{x\to\infty}\frac{\log\rho_t(x)}{\log x},$$

причем $-\infty < \delta_t^- \le \delta_t^+ < +\infty$.

Числа $\delta_t^\pm$ называются *индексами логарифмической спиралевидности кривой* Γ в то $t \in \Gamma$. Кривая Карлесона Γ называется *логарифмической*, если для каждой точ $\in \Gamma$ существует $\delta_t \in R$, для которого

$$arg(\tau - t) = -\delta_t \log|\tau - t| + O(1), \quad \tau \to t.$$

В этом случае $\delta_t^- = \delta_t^+ = \delta_t$. Пример кривой Карлесона, не являющ логарифмической, т.е. кривой, для которой $\delta_t^- < \delta_t^+$ приведен в [3].

Зафиксируем $t \in \Gamma$ и $k \in (0, 1)$. Положим

$$\Delta(t,R) := \{\tau \in \Gamma : kR \le |\tau - t| < R\}, \quad \text{где} \quad 0 < R \le \max_{\tau\in\Gamma}|\tau - t|.$$

Пусть функция $\psi : \Gamma\setminus\{t\} \to (0,\infty)$ непрерывна. Определим функцию

$$(Q_t\psi)(x) := \limsup_{R\to 0}\frac{\|\psi\chi_{\Delta(t,xR)}\|_M \|\psi^{-1}\chi_{\Delta(t,R)}\|_N}{|\Delta(t,R)|}, \quad x \in (0,\infty),$$

где $\chi_{\Delta(t,R)}$ -характеристическая функция порции $\Delta(t,R)$.

Теорема 2. (i) *Для всех* $x \in R$ *существуют конечные пределы*

$$\alpha_t(x) := \lim_{y\to 0}\frac{\log(Q_t\eta_t^x)(y)}{\log y}, \quad \beta_t(x) := \lim_{y\to\infty}\frac{\log(Q_t\eta_t^x)(y)}{\log y},$$

которые будем называть индикаторными функциями $L_M(\Gamma)$;

(ii) $\alpha_t(0) = \alpha_M$, $\beta_t(0) = \beta_M$;

(iii) *функция* α_t *- вогнута, функция* β_t *- выпукла;*

(iv) *для всех* $x, y \in R$

$$\alpha_t(x) + \alpha_t^0(y) \le \alpha_t(x+y) \le \min\{\alpha_t(x) + \beta_t^0(y), \beta_t(x) + \alpha_t^0(y)\},$$

$$\beta_t(x) + \beta_t^0(y) \ge \beta_t(x+y) \ge \max\{\alpha_t(x) + \beta_t^0(y), \beta_t(x) + \alpha_t^0(y)\},$$

где

$$\alpha_t^0(x) := \min\{\delta_t^- x, \delta_t^+ x\} \quad \beta_t^0(x) := \max\{\delta_t^- x, \delta_t^+ x\}.$$

Пусть $\delta_1, \delta_2, \alpha, \beta$ – действительные числа, удовлетворяющие следующим условиям: $\delta_1 \le \delta_2$, $0 < \alpha \le \beta < 1$. Рассмотрим множество

$$Y(\delta_1,\delta_2,\alpha,\beta) := \{\gamma = x + iy \in C : \alpha + \min\{\delta_1 x, \delta_2 x\} \le y \le \beta + \max\{\delta_1 x, \delta_2 x\}\}.$$

Для $z, w \in C$ положим

$$L(z,w;\delta_1,\delta_2;\alpha,\beta) := \{z,w\} \cup \left\{\xi = \frac{we^{2\pi\gamma} - z}{e^{2\pi\gamma} - 1} : \gamma \in Y(\delta_1,\delta_2,\alpha,\beta)\right\}.$$

По терминологии [4] множество $L(z,w;\delta_1,\delta_2;\alpha,\beta)$ является *логарифмическим листом*.

Рассмотрим проекторы $P_\pm := (I \pm S)/2$. Для функций $a \in L_\infty(\Gamma)$ определим сингулярный интегральный оператор

$$R_a := aP_+ + P_-.$$

Обозначим через $PC(\Gamma)$ банахову алгебру кусочно непрерывных функций: функция $a \in L_\infty(\Gamma)$ принадлежит $PC(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда в каждой точке $t \in \Gamma$ существуют односторонние пределы

$$a(t \pm 0) := \lim_{\tau \to t \pm 0} a(\tau).$$

Существенным спектром оператора R_a называется множество

$$sp_{ess} R_a := \{\lambda \in C : R_a - \lambda I \quad \text{не нетеров} \quad \text{в } L_M(\Gamma)\}.$$

Описание этого спектра базируется на принципе И.Ц. Гохберга-Н.Я. Крупни (см. [2, гл. 1]), критерии нетеровости R_a в терминах факторизации коэффицие [8, теор. 5.6] и устанавливаемых в терминах индексов Бойда и индикаторных функ α_t, β_t условий ограниченности в пространстве $L_M(\Gamma)$ оператора $w_{t,\gamma} S w_{t,\gamma}^{-1} I$, где

$$w_{t,\gamma}(\tau) := \left|(\tau - t)^{\gamma}\right|, \quad t \in \Gamma, \quad \gamma \in C, \quad \tau \in \Gamma \setminus \{t\}.$$

Теорема 3. *Пусть для всех* $t \in \Gamma$ и $x \in R$

$$\alpha_t(x) := \alpha_M + min\{\delta_t^- x, \delta_t^+ x\}, \quad \beta_t(x) := \beta_M + max\{\delta_t^- x, \delta_t^+ x\}.$$

Если $a \in PC(\Gamma)$, *то*

$$sp_{ess} R_a = a(\Gamma \setminus \Lambda_a) \cup \bigcup_{t \in \Lambda_a} L(a(t-0), a(t+0); \delta_t^-, \delta_t^+; \alpha_M, \beta_M),$$

где $\Lambda_a := \{t \in \Gamma : a(t\text{-}0) \neq a(t\text{+}0)\}$. *В случае нетеровости* $\operatorname{Ind} R_a = -\operatorname{wind} a^{\#}_{\Gamma,M}$, $\operatorname{wind} a^{\#}_{\Gamma,M}$ *означает число витков вокруг нуля замкнутой непрерывной и естествен ориентированной кривой*

$$a^{\#}_{\Gamma,M} := a(\Gamma \setminus \Lambda_a) \cup \bigcup_{t \in \Lambda_a} L(a(t-0), a(t+0); \varphi_t, \varphi_t; \gamma, \gamma)$$

с фиксированными $\varphi_t \in [\delta_t^-, \delta_t^+]$, $\gamma \in [\alpha_M, \beta_M]$.

Из теоремы 2 следует, что условие (1) выполняется, если $\alpha_M = \beta_M$ и кривая Карлесона является логарифмической.

Пусть $\mathfrak{B}$ - алгебра линейных ограниченных операторов в $L_M^n(\Gamma)$, $\mathfrak{K}$ - иде компактных операторов в $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ банахову алгебру, порожден операторами умножения на кусочно непрерывные матрицы-функции $a \in PC^{n \times n}(\Gamma)$ оператором $S^{(n)} := \operatorname{diag}\{S, \ldots S\}$.

Исследование алгебры $\mathfrak{A}$ основано на применении локального принц Аллана-Дугласа (см. [2, гл. 1]), теоремы о двух идемпотентах [6,7] и теоремы 3, проводятся по аналогии с [3, 4, 8].

Теорема 4. (Символьное исчисление для сингулярных интеграль операторов). *Пусть для всех* $t \in \Gamma$ *и* $x \in R$ *выполнено* (1). *Рассмотрим "ту логарифмических листов"*

$$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_{\Gamma,M} := \bigcup_{t \in \Gamma} \left(\{t\} \times L(0,1; \delta_t^-, \delta_t^+; \alpha_M, \beta_M)\right).$$

(а) $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ *и фактор алгебра* $\mathfrak{A} / \mathfrak{K}$ *обратимо замкнута (непол в* $\mathfrak{B} / \mathfrak{K}$;

(б) *для каждой точки* $(t, \mu) \in \mathfrak{M}$ *отображение*

$$\sigma_{t,\mu} : \{S^n\} \cup \{aI^{(n)} : a \in PC^{n \times n}(\Gamma)\} \to C^{2n \times 2n},$$

определяемое равенствами

$$\sigma_{t,\mu}(S^{(n)}) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \quad \sigma_{t,\mu}(aI^{(n)}) = \tag{2}$$

$$= \begin{pmatrix} a(t+0)\mu + a(t-0)(1-\mu) & (a(t+0) - a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} \\ (a(t+0) - a(t-0))\sqrt{\mu(1-\mu)} & a(t+0)(1-\mu) + a(t-0)\mu \end{pmatrix},$$

где O и E – *нулевая и единичная* $n \times n$ *матрицы, расширяется до (непрерывного) гомоморфизма* $\sigma_{t,\mu} : \mathfrak{A} \to C^{2n \times 2n}$ *банаховых алгебр, ядро которого содержит идеал* $\mathfrak{K}$;

(в) *оператор* $A \in \mathfrak{A}$ *нетеров в* $L_M^n(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда* $\det \sigma_{t,\mu}(A) \neq 0$ *для всех* $(t, \mu) \in \mathfrak{M}$.

В (2) под $\sqrt{\mu(1-\mu)}$ понимается любое комплексное число, квадрат которого равен $\mu(1-\mu)$.

Для нетерова оператора $A \in \mathfrak{A}$ введем функцию

$$A_{\Gamma,M}(t, \mu) := \frac{\det \sigma_{t,\mu}(A)}{\det \sigma_{t,0}^{22}(A) \det \sigma_{t,1}^{22}(A)}, \quad (t, \mu) \in \mathfrak{M},$$

где $\sigma_{t,\mu}^{22}(A)$ - правый нижний $n \times n$ блок матрицы $\sigma_{t,\mu}(A)$. Через $A^{\#}_{\Gamma,M}$ обозначим непрерывную замкнутую естественно ориентированную кривую, получаемую из множества всех значений функции $A_{\Gamma,M}(\cdot, 0) \in PC(\Gamma)$ соединением точек $A_{\Gamma,M}(t \pm 0, 0)$ непрерывными кривыми

$$\{z = A_{\Gamma,M}(t, \mu) : \mu \in \mathfrak{L}(0,1; \varphi_t, \varphi_t; \gamma, \gamma)\}$$

с фиксированными $\varphi_t \in [\delta_t^-, \delta_t^+]$, $\gamma \in [\alpha_M, \beta_M]$.

Теорема 5. *Пусть для всех* $t \in \Gamma$ *и* $x \in R$ *выполнено* (1). *Если оператор* $A \in \mathfrak{A}$ *нетеров в пространстве* $L_M^n(\Gamma)$, *то* $0 \notin A_{\Gamma,M}(\mathfrak{M})$ *и* $\operatorname{Ind} A = -\operatorname{wind} A^{\#}_{\Gamma,M}$.

Теоремы 4 и 5 обобщают результаты работ [3, 8].

Литература

1. Сейфулаев Р.К. Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой, Матем. сборник **112** (1980) № 2, 147-161.
2. Böttcher A., Silbermann B. Analysis of Toeplitz Operators, Akademie Verlag, Berlin, 1989, and Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.
3. Böttcher A., Karlovich Yu.I. Toeplitz and singular integral operators on general Carleson Jordan curves, (to appear).

4. Böttcher A., Karlovich Yu.I. Toeplitz operators with PC symbols on general Carleson Jordan curves with arbitrary Muckenhoupt weights, (to appear).
5. David G. Operateurs integraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe, Ann. Sci. Ecole Norm. Super **17** (1984) 157-189.
6. Finck T., Roch S., Silbermann B. Two projections theorems and symbol calculus for operators with massive local spectra, Math. Nachr. **162** (1993) 167-185.
7. Gohberg I., Krupnik N. Extension theorems for Fredholm and invertibility symbols, Integr. Equat. and Oper. Theory **17** (1993) 514-529.
8. Karlovich A.Yu. Algebras of singular integral operators with piecewise continuos coefficients on reflexive Orlicz spaces, (to appear).
9. Maligranda L. Indices and interpolation, Dissert. Math. **234** (1985) 1-49.
10. Maligranda L. Orlicz spaces and interpolation, Sem. Math. 5, Dep. Mat., Univ. Estadul de Campinas, Campinas SP, Brazil, 1989.
11. Spitkovsky I. Singular integral operators with PC symbols on the spaces with general weights, J. Funct. Analysis **105** (1992) 129-143.

Операторы слабого интегрирования и дифференцирования

В.В. Кашевский (Минск, Беларусь)

Рассмотрим известные операторы дробного дифференцирования и интегрирования

$$\left(I^\alpha\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}};\quad \left(D^\alpha\varphi\right)(x)=\frac{d}{dx}\left(I^\alpha\varphi\right)(x). \tag{1}$$

Введем еще модифицированные операторы дробного дифференцирования

$$\left(\tilde{D}^\alpha\varphi\right)(x)=x^\alpha\left(D^\alpha\varphi\right)(x). \tag{2}$$

Обозначим $\varphi_\mu(x)=x^\mu$. Тогда

$$\left(\tilde{D}^\alpha\varphi_\mu\right)(x)=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)}\varphi_\mu(x), \tag{3}$$

где

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)}=a_\mu\sim\mu^\alpha,\ \mu\to+\infty. \tag{4}$$

Пусть

$$\left(D^{0,1}\varphi\right)(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_0^x\varphi(\tau)\,ln\frac{x}{x-\tau}d\tau\right). \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\left(D^{0,1}\varphi_\mu\right)(x)=\left(\psi(\mu+2)-\psi(1)\right)x^\mu, \tag{6}$$

где

$$\psi(\mu+2)-\psi(1)=b_\mu\sim ln\,\mu,\ \mu\to+\infty \tag{7}$$

Если сравнить (1) и (5), а также (4) и (7), то можно дать

Определение. *Оператор* $D^{0,1}$ *называется оператором слабого дифференцирования, а его обратный оператор называется оператором слабого интегрирования и обозначается* $I^{0,1}$.

Для того, чтобы построить оператор $I^{0,1}$, введем следующие простейшие операторы

$$\left(R_\alpha\varphi\right)(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\varphi(\tau)\left(\frac{\tau}{x}\right)^\alpha d\tau \tag{8}$$

и

$$\left(\tilde{R}_\alpha\varphi\right)(x)=x^{-\alpha-1}\int_0^x\varphi(\tau)\ \tau^\alpha d\tau. \tag{9}$$

Заметим, что