Teorema sobre aproximação de funções contínuas por polinómios de Bernstein

Oleg Turcan

3 de Abril de 2019

Definição: Dada uma função f definida no intervalo $[0,1]$, definimos o polinómio de Bernstein de f por

$$B_n\left(f\right)\left(x\right) := \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\left[\binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}\right],\ x \in [0,1]$$

Podemos também ver isso de outra perspectiva. É fácil observar que

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{J}{n}\right)\right] \quad onde \quad J \sim Bin(n,x)$$

Notação: Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções reais majoradas. Representaremos a norma de uma função $f \in \mathcal{F}$ por

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \sup_{x \in D_f} |f(x)|$$

Estabeleçamos ainda uma relação de ordem:
Dadas $f, g \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções, temos

$$f \leq g \iff \Big(f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in I\Big)$$

Teorema: Dada $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, temos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad n > N \implies \|f - B_n(f)\|_{\mathcal{C}([0,1])} < \varepsilon$$

Demonstração: Considere os polinómios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ e $p_2(x) = x^2$ com $x \in \mathbb{R}$. Pela linearidade e monotonicidade do valor esperado temos que $B_n \colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{P}([0,1])$ $\Big[f \mapsto B_n(f)\Big]$ é uma aplicação linear e crescente. Então

$$B_n(p_0) = \mathbb{E}\left[1\right] = 1 = p_0$$

$$
\begin{aligned}
B_n(p_1) &= \mathbb{E}\left[\frac{J}{n}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-j)!} x^j\,(1-x)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!\big(\,(n-1)-j\big)!} x^{j+1}\,(1-x)^{(n-1)-j} \\
&= p_1
\end{aligned}
$$

Cálculo auxiliar:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[J^{(2)}\right] &:= \mathbb{E}\left[J(J-1)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{J!}{(J-2)!}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j!}{(j-2)!} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} x^j\,(1-x)^{n-j} \\
&= \sum_{j=2}^{n} \frac{n!}{(j-2)!\,(n-j)!} x^j\,(1-x)^{n-j} \\
&= n\,(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{j!\,((n-2)-j)!} x^{j+2}\,(1-x)^{(n-2)-j} \\
&= n(n-1)x^2
\end{aligned}
$$

Veja-se que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[J^2\right] &= \mathbb{E}\left[J(J-1)\right] + \mathbb{E}\left[J\right] \\
&= n(n-1)x^2 + x
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
B_n(p_2) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{J}{n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[J^2\right] \\
&= p_2 + \frac{p_1(1-p_1)}{n}
\end{aligned}
$$

Ora, como f é uma função contínua no seu domínio compacto, f é uniformemente contínua em $[0,1]$. Logo, fixando $\varepsilon > 0$ tem-se

$$
\exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in [0,1] \quad \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}
$$

Definamos $\alpha := \frac{2\|f\|_{\mathcal{C}[0,1]}}{\delta^2}$. Se $x, y \in [0,1]$ são tais que $|x-y| \geq \delta$, segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2\,\|f\|_{\mathcal{C}[0,1]} = \alpha\delta^2 \leq \alpha(x-y)^2$$

Portanto

$$\forall x, y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha(x-y)^2$$

Fixemos $y \in [0,1]$ e definamos $h_y(x) := (x-y)^2$. Então

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \alpha h_y \leq f - f(y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha h_y$$

Aplicando a função B_n à desigualdade e usando as propriedades acima mencionadas:

$$\begin{gathered} B_n\left(-\frac{\varepsilon}{2} - \alpha h_y\right) \leq B_n\left(f - f(y)\right) \leq B_n\left(\frac{\varepsilon}{2} + \alpha h_y\right) \\ -\frac{\varepsilon}{2} - \alpha B_n(h_y) \leq B_n(f) - f(y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha B_n(h_y) \\ |B_n(f) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha B_n(h_y) \qquad \Big[\forall y \in [0,1]\Big] \end{gathered}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} B_n(h_y) &= B_n(y^2 p_0 - 2y p_1 + p_2) \\ &= y^2 B_n(p_0) - 2y B_n(p_1) + B_n(p_2) \\ &= y^2 - 2y p_1 + p_2 + \frac{p_1(1-p_1)}{n} \end{aligned}$$

Particularmente, se tomarmos $y = x$, obtem-se, para todo $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha\left(\cancel{x^2 - 2x^2 + x^2} + \frac{x(1-x)}{n}\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\alpha}{n} \end{aligned}$$

É claro que

$$\exists N \in \mathbb{N}: \quad n > N \implies \frac{\alpha}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Concluimos então

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad \|B_n(f) - f\|_{\mathcal{C}([0,1])} < \varepsilon$$

$\mathcal{CQD}$

Teorema de Weierstrass: Qualquer função contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pode ser aproximada uniformemente por um polinómio, ou seja, $\mathcal{P}([a,b])$ é denso em $\mathcal{C}([a,b])$.

Demonstração: Considere a bijeção $\varphi\colon [0,1] \to [a,b]$, $\varphi(x) = a + (b-a)x$. Então $\|f\|_{\mathcal{C}([a,b])} = \|f \circ \varphi\|_{\mathcal{C}([0,1])}$. Pelo teorema anterior podemos arranjar um polinómio $B_n(f \circ \varphi)$ que aproxima uniformemente muito bem $f \circ \varphi$. Assim, segue que $B_n(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ aproxima uniformemente muito bem a função f uma vez que

$$\|B_n(f \circ \varphi)\|_{\mathcal{P}([0,1])} = \left\|B_n(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}\right\|_{\mathcal{P}([a,b])}$$

$\mathcal{CQD}$

Definição: É dito que um espaço topológico X é separável se existir $D \subset X$ de maneira que seja enumerável e denso em X.

Corolário: $\mathcal{C}([a,b])$ é separável. $\boxdot$

Referências:

- Apontamentos do professor Oleksiy Karlovych
- Sebenta do professor Carlos Agra Coelho