Séries Numéricas

Seja (a_n) uma sucessão de números reais.

Definição: Chama-se série gerada por (a_n) à sucessão

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 = S_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = S_{n-1} + a_n
\end{aligned}
$$

Para designar uma série, vamos usar uma das seguintes expressões:

- $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
- $\sum a_n$
- $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}}$

Definição: Chama-se termo geral da série à sucessão a_n.

Definição: Aos números $a_1, \cdots, a_n$ chamam-se termos da série.

À sucessão (S_n) chama-se sucessão das somas parciais da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Séries Geométricas

Chama-se progressão geométrica da razão $r \in \mathbb{R}$ à sucessão (a_n) tal que

$$a_{n+1} = a_n \cdot r \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Chama-se série geométrica a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. É claro que $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

Ao número r chama-se razão da progressão geométrica.

Convergência Absoluta e Simples

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica.

Definição: Diz-se que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente.

Definição: Diz-se que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é simplesmente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é divergente e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Critério de Leibniz

Teorema: Seja (a_n) um sucessão real.

Suponhamos que:

1. $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ a_n > 0$
2. (a_n) é decrescente
3. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é convergente.

Exemplo de uma série de absolutamente convergente:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Esta série pode ser reescrita como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Trata-se duma série geométrica, com $r = \frac{1}{2}$, $(|r| < 1)$, o que significa que a série é convergente, convergindo para 2.

Verifica-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Isto implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^n}\right|$ é também convergente, ou seja, pela definição, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é absolutamente convergente.

Exemplo de uma série simplesmente convergente:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Esta série pode ser reescrita como $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, portanto pelo critério de Leibniz a série é convergente.

De facto a série é simplesmente convergente, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

(Esta série tem um nome especial - Série Harmónica. Esta é divergente, sendo facilmente provado pelo Critério do Integral).

Pela série de Taylor $\quad ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

Tomando $x = 1$, temos $ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ que representa a nossa série inicial.

Rearranjos de Séries

Definição: Sejam f uma função bijetiva, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries tais que

$$b_n = a_{f(n)} \text{ com } n = 1, 2, \cdots$$

Dizemos, então, que $\sum b_n$ é um rearranjo de $\sum a_n$.

Observação: A equação $b_n = a_{f(n)}$ implica que $a_n = b_{f^{-1}(n)}$ e portanto $\sum a_n$ é um rearranjo de $\sum b_n$.

Teorema (Dirichlet,1837): Seja $\sum a_n$ uma série absolutamente convergente que converge para s, então todo o rearranjo de $\sum a_n$ é absolutamente convergente, convergindo igualmente para s.

Demonstração: Seja $\{b_n\}$ definida como

$$b_n = a_{f(n)} \text{ com } n = 1, 2, \cdots$$

então

$$|b_1| + \cdots + |b_n| = \left|a_{f(1)}\right| + \cdots + \left|a_{f(n)}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

logo $\sum |b_n|$ tem somas parciais limitadas. Portanto $\sum b_n$ converge absolutamente.

Para provar que $\sum b_n = s$, vamos tomar $t_n = b_1 + \cdots + b_n$, $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Dado $\varepsilon > 0$, vamos tomar N tal que $|s_N - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ e que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Então

$$|t_n - s| \le |t_n - s_N| + |s_N - s| < |t_n - s_N| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Escolhamos um M tal que $\{1,2,\cdots,N\} \subseteq \{f(1), f(2), \cdots, f(M)\}$. Então $n > M$ implica que $f(n) > N$, e para certo n temos

$$\begin{aligned} |t_n - s| &= |b_1 + \cdots + b_n - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ &= |a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)} - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ &\le |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots \le \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

já que todos os termos $a_1, \cdots, a_N$ se cancelam na subtração. Logo, $n > M$ implica que $|t_n - s| < \varepsilon$ e isto significa que $\sum b_n = s$ ∎

Teorema (Riemann): Seja $\sum a_n$ uma série simplesmente convergente de números reais. Sejam x e y dois números pertencentes ao intervalo $[-\infty, \infty]$, com $x \leq y$, então existe um rearranjo $\sum b_n$ de $\sum a_n$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \inf t_n = x \text{ e } \lim_{n\to\infty} \sup t_n = y,$$

com $t_n = b_1 + \cdots + b_n$

Demonstração: Vamos apenas considerar os termos da série que são diferentes de zero, pois os que são iguais a zero não afetam a convergência ou a divergência da série. Portanto podemos assumir que a série $\sum a_n$ não possuí zeros. Seja p_n o n-ésimo termo positivo de $\sum a_n$ e q_n o seu n-ésimo termo negativo. Então $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são ambas séries divergentes de termos positivos.

Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sucessões de números reais, tais que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ e } \lim_{n\to\infty} y_n = y \text{ com } x_n < y_n,\ y_1 > 0$$

Escolhamos termos positivos suficientes, digamos k_1, tais que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} > y_1$$

acompanhados com termos negativos suficientes, digamos q_1, tais que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} < x_1$$

Vamos agora escolher ainda mais termos positivos tais que

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} > y_2$$

acompanhados por termos negativos para satisfazer a inequação

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots - q_{r_2} < x_2$$

Estes passos são possíveis pelo facto das séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ serem ambas divergentes de termos positivos. Se continuarmos este processo é óbvio que obteremos um rearranjo de $\sum a_n$ ∎