

Introdução à Lógica e à Matemática Discreta

1. Lógica proposicional e quantificadores.

Manuel Messias Rocha de Jesus

Departamento de Matemática

FCT NOVA

`mrj@fct.unl.pt`

2022-2023

- **Regras de Avaliação**

- ▶ Avaliação Contínua

- ▶ Frequência = 2/3 aulas teórico-práticas (16 num total de 24)
 - ▶ 2 testes

- ▶ Avaliação por exame Final

- ▶ Exame de Recurso

- ▶ Possibilidade de repetição de um dos testes na Época de Recurso

- **Datas de avaliação**

- ▶ Avaliação Contínua

- ▶ 1º Teste - 29/10/2022 às 10h (sábado)
 - ▶ 2º Teste - 21/12/2022 às 10h (quarta-feira)

- ▶ Avaliação por exame Final

- ▶ Exame de Recurso - / - /2023 às (-)

- **Horário de dúvidas**

- ▶ - Online via ZOOM

- ▶ terça-feira das 18h às 19h 30m.

- ▶ Quarta-feira das 18h às 19h 30m.

Programa

Introdução à Lógica e à Matemática Discreta

1. Lógica proposicional e quantificadores.
2. Estratégias de demonstração.
3. Operações, relações e funções.
4. Equipotência de conjuntos e cardinais.
5. Contagens.
6. Inteiros, divisores e primos.
7. Grafos.

Bibliografia

- 1 A. Eccles, P. J.; An Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press, 1997.
- 2 B. Vellement, D. J.; How To Prove It, A Structured Approach, Cambridge University Press, 1994.
- 3 Discrete Mathematics: Elementary and Beyond, L. Lovász, J. Pelikán, K. Vestergombi, Springer, 2003.
- 4 H. B. Enderton. Elements of Set Theory. Academic Press, 1977.
- 5 A. J. Franco de Oliveira. Teoria de Conjuntos. Livraria Escolar Editora, 1982.
- 6 P. R. Halmos. Naive Set Theory. Springer, 1998.
- 7 Y. Moschovakis. Notes on Set Theory. 2nd ed., Springer, 2006.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Os apontamentos que se seguem, assim como as fichas de exercícios, baseiam-se nos apontamentos dos meus colegas Cecília Perdigão, Isabel Cabral, Júlia Vaz de Carvalho, Vítor Hugo Fernandes e, na bibliografia indicada.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

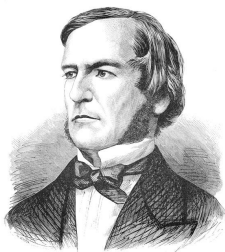
As origens da Lógica remontam a cerca de 3000 anos antes de Cristo.



(Figura extraída do livro "Introdução à Filosofia em banda desenhada" de Michael F. Patton e Kevin Cannon)

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

A lógica matemática tem origem na utilização do cálculo simbólico como forma de organização e expressão do raciocínio lógico. Os seus impulsionadores foram os matemáticos ingleses Boole e De Morgan.



1815-1864



1806-1871

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Expressões matemáticas com significado:

- **Termos, nomes ou designações:** indicam determinados *objetos matemáticos*: pontos, conjuntos, funções, operações, figuras geométricas, etc.

Exemplos: 7 , $3 + 4$, $(2 - \sqrt{5})^3$, $2 + 3i$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$.

- **Proposições:** exprimem *afirmações* - que podem ser *verdadeiras* (*valor lógico* V ou 1) ou *falsas* (*valor lógico* F ou 0) - a respeito dos mesmos objetos.

Exemplos:

$7 = 3 + 4$, $5 \leq 5$, $4 + 3i = 3 + 4i$, $3 + 2 < 2 + 3$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Dizemos que duas *designações* são **equivalentes** ou **sinónimas** se elas se referirem ao mesmo objeto. Nesse caso representamos esse facto escrevendo o sinal $=$ entre as duas designações.

Exemplos: $4 = 3 + 1$, $2^3 = 8$, $\ln e = 1$, $e^{i\pi} + 1 = 0$.

A lógica matemática adota como regras fundamentais do pensamento, os dois seguintes princípios (ou axiomas):

Princípio da não contradição. Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do terceiro excluído. Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa (isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro).

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Já vimos que temos apenas dois valores lógicos: V (ou 1) e F (ou 0). Designando por $\mathcal{L}$, o conjunto dos valores lógicos, temos $\mathcal{L} = \{V, F\}$ (ou $\mathcal{L} = \{1, 0\}$). Estamos assim a trabalhar com uma lógica **bivalente**.

De seguida vamos apresentar as operações lógicas fundamentais sobre proposições as quais estão submetidas às regras do cálculo proposicional.

Negação: converte uma dada proposição numa outra, que é verdadeira se a primeira é falsa, e falsa se esta é verdadeira. Na lógica simbólica a negação é indicada por anteposição do símbolo $\neg$ à proposição que se pretende negar.

Exemplos: $\neg(7 > 2)$, $\neg(2^2 = 8)$, $\neg(\ln e = 1)$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Podemos encarar a negação como uma operação unária em $\mathcal{L}$, ou seja, uma função de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{L}$. Assim $\neg : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ está definida por: $\neg V = F$ e $\neg F = V$. Podemos representar essa operação através de uma tabela, habitualmente chamada *tabela de verdade*:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Conjunção: operação lógica que aplicada a duas proposições, dá origem a uma nova proposição, que será verdadeira se as proposições dadas forem ambas verdadeiras (e só nesse caso). Na lógica simbólica a conjunção é indicada colocando o símbolo $\wedge$ entre as duas proposições.

Exemplos: $2 + 3 = 5 \wedge \sqrt{9} = 3$, $3 < -1 \wedge \sqrt{-4} = -2$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Podemos encarar a conjunção como uma operação binária em $\mathcal{L}$, à semelhança da adição e produto de números reais, ou seja, uma função de

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} := \{(V, V), (V, F), (F, V), (F, F)\}$$

(designamos $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ por **produto cartesiano** de $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}$ que é, por definição o **conjunto de todos os pares ordenados de elementos de $\mathcal{L}$**) em $\mathcal{L}$. Assim $\wedge : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ está definida por: $V \wedge V = V$, $V \wedge F = F$, $F \wedge V = F$ e $F \wedge F = F$. Podemos representar essa operação também através de uma tabela de verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Disjunção inclusiva: operação lógica que aplicada a duas proposições, dá origem a uma nova proposição, que será verdadeira se pelo menos uma das proposições dadas for verdadeira (podendo ser ambas verdadeiras). Na lógica simbólica a disjunção inclusiva é indicada colocando o símbolo $\vee$ entre as duas proposições.

Exemplos: $2 + 3 = 5 \vee \sqrt{9} = 2$, $3 < -1 \vee \sqrt{4} = -2$.

Assim $\vee : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ está definida por: $V \vee V = V$, $V \vee F = V$, $F \vee V = V$ e $F \vee F = F$ e a tabela de verdade correspondente é a seguinte:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Disjunção exclusiva: operação lógica que aplicada a duas proposições, dá origem a uma nova proposição, que será verdadeira apenas quando uma das proposições dadas for verdadeira e a outra for falsa. Na lógica simbólica a disjunção exclusiva é indicada colocando o símbolo $\dot{\vee}$ entre as duas proposições.

Exemplos: $2 + 3 = 5 \dot{\vee} \sqrt{9} = 3$, $3 < -1 \dot{\vee} \sqrt{4} = 2$.

Assim $\dot{\vee} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ está definida por: $V \dot{\vee} V = F$, $V \dot{\vee} F = V$, $F \dot{\vee} V = V$ e $F \dot{\vee} F = F$ e a tabela de verdade correspondente é a seguinte:

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Implicação (material): operação lógica que aplicada a duas proposições, dá origem a uma nova proposição, que só será falsa se a primeira for verdadeira e a segunda for falsa. Na lógica simbólica a implicação é indicada colocando o símbolo $\rightarrow$ entre as duas proposições.

Exemplos: $3^2 = 9 \rightarrow \sqrt{9} = 3$, $3 < -1 \rightarrow \sqrt{4} = 2$.

Assim $\rightarrow: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ está definida por: $V \rightarrow V = V$, $V \rightarrow F = F$, $F \rightarrow V = V$ e $F \rightarrow F = V$ e a tabela de verdade correspondente é a seguinte:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Atentemos agora nas seguintes proposições das quais é muito fácil determinar diretamente o seu valor lógico:

“ $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6”, “ $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3”.

Pela aritmética sabemos que todo o múltiplo de 6 é múltiplo de 3. Logo podemos afirmar que

$2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6 $\rightarrow$ $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3.

Neste exemplo a implicação material concorda com a implicação no sentido usual. Em casos como este, o sinal $\rightarrow$, que geralmente se lê “implica”, substitui com propriedade a palavra “se” (conjunção condicional), anteposta à proposição *antecedente*.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Por vezes, para salientar a implicação, em linguagem comum, antepõe-se a palavra “se” à proposição antecedente e a palavra “então” à proposição *consequente* escrevendo, neste caso específico,

Se $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 6, então $2^3 + 4^3$ é múltiplo de 3.

Dadas duas proposições p e q , se conseguimos averiguar, por um lado, que $p \rightarrow q$ é verdadeira e, por outro lado, que p é verdadeira, conclui-se imediatamente que q também é verdadeira. A *dedução lógica* ou *raciocínio lógico*, numa das suas formas mais simples e mais frequentes, consiste nisto.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Temos assim o seguinte esquema de raciocínio:

$$\begin{array}{ll} p & \rightarrow q \quad (\text{premissa maior}) \\ p & \quad (\text{premissa menor}) \\ \hline \therefore q & \quad (\text{conclusão}) \end{array}$$

Aqui o sinal $\therefore$ lê-se “logo” e indica que a proposição q se *deduz logicamente* das duas anteriores. Estas são designadas *premissas* do raciocínio (respetivamente *premissa maior* e *premissa menor*) enquanto a última é chamada *conclusão*. Na lógica tradicional um raciocínio deste tipo é denominado **silogismo condicional**, **regra de dedução** ou **modus ponens**.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Algumas vezes, a premissa menor é precedida da palavra “ora”, outras vezes é escrita simplesmente.

Exemplos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de 6, então } 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de 3.} \\ \text{Ora } 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de 6.} \\ \text{Logo } 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de 3.} \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se este livro tem uma folha dobrada, pertence-me.} \\ \text{Este livro tem uma folha dobrada.} \\ \text{Logo este livro pertence-me.} \end{array} \right.$$

Nota: uma dedução pode estar certa sem que as premissas sejam necessariamente verdadeiras. É óbvio que o facto de uma dedução ser correta não garante a verdade da conclusão.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Também pode haver deduções erradas. As deduções erradas de tipo elementar são chamadas *paralogismos*. Um tipo de paralogismo bastante frequente é o seguinte:

$$\frac{p \rightarrow q \quad q}{\therefore p}$$

Exemplos:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se este animal é um peixe, tem guelras.} \\ \text{Ora este animal tem guelras.} \\ \text{Logo é um peixe.} \end{array} \right.$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

De uma forma mais geral, designamos por **argumento** uma sequência finita de proposições organizadas da maneira seguinte

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q \quad (1)$$

onde $p_1, p_2, \dots, p_n$ são designadas as **premissas** (ou **hipóteses**) e q a **conclusão** (ou **tese**). Ao efetuar a leitura de (1) é usual inserir uma das locuções "*portanto*", "*por conseguinte*", "*logo*", etc., lendo-se, por exemplo, " $p_1, p_2, \dots, p_n$, *portanto*, q ". Para sugerir esta leitura usualmente utiliza-se a seguinte notação

$$\frac{p_1}{\vdots} \frac{p_n}{\therefore q}$$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Importa distinguir entre argumentos corretos ou válidos e argumentos incorretos ou inválidos ou falaciosos.

Definição

Um argumento

$$\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

*diz-se **correto** ou **válido** se a conclusão for verdadeira sempre que as premissas $p_1, \dots, p_n$ forem simultaneamente verdadeiras e diz-se **incorreto** ou **inválido** ou **falacioso** no caso contrário, isto é, alguma situação permitir que as premissas sejam todas verdadeiras e a conclusão falsa.*

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

A toda a proposição composta (constituída por proposições mais simples ligadas pelos conectivos lógicos e de acordo com as regras do cálculo proposicional) cujo valor lógico é sempre V , independentemente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem, chamamos **tautologia**. No caso do valor lógico da proposição composta ser sempre F dizemos que estamos perante uma **contradição**. Designamos por **contingência** uma proposição composta que não seja tautologia nem contradição.

O silogismo condicional que vimos anteriormente é a tautologia $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$, o que se pode confirmar facilmente através duma tabela de verdade (exercício).

O paralogismo referido anteriormente é a contingência $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$, o que se pode confirmar também facilmente através duma tabela de verdade (exercício).

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

No caso da proposição composta $p \rightarrow q$ ser verdadeira é suficiente que p seja verdadeira para podermos concluir que q também o seja. Nestas condições dizemos que p é **condição suficiente** para q .

Notemos ainda que a proposição p só é verdadeira quando q é verdadeira. Assim, é necessário que q seja verdadeira para p também o ser, isto é, q é **condição necessária** para p .

Dada uma implicação $p \rightarrow q$ temos que: $q \rightarrow p$ é a implicação **recíproca**, $\neg p \rightarrow \neg q$ é a implicação **contrária** e $\neg q \rightarrow \neg p$ é a implicação **contra-recíproca**.

Exemplos: Consideremos a implicação $2^2 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$.

- A recíproca é $2^4 = 16 \rightarrow 2^2 = 4$.
- A contrária é $2^2 \neq 4 \rightarrow 2^4 \neq 16$.
- A contra-recíproca é $2^4 \neq 16 \rightarrow 2^2 \neq 4$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Equivalência (material): operação lógica que aplicada a duas proposições, dá origem a uma nova proposição, que só será verdadeira se ambas as proposições tiverem o mesmo valor lógico. Na lógica simbólica a equivalência é indicada colocando o símbolo $\leftrightarrow$ entre as duas proposições.

Exemplos: $3^2 = 9 \leftrightarrow \sqrt{9} = 3$, $3 < -1 \leftrightarrow \sqrt{4} = -2$.

Assim $\leftrightarrow: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ está definida por: $V \leftrightarrow V = V$, $V \leftrightarrow F = F$, $F \leftrightarrow V = F$ e $F \leftrightarrow F = V$ e a tabela de verdade correspondente é a seguinte:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Numa equivalência verdadeira $p \leftrightarrow q$ temos que p é condição necessária e suficiente para q e, por sua vez, q é condição necessária e suficiente para p .

Analisando as tabelas de verdade da disjunção exclusiva e da equivalência verifica-se facilmente que a disjunção exclusiva é o contrário da equivalência, isto é,

$$(p \dot{\vee} q) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q).$$

Apresentamos de seguida diversas propriedades (*equivalências notáveis*) da conjunção e disjunção. No que se segue p , q e r são proposições arbitrárias e V (respetivamente, F) representa qualquer proposição verdadeira (respetivamente, falsa).

Propriedades da conjunção

1. A conjunção é *comutativa*, isto é, tem-se a seguinte equivalência:

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

2. A conjunção é *associativa*, isto é, tem-se a seguinte equivalência:

$$[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

3. V é *elemento neutro* da conjunção, isto é, tem-se a seguinte equivalência:

$$(p \wedge V) \leftrightarrow p$$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

4. F é *elemento absorvente* da conjunção, isto é, tem-se a seguinte equivalência:

$$(p \wedge F) \leftrightarrow F$$

Propriedades da disjunção

1'. A disjunção é *comutativa*, isto é, tem-se a seguinte equivalência:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

2'. A disjunção é *associativa*, isto é, tem-se a seguinte equivalência:

$$[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

3'. F é *elemento neutro* da disjunção, isto é, tem-se a seguinte equivalência:

$$(p \vee F) \leftrightarrow p$$

4'. V é *elemento absorvente* da disjunção, isto é, tem-se a seguinte equivalência:

$$(p \vee V) \leftrightarrow V$$

Propriedades mistas (da conjunção e da disjunção)

5. A conjunção é *distributiva a respeito da disjunção*:

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

5'. A disjunção é *distributiva a respeito da conjunção*:

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Através de tabelas de verdade demonstra-se facilmente estas propriedades (exercício). Analisando atentamente as propriedades anteriores vemos o seguinte:

As propriedades da conjunção e da disjunção são formalmente idênticas, isto é, passa-se duma para as outras apenas mudando “ $\wedge$ ” em “ $\vee$ ” e “ V ” em “ F ”. (Princípio da Dualidade Lógica)

Verifica-se facilmente que

$$\neg\neg p \leftrightarrow p, \text{ qualquer que seja } p$$

(Propriedade da Dupla Negação).

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Podemos definir a negação por meio da seguinte propriedade da conjunção e disjunção:

Qualquer que seja o valor lógico a existe sempre um valor lógico x , e um só, tal que

$$a \wedge x = F \text{ e } a \vee x = V.$$

Este valor x é precisamente o *contrário* de a ou seja $\neg a$, igual a F se $a = V$, igual a V se $a = F$. Teremos assim, para qualquer proposição p , que $p \wedge \neg p$ é uma contradição e $p \vee \neg p$ é uma tautologia.

Das tabelas de verdade também podemos deduzir as duas seguintes propriedades:

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q), \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

(Primeiras Leis de De Morgan:)

1. A negação da conjunção é equivalente à disjunção das negações.
2. A negação da disjunção é equivalente à conjunção das negações.

Assim, a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção. Desta forma, as leis de De Morgan explicam o já referido Princípio da Dualidade Lógica e mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação:

$$p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q), p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Apresentamos agora mais algumas equivalências notáveis que se podem facilmente demonstrar utilizando tabelas de verdade (exercício)

1. **Idempotência:** $(p \wedge p) \leftrightarrow p$ e $(p \vee p) \leftrightarrow p$
2. **Contra-recíproco:** $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
3. **Reescrita da Condicional:** $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Falámos anteriormente, a propósito da implicação, de uma regra de inferência que designámos por silogismo condicional.

Apresentemos agora mais algumas regras de inferência as quais podem ser facilmente demonstradas confirmando, através de tabelas de verdade, as tautologias associadas (exercício):

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Modus Tollens

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\therefore \neg p}$$

Tautologia $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$

Silogismo Hipotético

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{\therefore p \rightarrow r}$$

Tautologia $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow p \rightarrow r$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Silogismo Disjuntivo

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q} \quad \text{e} \quad \frac{p \vee q \quad \neg q}{\therefore p}$$

Tautologia

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q \quad \text{e} \quad [(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$$

Absorção

$$\frac{p \rightarrow q}{\therefore p \rightarrow (p \rightarrow q)}$$

$$\text{Tautologia } (p \rightarrow q) \rightarrow [p \rightarrow (p \rightarrow q)]$$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Dilema Construtivo

$$\begin{array}{ccc} p & \rightarrow & q \\ r & \rightarrow & s \\ p & \vee & r \\ \hline \therefore q & \vee & s \end{array}$$

Tautologia $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$

Introdução da Conjunção

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

Tautologia $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Dilema Destrutivo

$$\begin{array}{ccc} p & \rightarrow & q \\ r & \rightarrow & s \\ \neg q & \vee & \neg s \\ \hline \therefore \neg p & \vee & \neg r \end{array}$$

Tautologia $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$

Simplificação Conjuntiva

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p} \qquad \text{e} \qquad \frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

Tautologia

$$(p \wedge q) \rightarrow p \qquad \text{e} \qquad (p \wedge q) \rightarrow q$$

Eliminação da Disjunção

$$\frac{\begin{array}{ccc} p & \rightarrow & r \\ q & \rightarrow & r \\ p & \vee & q \end{array}}{\therefore r}$$

Tautologia $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \vee q)] \rightarrow r$

Adição Disjuntiva

$$\frac{p}{\therefore p \vee q} \quad e \quad \frac{q}{\therefore p \vee q}$$

Tautologia $p \rightarrow (p \vee q)$ e $q \rightarrow (p \vee q)$

Lei dos Casos

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg p \rightarrow q \end{array}}{\therefore q}$$

Tautologia $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)] \rightarrow q$

Redução ao Absurdo

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \rightarrow \neg q \end{array}}{\therefore \neg p}$$

Tautologia $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \rightarrow \neg p$

Eliminação da Negação

$$\frac{p \quad \neg p}{\therefore q}$$

Tautologia $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$

Eliminação da Dupla Negação

$$\frac{\neg \neg p}{\therefore p}$$

Tautologia $\neg \neg p \rightarrow p$

Introdução da Dupla Negação

$$\frac{p}{\therefore \neg\neg p}$$

Tautologia $p \rightarrow \neg\neg p$

Introdução da Bicondicional

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow p \end{array}}{\therefore p \leftrightarrow q}$$

Tautologia $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

Eliminação da Bicondicional

$$\frac{p \leftrightarrow q}{\therefore p \rightarrow q} \quad \text{e} \quad \frac{p \leftrightarrow q}{\therefore q \rightarrow p}$$

Tautologia

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) \quad \text{e} \quad (p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

Vamos abordar de seguida as **expressões com variáveis**.

Em lógica simbólica, chamam-se **variáveis** certos símbolos, geralmente letras (ou ainda letras munidas de índices, plicas, asteriscos, barras, etc.), que desempenham o papel de designações, sem serem propriamente designações: cada variável pode ter como valor qualquer elemento de um conjunto denominado o *domínio dessa variável*.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Dá-se o nome de *constantes* às designações propriamente ditas, isto é, aos símbolos ou expressões que têm um único valor (o designado).

Exemplo: na fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ temos que V , h e r são variáveis, cujo domínio é o conjunto dos reais positivos, enquanto os símbolos π , $\frac{1}{3}$ e 2 são constantes.

O uso das variáveis é estritamente regulado pelas duas seguintes normas, relativas à substituição de variáveis por constantes.

- 1. Se uma variável figura em mais de um lugar na mesma expressão, só podemos atribuir-lhe de cada vez um mesmo valor, em todos os lugares em que a variável figura na expressão.*
- 2. A variáveis diferentes é lícito atribuir um mesmo valor, desde que as variáveis tenham o mesmo domínio.*

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Distinguimos duas espécies de expressões com variáveis:

expressões designatórias - que se transformam em designações, quando as variáveis são substituídas por constantes;

Exemplos: $3n^2 + 5n$, com $n \in \mathbb{N}$; $xy - 7x$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

expressões proposicionais - também chamadas **funções proposicionais** - que se transformam em proposições, ao substituir as variáveis por constantes.

Exemplos: $2x < y$, com $x, y \in \mathbb{R}$; $n^2 + 3 = 7$, com $n \in \mathbb{N}$.

Chamamos **domínio de definição de uma expressão designatória**, com uma variável, ao conjunto dos valores do domínio da variável para os quais a expressão tem significado.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Por exemplo o domínio de definição da expressão designatória

$\frac{x}{x-1}$ é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Duas **expressões designatórias**, nas mesmas variáveis, dizem-se **formalmente equivalentes**, no domínio das respectivas variáveis, quando se transformam em designações equivalentes, para qualquer concretização das variáveis.

Para exprimir esse facto usamos o sinal $\equiv$ entre ambas.

Exemplos: $x^2 + 2x + 1 \equiv (x + 1)^2$, $(a - b)(a + b) \equiv a^2 - b^2$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Consideremos, com x variável real, as condições:

$$x + 3 > x, \quad x + 3 = x, \quad x^2 - 1 = 0.$$

A primeira dá sempre origem a uma proposição verdadeira, qualquer que seja o valor real pelo qual se substitua x . Uma condição assim diz-se uma **condição universal**. Em relação à segunda condição vemos que qualquer substituição da variável x , por um número real, dá sempre origem a uma proposição falsa. Uma condição em que sucede esta situação diz-se **impossível**. A última condição verifica-se para os reais -1 e 1 mas não se verifica, por exemplo, para o real 2 . Quando estamos perante esta situação dizemos que a condição é **possível** mas **não universal**.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

A condição $x = x$ é universal e a condição $x \neq x$ é impossível, qualquer que seja o domínio da variável x . Isto é uma consequência do **Axioma Lógico da Identidade** ($a = a$, qualquer que seja o ente a).

Note-se que a expressão $(x + y)^2 = x^2 + 2x + y^2$ é uma condição universal. Diremos, por isso, que as expressões $(x + y)^2$ e $x^2 + 2x + y^2$ são formalmente equivalentes e escreveremos:

$$(x + y)^2 \equiv x^2 + 2x + y^2$$

No entanto, note-se que esta fórmula é uma *proposição* (verdadeira), ao contrário da anterior que é uma condição, embora universal.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Duas **condições**, na mesma variável, dizem-se **formalmente equivalentes**, para um dado domínio dessa variável, quando se transformam em proposições equivalentes, para cada concretização da variável.

Utiliza-se o símbolo $\Leftrightarrow$ entre ambas para exprimir esse facto.

Exemplos: $2x < y \Leftrightarrow 2x - y < 0$, com $x, y \in \mathbb{R}$; n é múltiplo de 15 $\Leftrightarrow n$ é múltiplo de 3 e 5, com $n \in \mathbb{N}$.

São de uso corrente os seguintes princípios lógicos de equivalência (*regras de substituição*):

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

1º Princípio de equivalência. *Quando numa expressão, composta de várias expressões, substituímos uma destas por outra equivalente, obtemos ainda uma expressão equivalente à primeira.*

Exemplo Se na inequação $x^2 - 1 < 0$ substituirmos a expressão $x^2 - 1$ pela expressão equivalente $(x - 1)(x + 1)$ obtemos uma inequação equivalente.

2º Princípio de equivalência. *Quando, em duas expressões equivalentes entre si, substituirmos uma variável por qualquer outra expressão designatória, obtemos ainda duas expressões equivalentes entre si.*

Exemplo: Tem-se: $a = b + c \Leftrightarrow a - c = b$. Substituindo sucessivamente as variáveis a , b e c pelas expressões $5x$, 2 e $3x$, vem: $5x = 2 + 3x \Leftrightarrow 5x - 3x = 2$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Vamos de seguida estender as operações lógicas que definimos para proposições às expressões proposicionais com variáveis.

Dadas duas condições $p(x)$ e $q(x)$, designa-se por **conjunção das condições** $p(x)$ e $q(x)$, num dado domínio da variável x , e representa-se por $p(x) \wedge q(x)$, a condição que é apenas verificada pelos elementos do domínio de x que satisfazem *simultaneamente* as duas condições.

Exemplo: Em $\mathbb{R}$ a conjunção $x + 2y = 5 \wedge 2x - 5y = 1$ é equivalente à conjunção $x = 3 \wedge y = 1$ o que também se pode escrever:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Dadas duas condições $p(x)$ e $q(x)$, designa-se por **disjunção das condições** $p(x)$ e $q(x)$, num dado domínio da variável x , e representa-se por $p(x) \vee q(x)$, a condição que é apenas verificada pelos elementos do domínio de x que satisfazem *pelo menos* uma das duas condições.

Exemplos: Em $\mathbb{R}$ a disjunção $x = 3 \vee x = -5$ é equivalente à condição $x^2 + 2x - 15 = 0$. A disjunção $x = 3 \vee x < 3$ pode-se representar por $x \leq 3$.

Dada uma condição $p(x)$, designa-se por **negação da condição** $p(x)$, num dado domínio da variável x , e representa-se por $\neg p(x)$, a condição que é apenas verificada pelos elementos do domínio de x que não satisfazem $p(x)$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Exemplos: Em $\mathbb{R}$: $\neg(x < y)$ é equivalente a $x \geq y$, ou seja $\neg(x < y)$ é equivalente a $x = y \vee x > y$. Em qualquer domínio para as variáveis x e y : $\neg(x = y)$ é equivalente a $x \neq y$.

A negação de uma condição também se diz **contrária** ou **complementar** dessa condição.

Duas condições dizem-se **incompatíveis** se a sua conjunção for uma condição impossível; dizem-se **compatíveis** no caso contrário. É claro que duas condições contrárias são incompatíveis. Duas condições serão contrárias se são incompatíveis e se, além disso, a sua disjunção é condição universal.

A negação de uma condição universal é uma condição impossível e a negação de uma condição impossível é uma condição universal.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Exemplo: A negação da condição $x = x$ (universal) é a condição $x \neq x$ (impossível).

Não é difícil de demonstrar que as propriedades das operações sobre valores lógicos se transmitem automaticamente às operações sobre condições. Assim, a conjunção e disjunção continuam a ser *comutativas* e *associativas*, e cada uma delas *distributiva* em relação à outra. Mantém-se a *propriedade da dupla negação*, assim como as *primeiras leis de De Morgan*.

- *A conjunção de uma condição qualquer com uma condição universal é equivalente à primeira.*
- *A conjunção de uma condição qualquer com uma condição impossível é ainda impossível.*

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

A partir destas propriedades podemos deduzir mais duas propriedades por Dualidade Lógica, substituindo ‘conjunção’ por ‘disjunção’, ‘universal’ por ‘impossível’ e ‘impossível’ por ‘universal’.

Exemplos: Consideremos, em $\mathbb{R}$, as conjunções $2x - 1 > 3 \wedge x + 1 > x$, $2x - 1 > 3 \wedge x + 1 = x$. Como a condição $x + 1 > x$ é universal e a condição $x + 1 = x$ é impossível, teremos $2x - 1 > 3 \wedge x + 1 > x$ equivalente à condição $2x - 1 > 3$ e a condição $2x - 1 > 3 \wedge x + 1 = x$ equivalente a $x + 1 = x$.

De modo análogo temos $2x - 1 > 3 \vee x + 1 > x$ equivalente a $x + 1 > x$ e $2x - 1 > 3 \vee x + 1 = x$ equivalente a $2x - 1 > 3$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Dadas duas condições $p(x)$ e $q(x)$ dizemos que, num dado domínio da variável x , $p(x)$ **implica formalmente** $q(x)$ e escrevemos $p(x) \Rightarrow q(x)$ se, e só se, para qualquer concretização da variável x a implicação (material) resultante é verdadeira. A primeira condição diz-se *antecedente* e a segunda *consequente*.

Exemplo: Em $\mathbb{R}$, a condição $x > 5$ implica formalmente a condição $x \geq 5$.

Não é difícil constatar que várias propriedades da implicação (material) se transmitem automaticamente à implicação formal. Entre essas, indicaremos a *transitividade* e a *lei de conversão*:

Se $p(x) \Rightarrow q(x)$ e $q(x) \Rightarrow r(x)$, então $p(x) \Rightarrow r(x)$

Se $p(x) \Rightarrow q(x)$, então $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Da própria definição de implicação formal, resulta um dos tipos mais frequentes de silogismo, a que podemos chamar *silogismo condicional com variáveis*.

Exemplo: ‘Se x é um planeta, x não emite luz. Ora Marte é um planeta. Logo Marte não emite luz’.

Não é difícil deduzir que:

- i) *Uma condição impossível implica qualquer condição.*
- ii) *Qualquer condição implica uma condição universal.*
- iii) *Se uma condição implica outra, a segunda é possível se a primeira o for e a primeira é impossível se a segunda o for.*

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Dada uma condição numa variável, o símbolo $\forall$ referido a essa variável representa uma operação lógica que transforma a *condição* numa *proposição*, verdadeira ou falsa, conforme a condição é universal ou não. A esta operação dá-se o nome de **quantificação universal** e ao respetivo símbolo o de **quantificador universal**.

Exemplo: Por exemplo, tem-se em $\mathbb{R}$:

$$\forall_x [x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)].$$

A equivalência formal e a implicação formal de condições podem traduzir-se da seguinte forma

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

significa

$$\forall_x (p(x) \leftrightarrow q(x))$$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

e

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

significa

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)).$$

Dada uma condição sobre uma variável, o símbolo $\exists$ (referido a essa variável) representa uma operação lógica que transforma a *condição* numa *proposição*, que é verdadeira ou falsa, conforme a condição é possível ou impossível. Essa operação é chamada **quantificação existencial** e o respetivo símbolo, **quantificador de existência**.

Exemplo: Tem-se em $\mathbb{R}$: $\exists x(x \neq 3 \wedge x^2 = 9)$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Quando há um quantificador a incidir sobre uma variável, esta diz-se **aparente** ou **muda**; caso contrário, a variável diz-se **livre**.

Exemplo: A letra x é variável livre nas condições: $3x = -1$, $x + 2 > x$ mas é variável muda nas proposições: $\exists x(3x = -1)$, $\forall x(x + 2 > x)$.

Princípio da Substituição das Variáveis Aparentes.

Sempre que uma variável aparente é substituída, em todos os lugares que ocupa numa expressão, por outra variável que não figura na mesma expressão, obtém-se uma expressão equivalente.

Exemplo: $\forall x(x^2 \geq 0)$ é equivalente a $\forall y(y^2 \geq 0)$.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Dada uma condição numa variável, o **conjunto de verdade** da condição é o conjunto constituído por todos os elementos do domínio da variável para os quais a condição se converte numa proposição verdadeira.

Nas condições universais numa variável o conjunto de verdade coincide com o domínio da variável. O conjunto de verdade de uma condição impossível numa variável é o conjunto vazio.

Segundas leis de De Morgan

A negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial (seguido de negação) e vice-versa; ou ainda em símbolos:

$$\neg(\forall_x p(x)) \leftrightarrow \exists_x \neg p(x), \neg(\exists_x p(x)) \leftrightarrow \forall_x \neg p(x).$$

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

As segundas leis de De Morgan implicam um prolongamento do Princípio da Dualidade Lógica, revelando uma importante analogia entre os quantificadores e as operações de conjunção e disjunção. Atentemos no seguintes

Exemplos:

1. Sendo $U = \{4, 16, 21, 32\}$, a afirmação

$$\forall_{x \in U} (x \text{ é par})$$

corresponde a afirmar que

$$(4 \text{ é par}) \wedge (16 \text{ é par}) \wedge (21 \text{ é par}) \wedge (32 \text{ é par}),$$

que é uma proposição falsa pois 21 não é par.

2. Sendo $U = \{3, 15, 21\}$, a afirmação

$$\exists_{x \in U}(x \text{ é múltiplo de } 3)$$

corresponde a afirmar que

$$(3 \text{ é múltiplo de } 3) \vee (15 \text{ é múltiplo de } 3) \vee (21 \text{ é múltiplo de } 3),$$

que é uma proposição verdadeira.

Num universo finito, o quantificador universal equivale a conjunções sucessivas e o quantificador existencial a disjunções sucessivas.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Consideremos agora, no universo $\mathbb{N}$, a expressão:

$$\exists_{n \in \mathbb{N}}(an = b)$$

a qual é uma condição nas variáveis livres a e b , equivalente a dizer ' a divide b '. É esta, aliás, a definição usual do termo 'divide':

$$a \text{ divide } b \Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}}(an = b)$$

Dada uma condição com mais de uma variável, a aplicação dum quantificador referido a uma dessas variáveis, transforma a condição dada numa outra condição com menos uma *variável livre*.

A aplicação sucessiva de quantificadores acaba por transformar uma condição com mais de uma variável numa proposição.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Mais exemplos de quantificação múltipla:

1. A proposição

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} (xy = yx)$$

é uma proposição verdadeira que traduz a propriedade comutativa da multiplicação, em $\mathbb{R}$, e que também pode ser escrita na forma

$$\forall_{y \in \mathbb{R}} \forall_{x \in \mathbb{R}} (xy = yx)$$

ou ainda

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} (xy = yx).$$

A troca da ordem de dois, ou mais, quantificadores do mesmo tipo, isto é, todos universais ou todos existenciais, conduz sempre a proposições equivalentes.

2. Consideremos agora as proposições

$$\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \exists_{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} (xy = 1 = yx)$$

e

$$\exists_{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} (xy = 1 = yx).$$

Embora a primeira proposição seja verdadeira, pois exprime a existência de um inverso para todo o real não nulo, a segunda é falsa (não existe um real não nulo que seja inverso de qualquer real não nulo).

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Em $\mathbb{N}$, a condição $n^2 = 9$ é possível e o seu conjunto de verdade é o conjunto singular $\{3\}$. A expressão desse facto através do quantificador existencial

$$\exists_{n \in \mathbb{N}}(n^2 = 9)$$

revela-se insuficiente pois não exprime a unicidade da solução da equação $n^2 = 9$ em $\mathbb{N}$.

Nestes casos devemos utilizar o que se designa por **quantificador de existência e unicidade** que se representa por $\exists^1$ (lê-se “existe um e um só”). Esse quantificador, aplicado a uma variável de uma condição, nessa única variável, transforma a condição numa proposição verdadeira apenas no caso de existir um *único valor* do domínio da variável que satisfaça essa condição.

ILMD - 2022 - 1. Lógica proposicional e quantificadores.

Antes de encerrarmos o assunto sobre quantificadores convém analisar expressões em que a quantificação aparece com o domínio restringido. Estamos a pensar, por exemplo, em proposições como $\exists_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} (3x = 1)$ ou então $\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} (x^2 > 0)$.

Estas duas proposições significam respetivamente o mesmo que $\exists_{x \in \mathbb{R}} (x \neq 0 \wedge 3x = 1)$ e $\forall_{x \in \mathbb{R}} (x \neq 0 \rightarrow x^2 > 0)$.

Apesar de serem estas as formas que se revelam mais fecundas, em particular quando efetuamos raciocínios, é tradicional utilizar as notações, que lembram mais diretamente a origem enquanto quantificação com domínios restringidos, sem deixar de ter presente que o significado é o das formulações anteriores.