Impacto do uso de diferentes representações sobre a aprendizagem de funções

Helena Rocha

O uso de representações é algo inevitável quando ensinamos Matemática, independentemente do nível ou da temática que estamos a abordar. Por mais simples que seja a ideia de que estamos a falar, inevitavelmente recorremos a algum tipo de representação. E temos diversas representações disponíveis. A representação algébrica é normalmente a mais valorizada, mas a sua aprendizagem com compreensão requer a utilização de outras representações. Contudo, aprender Matemática é mais do que aprender uma linguagem algébrica. Aprender Matemática é (ou deveria ser) principalmente sobre a compreensão de conceitos. É por isso que o recurso a diferentes representações pelo professor é reconhecido como fundamental: porque pode oferecer aos alunos um olhar significativo sobre os conceitos; ou, como refere Kaput (1989), porque a ligação entre diferentes representações cria uma visão global que é mais do que a junção de conhecimentos sobre cada uma das representações.

Entre os diversos recursos que os professores podem utilizar nas suas aulas, existe um que oferece acesso fácil e rápido a diferentes representações: a tecnologia. Consideremos o ensino de funções e uma tecnologia como uma calculadora gráfica ou o GeoGebra. Uma das funcionalidades destas tecnologias é permitir o acesso a diferentes representações, em geral designadas por numéricas ou tabulares, algébricas ou simbólicas, e gráficas. Esta funcionalidade permite aos professores estabelecerem ou reforçarem articulações de uma forma que não seria possível sem ela, promovendo o desenvolvimento de uma melhor compreensão das funções, do conceito de variável e da capacidade de resolução de problemas. Porém, essas três representações amplamente utilizadas no estudo de funções possuem características e potencialidades diferentes.

Segundo Friedlander e Tabach (2001), a representação numérica foca-se em casos específicos e, como tal, pode ser útil para promover a compreensão dos alunos numa fase inicial. No entanto, a sua falta de generalidade pode impedir os alunos de obter uma imagem global da função em questão. E um foco excessivo em casos específicos pode constituir um obstáculo à identificação de regularidades e relações pelos alunos.

A representação gráfica fornece uma representação visual. Esta é uma representação habitualmente assumida como mais intuitiva e particularmente apelativa para os alunos (Friedlander & Tabach, 2001). O seu uso é mais universal, pois não depende do conhecimento algébrico dos alunos. No entanto, pode carecer de precisão e ser influenciado por fatores externos, como a janela de visualização utilizada e a interpretação que é feita. Tal como no caso da representação numérica, neste caso apenas uma parte do domínio da função é visível, embora uma parte significativamente maior. Como consequência, a utilidade da representação gráfica depende das circunstâncias.

"A representação algébrica é concisa, geral e eficaz na apresentação de padrões e modelos matemáticos" (Friedlander & Tabach, 2001, p. 174). Sendo a manipulação algébrica, por vezes, a forma de justificar ou provar afirmações, o uso exclusivo da representação algébrica pode dificultar a compreensão de conceitos matemáticos e originar dificuldades de interpretação por parte dos alunos. Por serem mais intuitivas, as representações numéricas e gráficas podem favorecer o desenvolvimento da compreensão dos conceitos, apresentando-os aos alunos de forma mais próxima daquela em que foram desenvolvidos. E a fluência com múltiplas representações pode dar aos alunos a oportunidade de compreender noutra representação o que não foi possível compreender na primeira representação, permitindo-lhes alcançar uma compreensão mais profunda dos conceitos. E esta é a principal razão para usar representações diferentes. Como destaca Ford (2008), não se trata de utilizá-las simplesmente porque a tecnologia facilita o acesso, mas sim porque é necessário para promover a compreensão dos alunos.

No entanto, embora passar de uma representação para outra possa ajudar os alunos a desenvolver uma visão sobre os conceitos envolvidos, esse não é um processo fácil. Como tal, o papel do professor assume particular importância. Mas alguns estudos sugerem que os professores nem sempre dedicam a devida atenção à flexibilidade necessária para passar de uma representação para outra e articular toda a informação fornecida por estas (Even, 1998). A verdade é que, por vezes, os professores não estão realmente conscientes da forma como utilizam as diferentes representações e do impacto que as suas escolhas têm na aprendizagem dos alunos.

Zbiek et al. (2007) falam da fluência representacional como a capacidade de passar de uma representação para outra, transportando o conhecimento de uma entidade para outra e articulando-o com o novo conhecimento disponibilizado pela nova representação. Mas também enfatizam o conhecimento da representação mais adequada, em determinadas circunstâncias, para ilustrar um determinado conceito. E embora muitos autores destaquem a transição entre representações quando falam em fluência representacional, outros também se referem às transformações dentro de uma mesma representação. Isto significa não só prestar atenção à transição de uma representação para outra, mas também às transições dentro da mesma representação (Rocha, 2016). Assim, é possível falar, por exemplo, de uma transição de uma representação algébrica para uma representação gráfica, e de uma transição dentro de uma representação gráfica. Esta última transição pode acontecer em circunstâncias em que, ao desenhar um gráfico de uma função quadrática, obtemos algo semelhante a uma reta (figura 1). Para obter uma parábola no ecrã da tecnologia que estamos a utilizar, a janela de visualização precisa de ser alterada (figura 2). Ao fazer isso, passamos de um gráfico para outro. Este é, portanto, um exemplo de transição dentro da mesma representação. Numa circunstância como esta, alguns alunos aceitam a representação gráfica da figura 1 como o gráfico de y=0,2(x+5)(x-40). E mesmo sabendo que o gráfico de uma função polinomial de 2.º grau é uma parábola, enfrentam alguma dificuldade em articular a informação fornecida pela tecnologia e pelos seus conhecimentos matemáticos. Num estudo que realizei há alguns anos (Rocha, 2000), uma aluna adapta os seus conhecimentos, para evitar o conflito, afirmando que "o gráfico de uma função polinomial de 2.º grau geralmente é uma parábola". Note-se que esta é uma situação que os alunos usualmente não enfrentam quando a tecnologia não está disponível. É também uma situação que exige um conhecimento matemático diferente. A ideia de que qualquer curva pode ser representada como uma linha reta é algo que, de alguma forma, vai contra a nossa intuição. Mas vejamos novamente a figura1. É uma linha próxima da vertical. Será possível obter uma representação gráfica dessa função, mostrando a mesma interseção com o eixo x, mas parecendo uma linha horizontal? Tire um momento para experimentar antes de olhar para a figura 3. É como se pudéssemos fazer um gráfico ter a aparência que desejamos! Saber que isso é possível e saber como fazê-lo dá-nos um conhecimento sobre gráficos e escalas que nunca conseguiríamos sem o apoio da tecnologia. É preciso aprender além do que era possível antes da tecnologia.

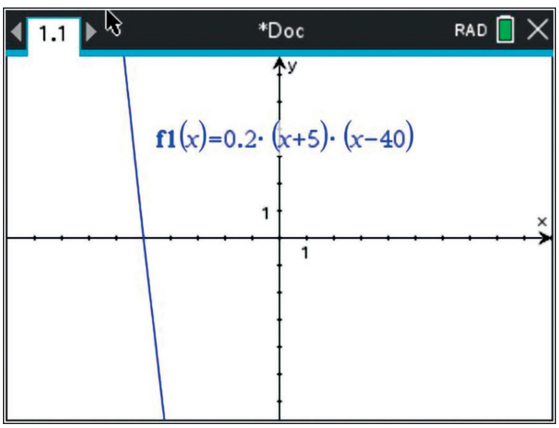


Figura 1. f_1(x)=0.2(x+5).(x-40), x∈[-10, 10] ∧ y∈[-6.6, 6.6]

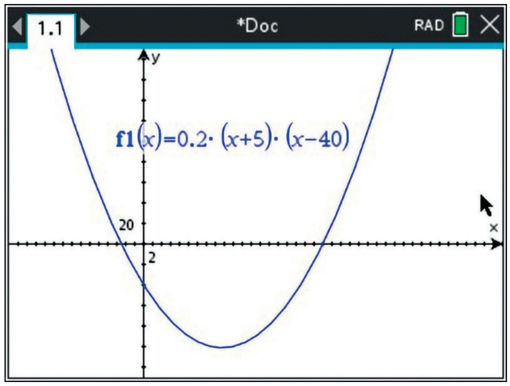


Figura 2. y=0.2(x+5)(x-40), x∈[-30, 80] ∧ y∈[-130, 190]

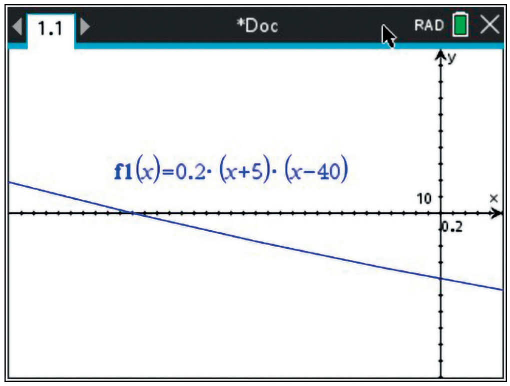


Figura 3. y=0.2(x+5)(x-40), x∈[-7, 1]∧ y∈[-100, 100]

Mas pensemos em passar de uma representação para outra diferente. Na situação 1, os alunos começam a utilizar a representação algébrica e passam para uma representação gráfica. Depois pedem à tecnologia o valor da função num determinado momento, o zero da função, e consideram uma segunda função constante e pedem os pontos de intersecção. Isso significa que eles começam por uma representação algébrica, passam para uma representação gráfica e depois para representações numéricas.

Situação 1

Colónia de bactérias

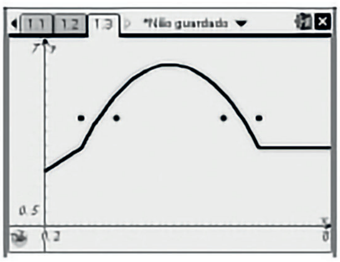
Num laboratório, foi estudada uma colónia de bactérias. Às oito horas, foi feita a primeira contagem e as seguintes de hora a hora. Verificou-se que o número *N* de bactérias, em milhares, decorridas *h* horas, é dado por

$$N(h) = -h^2 + 4h + 9.$$

1. Quantas bactérias havia às 8 horas?
2. Qual foi o resultado da segunda contagem?
3. Calcula N(2) – N(1) e interpreta o resultado no contexto do problema.
4. A que horas se extinguiu a colónia?
5. Em que período do dia o número de bactérias foi superior a 9000?
6. E em que período foi inferior a 4000?
7. Descreve a evolução da colónia desde as 8 até às 13 horas.

(Costa & Rodrigues, 2010, p. 118)

Na situação 2, os alunos partem de uma representação gráfica dos pontos (as bandeiras do slalom), passam para uma representação algébrica de uma função que acreditam verificar as condições, e passam depois para uma representação gráfica para verificar se aquela função pode corresponder ao percurso do esquiador. Iniciam assim um ciclo em que vão alternando entre representações algébricas e gráficas (se necessário), até conseguir encontrar uma função adequada.

> Situação 2
>
> ***Slalom***
>
> Nas provas de Slalom, o esquiador tem de fazer um percurso contornando bandeiras ou passando entre duas bandeiras que formam uma porta.
>
> 1. Define uma janela com $x \in [-1,8]$ e $y \in [-1,7]$. Representa os pontos (1,4), (2,4), (5,4) e (6,4) que serão as bandeiras do Slalom.
> 2. Descobre uma trajetória do esquiador que seja definida por uma função quadrática e que passe nas duas portas sem tocar nas bandeiras.
> 3. O público que assiste à prova ocupa a zona do plano definida por $y \geq 6$.
>
>   Descobre uma nova trajetória quadrática do esquiador que não passe pelo público.
> 4. Na figura seguinte está representada a trajetória realizada pelo campeão suíço que venceu este Slalom. Encontra a expressão de uma função por ramos com esta representação.
>
> 
>
>
> Grupo T3 (2014)

Do ponto de vista da aprendizagem matemática, estas situações são muito diferentes. Na primeira, a representação algébrica está disponível no enunciado da tarefa, e para obter a representação gráfica basta carregar num botão (no caso da calculadora gráfica). Depois, temos que compreender a questão para saber que comando escolher. Na segunda situação necessitamos de conhecimentos sobre a expressão de uma função quadrática e sobre a relação entre representações gráficas e algébricas. Sem esse conhecimento não conseguiríamos avançar uma primeira tentativa. Depois de observar o gráfico dessa primeira tentativa, é necessário entender como devemos alterar a expressão algébrica. Nesta situação a representação numérica não é levada em consideração. Um professor com preferência por um destes tipos de situações promoverá nos seus alunos uma aprendizagem diferente da de um professor com preferência por outro tipo de situações ou de um professor que diversifique o tipo de situações exploradas. Ou seja, as tarefas escolhidas pelo professor e as representações que estas envolvem influenciam a aprendizagem matemática dos alunos.

A diferença entre as formas de utilização das representações é uma questão importante e com sério impacto na aprendizagem matemática dos alunos. Alguns estudos, como o realizado por Molenje e Doerr (2006) e um outro realizado por mim (Rocha, 2016), sugerem que o uso de representações algébricas e gráficas é dominante. Mas as conclusões também apontam para outro aspeto relevante. Quando os professores utilizam efetivamente as três representações, é possível identificar um padrão na forma como o fazem. Alguns professores tendem a começar por uma representação algébrica, passando depois para uma representação gráfica e, por fim, para uma representação numérica. Outros professores tendem a passar da representação algébrica para uma numérica e só depois para uma representação gráfica. Ou seja, é possível identificar diferentes padrões possíveis, mas cada professor tende a adotar um desses padrões e a usá-lo repetidamente. Essa sequência rígida adotada pelo professor tende a ser copiada pelos alunos que, consequentemente, não conseguem desenvolver a desejada fluência na transição entre representações. Estas conclusões sugerem, pois, que é importante prestar atenção à forma como o professor equilibra as diferentes representações, mas também à forma como o professor as articula.

Kendal e Stacey (2001) utilizam a palavra *privilegiar* para descrever as escolhas do professor relativamente às opções assumidas durante o processo de ensino e aprendizagem. Este conceito inclui as opções do professor relacionadas com a sua prática, incluindo, nomeadamente, quais as representações que são (intencionalmente ou não) preferidas e quais são ignoradas. Aquilo que é privilegiado reflete as crenças e o conhecimento do professor sobre a natureza da matemática e sobre como esta deve ser ensinada. Assim, é importante saber como o professor privilegia certas opções e desvaloriza outras, ou seja, é importante saber se algumas representações são preferidas relativamente a outras e se existe um padrão na forma como o professor escolhe passar de uma representação para outra.

Há ainda outro ponto interessante que podemos discutir relativamente às representações de funções. Muitos autores (embora não todos) falam em representação numérica ou tabular como uma só representação, mas será que são mesmo? Quando trabalhamos com papel e lápis e calculamos alguns valores de uma função, acabamos por os registar numa tabela. Isto torna difícil distinguir entre uma representação numérica e uma representação tabular. Mas o que acontece quando temos acesso a uma tecnologia como uma calculadora gráfica? Nesta tecnologia, podemos utilizar trace ou solicitar valores numéricos específicos. Também podemos pedir uma tabela, indicando o valor inicial e o incremento pretendido. Mas parece que quando temos a tecnologia disponível deixamos de o fazer. Pelo menos é essa a conclusão de um estudo que sugere que as tabelas são usadas ao nível do 3.º ciclo, mas não tanto ao nível do ensino secundário (Viseu & Rocha, 2018). E do ponto de vista da aprendizagem matemática, é a mesma coisa olhar para um gráfico e pedir o valor máximo da função, e procurar esse máximo numa tabela (ajustando o valor inicial da tabela e o incremento se necessário)? Deveríamos falar nas quatro representações disponíveis numa calculadora gráfica? Estaremos a impedir que os nossos alunos alcancem uma compreensão mais profunda das funções quando nunca usamos uma representação tabular? Acho que sim. Cada vez que optamos por privilegiar uma (ou algumas) representações em detrimento de outra(s) e cada vez que optamos por adotar um padrão ao passar de uma representação para outra numa ordem específica, estamos a impedir que os nossos alunos vejam o todo e desenvolvam uma compreensão global dos conceitos; consequentemente, estamos a limitar a sua aprendizagem. Já alguma vez tinha pensado nisso? Como usa as representações com os seus alunos quando está a ensinar funções?

Referências

Costa, B., & Rodrigues, E. (2010). *Novo Espaço 10 – parte 2*. Porto: Porto Editora.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behaviour, 17*(1), 105-121.

Ford, S. (2008). T*he effect of graphing calculators and a three-core representation curriculum on college students' learning of exponential and logarithmic functions.* PhD Thesis, North Carolina State University. https://repository.lib.ncsu.edu/items/dbf6bdf3-9136-4260-9831-0b12f46c811a

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), T*he roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). NCTM.

Grupo T3 (2014). Problemas e investigações com tecnologia. APM.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). NCTM.

Kendal, M., & Stacey, K. (2001). Influences on and factors changing technology privileging. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 217-224). PME.

Molenje, L., & Doerr, H. (2006). High school mathematics teachers' use of multiple representations when teaching functions in graphing calculator environments. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (eds.), *Proceedings of the 28th PME-NA*. Universidad Pedagógica Nacional - México.

Rocha, H. (2000). A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário. Tese de mestrado. Universidade de Lisboa. APM.

Rocha, H. (2016). Teacher's representational fluency in a context of technology use. *Teaching Mathematics and its Applications, 35*(2), 53-64.

Viseu, F. & Rocha, H. (2018). Perceptions of mathematics teachers on the teaching of functions and on the use of technological materials – Perceções de professores de matemática sobre o ensino de funções e sobre o uso de materiais tecnológicos. *Educação Matemática Pesquisa, 20*(2), 113-139.

Zbiek, R., Heid, M., Blume, G., & Dick, T. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). NCTM.

Helena Rocha

CICS.NOVA, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa