O FORMAL DA MATEMÁTICA E O INTUITIVO DA TECNOLOGIA: QUE ARTICULAÇÃO?[1]

Helena Rocha
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa
hcr@fct.unl.pt

Resumo

A tecnologia é cada vez mais indispensável no dia-a-dia, rodeando-nos constantemente. Para os nossos alunos é uma realidade que conhecem desde sempre e que tendem a encarar com uma naturalidade descontraída e intuitiva. A facilidade de acesso à tecnologia e o modo como esta tende a enfatizar o intuitivo e a relegar para segundo plano o formal e a demonstração matemática são o foco deste artigo. Partindo da análise de uma proposta de trabalho onde alunos de 10.º ano começam por uma abordagem intuitiva apoiada na calculadora gráfica e terminam a realizar uma demonstração da conjectura que formularam, procuro discutir a problemática. As conclusões alcançadas sugerem que é possível colocar aos alunos situações onde estes se podem aperceber da vantagem de recorrer tanto a abordagens mais formais como a abordagens mais intuitivas e isto mesmo quando a tecnologia é uma realidade em sala de aula. Sugere ainda que a realização de demonstrações pode, entre outros aspectos já identificados na literatura, dar um contributo importante para a compreensão de aspectos basilares da Matemática.

Palavras chave: cálculo algébrico, demonstração, tecnologia

Introdução

A tecnologia é cada vez mais indispensável no dia-a-dia, rodeando-nos constantemente. Para os nossos alunos é uma realidade que conhecem desde sempre e que tendem a encarar com uma naturalidade descontraída e intuitiva. Movimentam-se livremente entre conteúdos e aplicações, de dedo colado ao ecrã. Sem receios, experimentam e testam limites, arriscando avançar por novos mundos. Se o professor lhes proporciona um meio propício, aventuram-se na exploração do universo matemático, experimentando, formulando conjecturas e construindo ideias matemáticas. Um

[1] Trabalho desenvolvido no âmbito do projecto A noção da demonstração matemática (PTDC/MHC-FIL/5363/2012) financiado pela FCT/MEC.

ambiente de aprendizagem ao seu dispor, onde programas de geometria dinâmica facilmente permitem descobrir relações geométricas e experimentar muitos casos, deixando-os convictos de mais uma relação matemática; ou onde as calculadoras gráficas lhes permitem observar com toda a rapidez e conforto o gráfico de imensas funções e inferir uma qualquer propriedade que estas partilham. Este é um cenário onde a aprendizagem apela à compreensão das relações envolvidas, mas onde o intuitivo é um elemento preponderante. E a questão acaba por surgir inevitavelmente. Como conseguir depois enquadrar nesta abordagem o formalismo da Matemática e a importância da demonstração? Como conseguir que os nossos alunos sintam que o cálculo matemático, podendo não ser tão intuitivo e rápido como a tecnologia que eles bem conhecem, também tem uma importância incontornável?

Neste artigo vou procurar abordar estas questões partindo de uma situação concreta que envolve em simultâneo as duas abordagens. Trata-se de uma situação que ocorreu com uma turma do 10.º ano de escolaridade no âmbito do estudo de funções. A tecnologia envolvida, e que os alunos já estavam habituados a usar livremente, era a calculadora gráfica.

A professora e a tarefa

Entre as várias tarefas que propôs aos seus alunos ao longo do estudo das funções, Teresa, a professora da turma, escolheu esta (ver anexo), centrada numa investigação em torno do eixo da parábola. Trata-se de uma proposta de trabalho onde pretende que os alunos comecem por explorar uma situação matemática para formular uma conjectura relativamente à relação existente. Depois é pedido aos alunos que demonstrem a veracidade da sua conjectura. A tarefa termina com uns desafios que pretendem levar o trabalho dos alunos um pouco mais além.

Nesta secção apresento sucintamente a forma como decorreu a realização desta tarefa e os elementos centrais que conduziram às opções assumidas pela professora. Para tal, baseio-me nos dados provenientes da gravação da aula e das notas de campo que elaborei, mas também nas duas entrevistas que realizei à professora e que decorreram antes e depois da aula.

Teresa começa a aula apresentando a tarefa aos alunos e dando algumas indicações relativamente à forma como esta vai ser realizada. Informa, nomeadamente, que esta vai ser realizada a pares, destacando bastante este aspecto do trabalho, valorizando a importância dos contributos que cada aluno pode trazer ao trabalho conjunto. Acrescenta que no final da aula recolherá os registos efectuados por um elemento de cada par, que levará para ver em casa.

Após este momento inicial, dá atenção ao funcionamento da calculadora, dando algumas indicações sobre o seu funcionamento, que considera que os alunos vão necessitar no decorrer da tarefa. Conclui este momento inicial referindo as expectativas que tem para a aula e fazendo alguns comentários mais concretos relativamente a cada uma das questões da tarefa. Refere assim as questões que considera fáceis, as que entende poderem ser consideradas mais difíceis e o ponto até onde pretende que todos façam:

> Prof- O objectivo de cada par é fazer tudo até ao ponto 6. Até ao ponto 5 eu acho que é fácil. Devem fazer bem, o mais depressa que conseguirem. O 6 já não será tão fácil, (…) nesta ficha no ponto 6 pretende-se que se prove. Eu penso que a prova não é muito difícil e portanto tenho alguma esperança que muitos consigam fazer a demonstração. O "indo mais longe", que vem nos pontos 7 e 8, também tenho esperança que dois ou três pares ainda consigam fazer. O ponto 7 e o 8 se algum conseguir é óptimo porque eu não tenho esperança que façam, que tenham tempo aqui na aula, mas tenho esperança que depois façam em casa. Portanto, o objectivo é todos fazerem até ao 6, incluindo a demonstração, alguns fazerem o 7 e quem sabe… (aula)

Termina este primeiro momento de abordagem à tarefa em grande grupo, focando a demonstração e a respectiva importância em Matemática:

> Prof- O 6 (…) é uma demonstração e eu gostava de falar um bocadinho sobre isto. (…) Em Matemática nós muitas vezes experimentamos. Já fizemos isso aqui com as funções. Estudámos famílias de funções e depois, das duas uma, ou o professor dá alguma informação a dizer isso é mesmo verdade em todos os casos e vocês acreditam, também consultam o livro etc., e às vezes provamos. Fazemos aquilo que os matemáticos fazem sempre. Em Matemática a prova, a demonstração, é a essência da disciplina, portanto não podemos esquecê-la. (aula)

A partir deste momento, toda a aula decorre centrada no trabalho dos alunos, com a professora a circular entre os grupos e a corresponder às suas solicitações.

Quando os alunos começam a formular as primeiras conjecturas, a professora apercebe-se do reduzido número de exemplos que estes estão a ter em conta para as formular e sente necessidade de lhes chamar a atenção para isso. No entanto, os alunos não parecem muito sensíveis aos comentários que faz e só a dúvida que Teresa coloca sobre a veracidade da conjectura que formularam parece ser suficiente para que estes decidam analisar mais alguns casos:

> Prof- Estão a formular uma conjectura apenas com base em dois exemplos?
>
> Aluno- Oh stora, mas nós já vimos.
>
> Prof- E então o que é que repararam?
>
> Aluno- Que corresponde à multiplicação, só que tem que ser menos este vezes este. (…) Tem que ser menos, depois abre parênteses, -5 vezes 3.
>
> Prof- Ok, óptimo. É a vossa conjectura.
>
> Aluno- (…) Mas assim dá -15. Está mal. Por isso é que eles dizem a seguir se os pontos estiverem do mesmo lado do eixo. Não é stora?
>
> Prof- Não sei. (…) Só experimentaram com dois exemplos, estão a tirar as conclusões apenas com dois… podem fazer mais, se estão com dúvidas. Depois confirmam se isso que estão a fazer está certo ou não.
>
> Aluno- É quantos pares, stora?
>
> Prof- Numa investigação não há limite. Fazem alguns, quando conseguirem tirar a conclusão… dois é bem pouco para fazer. Acho eu, não é? (aula)

Contudo este não é um comportamento generalizado na turma. Alguns pares de alunos parecem assumir que, pelo contrário, quantos mais exemplos analisarem melhor. Ainda assim, parecem sentir algum desconforto por não lhes ser indicada uma quantidade, pelo que procuram alguma orientação junto da professora:

> Aluna- Eram quantos [exemplos] stora?
>
> Prof- É os que quiserem.
>
> Aluna- Os que quisermos. Quantos mais melhor… (aula)

Mas em alguns casos, independentemente do número de exemplos considerado, a conjectura parece ser formulada de uma forma algo irreflectida, levando Teresa a questionar os alunos de modo a que estes sintam a necessidade de ponderar melhor a conclusão a que chegaram:

> Aluno- Já concluí uma coisa. A ordenada na origem é sempre o x1×x2 e depois o declive do segmento é a diferença entre um e outro.
>
> Prof- x1×x2? Então quando é que é 3×(-5)?
>
> Aluno- Não.
>
> Prof- Diz lá, quanto é que é?

> Aluno- -15.
>
> Prof- Dá -15 e ali está?
>
> Aluno- 15.
>
> Prof- 3×(-4)?
>
> Aluno- Dá -12. Então… pronto, é o inverso.
>
> Prof- O inverso?
>
> Aluno- Sim.
>
> Prof- É o inverso?
>
> Aluno- Sim. É o módulo?... Pode ser menos. A ordenada na origem é menos ou…
>
> Prof- Então vamos lá… mas escrevam as conclusões. (aula)

Tal como previsto por Teresa, o trabalho nesta aula terminou com a demonstração, pois nenhum par de alunos conseguiu ir para além desta etapa no tempo disponível. Esta foi uma fase do trabalho em que surgiram dificuldades, algo que aliás a professora já antecipava, e onde optou por ir apoiando individualmente os pares de alunos à medida que os problemas surgiam:

> Prof- A prova, mesmo no caso mais simples, ainda não é simples para estes miúdos do 10.º ano. Tenho que ir dando umas dicas no lugar e tal e há-de haver uns que fazem e há-de haver outros que demoram muito tempo. (pré-aula)

Associada à concretização da demonstração surgiram, contudo, outras questões. A primeira delas incidiu sobre o significado atribuído pelos alunos ao termo conjectura, com vários alunos a questionarem o seu significado, mesmo depois de já terem elaborado a sua conjectura:

> Aluna 1- Oh stora o que é fazer a conjectura?
>
> Prof- A conjectura é exactamente isso. É o que eu penso que será verdade. Depois a seguir tenho que provar. Penso que é verdade. Com a Geometria fizemos isso. Com isto que temos é verdade (refere-se aos exemplos considerados pelas alunas) e isso permite-me conjecturar, permite-me pensar que será sempre assim. Só quando demonstrar é que tenho a certeza se é mesmo sempre assim ou não.
>
> (…)
>
> Prof- O que é a conjectura? O que é que vocês querem conjecturar?
>
> Aluna 2- Oh stora pois, o que é que é suposto dizermos com conjectura? (aula)

Mas entender o significado do termo demonstração revelou-se ainda mais complexo. Com efeito, vários alunos mantiveram-se focados nos exemplos concretos que analisaram, parecendo bastante convictos relativamente à forma como estes lhes permitiam garantir a veracidade do que afirmavam:

> Aluna- E aqui no 6, se nós já mostrámos aqui os cálculos (aponta os exemplos registados mais acima)… Posso dizer que isto prova a validade da nossa conjectura.
>
> Prof- Prova?
>
> Aluna- Não? (aula 2)

Aquilo que muitos alunos fizeram foi executar analiticamente os cálculos para o declive e a ordenada na origem dos casos que tinham considerado graficamente, parecendo pensar que fazendo esses cálculos analiticamente, em vez de utilizar os valores dados pela calculadora, lhes permitia alcançar um outro nível de segurança, que lhes garantia a veracidade da sua conjectura e consequentemente corresponderia a uma demonstração:

> Aluna- Não estamos a perceber a 6.
>
> Prof- A 6 é a demonstração.
>
> Aluna- Fazemos as contas? Metemos assim as contas.
>
> Prof- Claro. Mas puseram para estes três casos. Agora uma demonstração (interrompem)
>
> Aluna- Ah! Temos que fazer mais!
>
> Prof- Uma demonstração, é assim, só está demonstrado se eu tiver demonstrado para quantos casos?
>
> Aluna- Para muitos.
>
> Prof- Quantos? Quantos?
>
> Aluna- Infinitos.
>
> Prof- Infinitos. (interrompe para ralhar com a turma e depois dá uma ajuda às alunas indicando a forma genérica dos pontos)
>
> Aluna- É complicado, stora.
>
> Prof- É complicado… mas a gente não desiste do complicado assim à primeira vista. (…) A demonstração tem que ser analítica que aí na calculadora não podem… Podem experimentar muitos, mas não podem experimentar infinitos. (aula)

Teresa entende no entanto que esta é uma abordagem que de algum modo seria de esperar dos alunos, uma vez que vem na sequência do que têm vindo a fazer nas aulas. Como ela própria explica na conversa que tivemos depois da aula:

> Prof- Eu vi não sei quantos, agora vou ver as fichas, mas pronto, houve alguns que na demonstração o que é que eles fizeram? Foram fazer analiticamente, tratar analiticamente os exemplos. (…) Eh pá, e isto corresponde no fundo àquilo que nós temos feito noutras situações. Não

> lhe chamamos demonstração, evidentemente, mas corresponde a um trabalho que eles têm feito. Eu tenho tido a preocupação de trabalharmos na calculadora e trabalharmos analiticamente e portanto eu acho que eles fizeram uma transposição dessas situações que temos feito, aqui para isto. (pós-aula)

Depois de tentar levar os alunos a perceberem que para que fique provado é necessário que todos os casos sejam considerados e não apenas alguns, Teresa opta por ir ajudando os alunos a considerar pontos genéricos que lhes permitam efectivamente demonstrar o pretendido:

> Prof- Portanto no 6 o que eu estou a perguntar é assim: para estes pontos isto é verdade, então agora seguindo este raciocínio, se o ponto não for este… Tu tens dois pontos, então e se for um ponto 1, por exemplo, de coordenadas (x1, y1) e um ponto 2 de coordenadas (x2, y2). Agora este y1 e este y2 não são quaisquer. Porquê? Estes pontos também pertencem à parábola. E portanto qual é, quanto é que vale o y1? Quanto é que vale o y2? (ajuda o aluno a chegar à resposta) Então este ponto é (x1, $x1^2$) e este (x2, $x2^2$). (…) Será que agora consegues demonstrar? Ora demonstrar, tu tens que ir usar o que tu sabes. Tu sabes calcular o declive de uma recta a partir dos pontos, certo? Então vamos tentar fazer.
>
> Aluno- Mas aqui, nós aqui em cima já tínhamos mostrado isso.
>
> Prof- Mostraram, mas isso é só para essa. Se tu mostrares para este caso, se fizeres exactamente o mesmo raciocínio, só que os cálculos são um bocadinho mais complexos, tens que fazer com calma, o mesmo raciocínio mas para um ponto que é qualquer, não mostraste para um, mostraste para quantos pontos?
>
> Aluno- Para infinitos. (…)
>
> Prof- Então se tu conseguires fazer exactamente o mesmo raciocínio mas para este caso… (aula)

A noção de que para se demonstrar é necessário considerar todos os casos possíveis e não apenas alguns é algo que entende necessitar de ir sendo trabalhado ao longo do tempo e a que deseja dar uma atenção cuidada na aula em que pretende proporcionar aos alunos um momento de discussão e reflexão em torno do trabalho realizado nesta tarefa:

> Prof- Eu já esperava que eles tivessem dificuldades na demonstração. (…) Pronto, a ideia é exactamente ir fazendo esta discussão com eles… que depois eu, como lhes dei até 4ª feira, portanto provavelmente vai ser na aula de 4ª feira, devolvo as fichas e ao devolver depois fazemos um bocadinho a discussão outra vez da diferença entre experimentar num, dois, três casos. (…) E vou discutir com eles principalmente esta questão: o que é que significa demonstrar. O facto de terem que incluir os exemplos que já fizeram, mas terem que provar para todos os casos e, neste caso, eram infinitos. (pós-aula)

Neste sentido, expressa mesmo a sua intenção de não encerrar a questão já. Discutindo com os alunos a demonstração no caso mais simples e deixando os desafios em aberto, para serem apresentados mais tarde à turma por algum dos alunos que entretanto o consiga resolver e numa altura em que o cálculo necessário à demonstração esteja a ser alvo de atenção nas aulas:

> Prof- Vou fazer a demonstração neste caso, só para o $f(x)=x^2$, e depois estas do "indo mais longe" ainda vou continuar a deixá-las como desafios. Quando eles conseguirem podem-me entregar. (…) Isto exige algum cálculo que eles ainda nunca trabalharam porque no básico não se trabalha o cálculo até este nível. À medida que formos agora estudando os polinómios… É também para os sensibilizar que o cálculo é preciso, em vez de ser só depois nos polinómios o cálculo pelo cálculo. Portanto, mais à frente, daqui a uns tempos, depois de alguns fazerem, até vou pedir a um para fazer a apresentação à turma, logo se vê, quando estivermos a trabalhar o cálculo nos polinómios. (pós-aula)

A articulação entre o gráfico e o analítico é outro aspecto a que Teresa afirma dar atenção e que aborda nos desafios que deixa aos alunos no final desta tarefa e que pretende explorar noutra aula. Com efeito, estas últimas questões vêm precisamente colocar o foco sobre a opção entre a abordagem gráfica e a abordagem analítica. A professora considera que os alunos têm geralmente uma preferência pelo gráfico em detrimento do analítico, achando que este último é apenas cálculo sem grande utilidade. Neste caso, contudo, o analítico vem oferecer a abordagem mais simples e rápida à questão, embora não necessariamente fácil. Algo que Teresa considera muito importante abordar com os alunos e que entende que os desafios finais desta tarefa vêem mostrar aos alunos de uma forma muito evidente:

> Inv- No "ir mais longe" a parábola passa a ser outra. Achas que é fácil experimentando com a calculadora descobrir a relação?
>
> Prof- Não, acho que não.
>
> Inv- É que eu não consegui. Eu encontrei-a, mas encontrei-a analiticamente. Também é verdade que me fartei e que resolvi que fazia analiticamente.
>
> Prof- Exactamente. Mas a intenção também é um bocadinho essa. É para perceberem que há coisas em que não é preciso irem ao cálculo, mas há outras em que o cálculo tem alguma utilidade. E este cálculo ainda é difícil para eles, não é? Mas eu prefiro ir trabalhando assim o cálculo, que é para eles perceberem que tem alguma vantagem fazer algum cálculo… (pré-aula)

Discussão dos resultados no âmbito da literatura existente

Para Mejía-Ramos (2005), a procura por uma mais profunda compreensão é o que verdadeiramente move os matemáticos e também o que os leva a rejeitar as “alegadas” demonstrações realizadas por via computacional. Por seu turno Boavida (2001) refere-se ao papel da demonstração como um meio e não um fim, englobando simultaneamente a validação e a compreensão. Mas existem outros papéis que também são atribuídos à demonstração. A autora refere-se ainda à demonstração como um processo de descoberta. Segundo esta, existem numerosos exemplos, na história da Matemática, de novos resultados que foram descobertos ou inventados por processos puramente dedutivos; de facto, é completamente improvável que alguns resultados (como, por exemplo, as geometrias não euclidianas) pudessem alguma vez ter sido encontrados por mera intuição. Aborda também o papel da demonstração como processo de sistematização, considerando que esta revela as subjacentes relações lógicas entre afirmações de um modo que a intuição pura não seriam capazes de realizar. Por seu turno Davis e Hersh (1983) encaram a demonstração como um desafio intelectual, considerando que esta cumpre uma função gratificante e de realização própria. A demonstração é portanto um campo de teste para a energia intelectual e engenho matemático.

DeVilliers (2012) considera que, tradicionalmente, a justificação ou o convencimento sobre a validade de uma conjectura são encaradas como a principal função da demonstração, sendo que Knuth (2002) considera que este é mesmo o único papel que a maioria dos professores lhe reconhece. Nas últimas décadas esta visão estreita do papel da demonstração tem vindo a ser criticado por autores como Reid (2011), que entende que esta tem assumido igualmente outros papéis importantes para os matemáticos e que pode também assumir um papel de grande valor didáctico em sala de aula.

A perspectiva assumida pela professora cuja prática profissional se esboça neste artigo parece ser, contudo, um pouco diferente daquelas que dominam a literatura. Estando naturalmente presente um papel de validação da conjectura previamente formulada, a demonstração parece ser encarada por esta professora pelo papel que esta assume ao nível da compreensão da natureza da Matemática.

A dificuldade em conseguir que os alunos compreendam a necessidade e a importância da demonstração em Matemática é, segundo deVilliers (1999), bem conhecida de todos os professores do ensino secundário. Esta dificuldade acentua-se quando a tecnologia está envolvida pois, segundo Hsieh et al. (2012), o carácter dinâmico usualmente oferecido por esta permite a realização de trabalho de natureza experimental, que potencia a descoberta de propriedades e a formulação de conjecturas. Os alunos passam a poder com toda a facilidade experimentar e analisar vários casos, reflectindo em torno de importantes ideias matemáticas e, consequentemente, alcançando um maior nível de compreensão (Goos & Bennison, 2008). Adquirem assim a possibilidade de formular as suas próprias perguntas e de prosseguir formulando hipóteses e testando-as, procurando enquadrar os resultados na *teoria* que estão a tentar formular (Grant & Searl, 1996).

A forma como a análise de diversos casos se torna possível, acaba por originar nos alunos um sentimento de confiança relativamente à veracidade das conclusões que estabelecem com o apoio da tecnologia, que frequentemente é potenciada pela forma como os alunos se habituaram a ver a Matemática validada de forma externa, seja pelo professor, pelo manual ou até pelos pais (Tall et al., 2012). A necessidade de demonstrar a conjectura formulada pode assim não ser sentida. Mas se inferir uma conclusão a partir da reflexão em torno de alguns casos particulares é uma actividade importante, esta é sem dúvida distinta da demonstração (Cabassut et al., 2012). Enfatizar junto dos alunos a necessidade e a importância da demonstração é assim algo importante.

A tecnologia e, concretamente, a calculadora gráfica são amplamente utilizadas pela professora participante neste estudo. Os alunos são confrontados com tarefas em que lhes é pedido que explorem relações e formulem conjecturas e, por vezes, são também confrontados com momentos em que lhes é pedida uma demonstração.

A preocupação relativamente ao uso da tecnologia e à convicção da professora de que os alunos acabam por ter uma preferência pelas abordagens gráficas em detrimento das analíticas, conduz também a uma cuidada selecção de tarefas. É assim possível identificar uma reflexão por parte da professora que deliberadamente opta por colocar aos alunos um desafio onde a abordagem gráfica acaba por não ser a mais eficiente. Consegue assim confrontar os alunos com situações onde o cálculo e um trabalho matemático mais formal surgem não só como úteis, mas também como a abordagem mais eficiente.

Conclusão

Este estudo sugere que é possível colocar aos alunos situações onde estes se possam aperceber da vantagem de recorrer tanto a abordagens mais formais como a abordagens mais intuitivas e isto mesmo quando a tecnologia é uma realidade em sala de aula. Sugere ainda que a realização de demonstrações pode, entre outros aspectos já identificados na literatura, dar um contributo importante para a compreensão de aspectos basilares da Matemática.

Referências bibliográficas

Boavida, A. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração matemática. Educação e Matemática, 63, 11-15.

Cabassut, R., Conner, A., Ísçimen, F., Furinghetti, F., Jahnke, H., & Morselli, F. (2012). Concepts of proof – in research and teaching. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), Proof and proving in Mathematics Education (pp. 169-190). Dordrecht: Springer.

Davis, P., & Hersh, R. (1983). A experiência matemática. Lisboa: Gradiva.

DeVilliers, M. (1999). Rethinking Proof with Sketchpad. NY: Key Curriculum Press.

DeVilliers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. Pythagoras, 33(3).

Goos, M., & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. Mathematics Education Research Journal, 20(3), 102-130.

Grant, F., & Searl, J. (1996). Mathematical modelling with a graphics calculator. In P. Gómez & B. Waits (Eds.), Roles of Calculators in the Classroom (pp. 71-86). Retirado a 12 de Abril de 1998 de http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/tg18/Base/ Abstracts-1.html.

Hsieh, F., Horng, W., & Shy, H. (2012). From exploration to proof production. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), Proof and proving in Mathematics Education (pp. 279-304). Dordrecht: Springer.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 379−405.

Mejía-Ramos, J. (2005). Aspects of proof in mathematics research. In D. Hewitt (Ed.), Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 25(2). St. Martin's College, Lancaster: Open University.

Reid, D. (2011). Understanding proof and transforming teaching. Proceedings of North-American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Reno, NV: PME-NA.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng,Y. (2012). Cognitive development of proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), Proof and proving in Mathematics Education (pp. 13-49). Dordrecht: Springer.