Lema de Urysohn

Márcio Valente
Orientador: Prof. Doutor Cláudio Fernandes

SAMPAL - FCT/UNL

3 de abril de 2019

Definição 1. *Seja X um conjunto, não vazio, e τ um família de subconjuntos de X tal que*

(i) $\emptyset, X \in \tau$;

(ii) *A interseção de um número finito de elementos de τ é um elemento de τ;*

(iii) *A união, finita ou infinita, de elementos de τ é um elemento de τ.*

Nestas condições, dizemos que τ é uma <u>topologia</u> em X e ao par ordenado (X, τ) chamamos de <u>espaço</u> <u>topológico</u>.

Aos conjuntos $A \subseteq X$ tais que $A \in \tau$ chamamos de conjuntos <u>abertos</u>.

Aos conjuntos $B \subseteq X$ tais que $(B \setminus X) \in \tau$ chamamos de conjuntos <u>fechados</u>.

Dado $x_0 \in X$, aos conjuntos $C \subseteq X$ tais que $C \in \tau$ e $x_0 \in C$ chamamos de <u>vizinhança</u> do ponto x_0. Ao conjunto de todas as vizinhanças do ponto x_0 denotamos por $\mathscr{V}_{x_0}$.

Definição 2. *Seja X um espaço topológico, $A \subseteq X$ e $x \in X$. Diz-se que x é um ponto <u>aderente</u> a A se*

$$\forall U \in \mathscr{V}_x \, : \, U \cap A \neq \emptyset.$$

Ao conjunto dos pontos aderentes de A chamamos de <u>aderência</u> ou <u>fecho</u> de A e denotamos por $\overline{A}$.

Observação 2.1. *Pode mostrar-se que $\overline{A}$ é a interseção de todos os fechados que contêm A. Assim, $A \subseteq \overline{A}$ e $\overline{A}$ é um conjunto fechado.*

Definição 3. *Seja X um espaço topológico. Diz-se que X é um espaço de <u>Hausdorff</u> se para quaisquer $x, y \in X$ distintos*

$$\exists U \in \mathscr{V}_x \quad \exists V \in \mathscr{V}_y \, : \, U \cap V = \emptyset.$$

Definição 4. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Dado $x_0 \in X$, diz-se que f é <u>contínua</u> em x_0 se*

$$\forall V \in \mathscr{V}_{f(x_0)} \quad \exists U \in \mathscr{V}_{x_0} \, : \, f(U) \subseteq V.$$

Diz-se que f é <u>contínua</u> quando f é contínua para todo o $x_0 \in X$.

Definição 5. *Seja X um espaço topológico. Suponhamos que todos os conjuntos singulares são conjuntos fechados. Diz-se que X é* <u>normal</u> *se, quaisquer que sejam os conjuntos fechados A e B, tais que $A \cap B = \emptyset$, existem conjuntos abertos U e V tais que $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Proposição 6. *Seja X um espaço topológico. Então X é normal se, e só se, para qualquer conjunto fechado A e um conjunto aberto U tal que $A \subset U$, existe um conjunto aberto V tal que $A \subset V$ e $\overline{V} \subset U$.*

Demonstração:

$\Longrightarrow$ Suponhamos que X é normal.

Seja $A \subseteq X$ um conjunto fechado e U um conjunto aberto tal que $A \subset U$.

Consideremos $B = X \setminus U$. Nestas condições B é um conjunto fechado.

Por hipótese existem conjuntos abertos V e W tal que $A \subset V$, $B \subset W$ e $V \cap W = \emptyset$.

Temos que $\overline{V} \cap B = \emptyset$ caso contrário existiria um $y \in \overline{V} \cap B$ para o qual W seria uma vizinhança de y disjunta de V o que é absurdo.

Donde vem que $\overline{V} \subset U$.

Q.E.D.

$\Longleftarrow$ Suponhamos que para qualquer conjunto fechado A e um conjunto aberto U tal que $A \subset U$, existe um conjunto aberto V tal que $A \subset V$ e $\overline{V} \subset U$.

Sejam A e B conjuntos fechados tal que $A \cap B = \emptyset$.

Consideremos $U = X \setminus B$. Por hipótese, existe uma vizinhança V de A tal que $A \subset V$ e $\overline{V} \subset U$.

Os conjuntos abertos V e $X \setminus \overline{V}$ são disjuntos tal que $A \subset V$ e $B \subset X \setminus \overline{V}$.

Portanto, X é normal.

Q.E.D.

Teorema (Lema de Urysohn)**.** *Sejam X um espaço topológico normal e A e B subconjuntos fechados de X, tais que $A \cap B = \emptyset$. Então existe uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow [a, b]$, tal que $f(x) = a$, para cada $x \in A$ e $f(x) = b$, para cada $x \in B$.*

Demonstração: Sejam A e B subconjuntos fechados de X, tais que $A \cap B = \emptyset$.

Vamos provar este resultado para o intervalo $[0,1]$; o caso geral demonstra-se efetuando as devidas alterações.

Seja $P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vamos começar por construir, por indução, uma família de conjuntos aberto U_p de X indexada no conjunto P de tal forma que

$$p < q \Longrightarrow \overline{U_p} \subset U_q, \quad \forall p, q \in P.$$

Sabemos que $\mathbb{Q}$ é contável. Em particular, $P \subset \mathbb{Q}$ também é contável. Donde vem que existe $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow P$ bijeção.

Seja $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow P$ uma bijeção tal que $\phi(1) = 1$ e $\phi(2) = 0$.

Definamos $U_{\phi(1)} = U_1 = X \setminus B$. Atendendo a que B é fechado, vem que U_1 é aberto. Para além disso $A \subset U_1$. Consequentemente, pela proposição, existe um conjunto aberto $U_{\phi(2)} = U_0$ tal que

$$A \subset U_0 \wedge \overline{U_0} \subset U_1.$$

Para cada $n \in N$, $P_n = \{\phi(1), \phi(2), ..., \phi(n)\}$.

Hipótese de Indução: Suponhamos que

$$p < q \Longrightarrow \overline{U_p} \subset U_q, \quad \forall p, q \in P_n.$$

Tese de Indução: Pretende-se provar que

$$(*) \quad p < q \Longrightarrow \overline{U_p} \subset U_q, \quad \forall p, q \in P_{n+1}.$$

Seja $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$, onde $r = \phi(n+1)$. Temos que P_{n+1} é um conjunto totalmente ordenado pois é um subconjunto de $\mathbb{R}$ com a ordem usual dos números reais. Para além disso, é um conjunto finito e não vazio, consequentemente, todo o elemento de P_{n+1} admite, no máximo, um antecedente imediato e um sucessor imediato pois tem o mesmo tipo de ordem que um conjunto do tipo $\{1, 2, 3, ..., n\}$ de $\mathbb{N}$.

Portanto, como $0 < r < 1$, existem $p, q \in P_{n+1}$ tais que $p < r < q$. Dado que $p, q \in P_n$ pela H.I. vem que

$$p < q \Longrightarrow \overline{U_p} \subset U_q.$$

Além disso, como $\overline{U_p}$ é um conjunto fechado contido no aberto U_q, pela proposição 6, existe um conjunto aberto U_r tal que

$$\overline{U_p} \subset U_r \wedge \overline{U_r} \subset U_q.$$

Resta ainda provar que para quaisquer par de elementos de P_{n+1} a propriedade $(*)$ se verifica.

É claro que a propriedade em questão é válida para quaisquer $p, q \in P_n$ por causa da hipótese de indução.

Suponhamos agora que um dos elementos é r e o outro é $s \in P_n$. Nestas condições, podemos encontrar-nos perante os seguintes casos:

1ºcaso: $s \leq p$

Pela H.I., vem que $\overline{U_s} \subset U_p$. Para além disso, $U_p \subset \overline{U_p} \subset U_r$. Donde vem, pela transitividade da relação de inclusão que $\overline{U_s} \subset U_r$ que é o que pretendemos.

2ºcaso: $q \leq s$

Pela H.I., vem que $\overline{U_q} \subset U_s$. Para além disso, $\overline{U_r} \subset U_q \subset \overline{U_q}$. Donde vem que $\overline{U_r} \subset U_s$ que é o que pretendemos.

Damos assim por terminada a construção da família de abertos U_p de X tal que

$$p < q \Longrightarrow \overline{U_p} \subset U_q, \quad p, q \in P.$$

Vamos agora expandir a definição desta família de abertos para quaisquer racionais da seguinte forma:

$$U_p = \emptyset,\ p < 0,$$
$$U_p = X,\ p > 1.$$

Nestas condições é fácil verificar que

$$p < q \Longrightarrow \overline{U_p} \subset U_q, \quad p, q \in \mathbb{Q}.$$

Consideremos o seguinte conjunto, não vazio,

$$Q(x) = \{p \in \mathbb{Q} : x \in U_p\}, \text{ para cada } x \in X.$$

Este conjunto verifica as seguintes propriedades:

1. $Q(x) \geq 0$, $\forall x \in X$; (todos os elementos de $Q(x)$ são maiores ou iguais a 0)

2. $Q(x)$ contém todos os racionais maiores que 1 para qualquer $x \in X$.

Vamos, finalmente, definir a nossa função. Seja

$$f(x) := \inf Q(x),\ x \in X.$$

Esta função encontra-se bem definida pois a garantia da existência do ínfimo de $Q(x)$ é assegurada pelo Axioma de Completude pois $\emptyset \neq Q(x) \subset \mathbb{R}$ e é limitado inferiormente por 0.

Seja $x \in A$. Atendendo a que

$$A \subset U_0 \subset U_{\frac{1}{8}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{2}{3}} \subset ... \subset U_1 \subset ...$$

vem que $x \in U_s$, $\forall s \geq 0$. Portanto, $f(x) = 0$.

Seja $x \in B$. Então $x \notin U_1$. Consequentemente, $x \notin U_s$, $\forall s \leq 1$. Pelo que, $f(x) = 1$.

Assim, resta então provar que f é contínua. Antes disso vamos provar as afirmações seguintes:

(i) $x \in \overline{U_p} \Longrightarrow f(x) \leq p$,

(ii) $x \notin U_p \Longrightarrow f(x) \geq p$.

Comecemos por provar a afirmação (i).

$$\begin{aligned} x \in \overline{U_p} &\Longrightarrow x \in U_s,\ \forall s \geq 0 \quad \text{(pode acontecer que } x \in U_t,\ t \leq p) \\ &\Longrightarrow Q(x) \,\text{contém elementos maiores que p} \\ &\Longrightarrow f(x) \leq p. \end{aligned}$$

Vamos agora provar (ii).

$$\begin{aligned} x \notin U_p &\Longrightarrow x \notin U_s,\ \forall s < p \\ &\Longrightarrow Q(x) \,\text{contém elementos maiores que p} \\ &\Longrightarrow f(x) \geq p. \end{aligned}$$

Seja $x_0 \in X$ e (c, d) uma vizinhança de $f(x_0)$ tal que

$$c < p < f(x_0) < q < d, \quad p, q \in \mathbb{Q}.$$

A existência dos racionais p e q é garantida pela densidade dos números racionais em $\mathbb{R}$.

Consideremos $U = U_q \setminus \overline{U_p}$. Comecemos por verificar que U é uma vizinhança de x_0.

Temos que $U_q \setminus \overline{U_p} = U_q \cap \overline{U_p}^C$. Por outro lado, $\overline{U_p}$ é um conjunto fechado. Consequentemente, $\overline{U_p}^C$ é aberto. Para além disso, U_q também é aberto. Portanto, por definição de topologia, $U = U_q \cap \overline{U_p}^C$ é aberto.

Vamos ver que U é um aberto que contém x_0.

Se $x_0 \notin U_q$, então por (ii) vem que $f(x_0) \geq q$ o que é absurdo. Portanto, $x_0 \in U_q$.

Se $x_0 \in \overline{U_p}$, então por (i) vem que $f(x_0) \leq p$ o que é absurdo. Pelo que, $x_0 \notin \overline{U_p}$.

Logo, $x_0 \in U$. Donde vem que U é uma vizinhança de x_0.

Fixemos $x \in U$. Então $x \in U_q \subset \overline{U_q}$, donde vem por (i) que $f(x) \leq q$. Para além disso, $x \notin \overline{U_p}$. Consequentemente, $x \notin U_p$. Portanto, por (ii), $f(x) \geq p$.

Acabámos de provar que

$$c < p \leq f(x) \leq q < d, \quad \forall x \in U, \text{ i.e.,}$$

$f(U) \subset (c, d)$ e portanto f é contínua em x_0.

Atendendo a que x_0 é arbitrário vem que f é contínua.

Q.E.D.

Um exemplo de aplicação do Lema de Urysohn é o seguinte resultado:

Teorema (Urysohn's Metrization Theorem)**.** *Todo o espaço regular com uma base contável é um espaço metrizável.*

Demonstração: (futura sessão do SAMPAL).

Bibliografia:

Munkres, James. (1974). *Topology, A First Course*. Prentice Hall, Inc.