Princípio Local de Gohberg e Krupnik para o estudo de invertibilidade em Álgebras de Banach

Eduardo Skapinakis

13/11/2019

"Before we start our walk through the world of local principles, it is useful to give a general idea of what a local principle should be. A local principle will allow us to study invertibility properties of an element of an algebra by studying the invertibility properties of a (possibly large) family of (hopefully) simpler objects". - *Non-commutative Gelfand Theories (Capítulo 2)*

1 De espaços vetoriais a Álgebras de Banach

Dado $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ um corpo e A um espaço vetorial sobre K, com uma operação binária adicional de $A \times A$ para A denotada $(\cdot)$, dizemos que A é uma Álgebra se $\forall x, y, z \in A$, $\forall \alpha \in K$:

- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$
- $(\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y) = \alpha(x \cdot y)$

Dada uma Álgebra A sobre um corpo K, dizemos que A é uma Álgebra normada se existe $||\cdot||$, uma norma sobre A, tal que $\forall x, y \in A$

- $||x \cdot y|| \leq ||x||.||y||$

Finalmente, dizemos que A é uma Álgebra de Banach se A for uma Álgebra normada completa, isto é, se toda a sucessão de Cauchy (de elementos de A) for convergente em A.

Nota: Dada uma Álgebra de Banach A, dizemos que A é unitária se possuir elemento neutro, isto é, se $\exists e \in A : \forall x \in A$

- $x \cdot e = e \cdot x = x$

2 Lema 1

Seja A uma Álgebra de Banach unitária e $x \in A$

- $||x|| < 1 \Rightarrow (e - x)$ é invertível $\wedge$ $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

3 Definições

- $M \subset A$ é uma Classe Localizadora de A se:
  - $0 \notin M$
  - $\forall f, g \in M, \exists h \in M$: $f \cdot h = h \cdot f = g \cdot h = h \cdot g = h$
- $x, x' \in A$ são M-equivalentes (M Classe Localizadora) se:
  - $\inf_{g \in M} ||(x - x')g|| = 0$
- $x \in A$ é M-invertível (M Classe Localizadora) se:
  - $\exists\ a \in A, f \in M\ :\ axf = f$
- Uma família de Classes Localizadoras $\{M_\tau\}_{\tau \in X}$ (X espaço topológico) é uma cobertura se:
  - Para toda a família de elementos $\{f_\tau\}_{\tau \in X}$ tal que $\forall \tau \in X\ f_\tau \in M_\tau$, existe uma sub-família finita $\{f_{\tau_1}, \cdots, f_{\tau_m}\}$ tal que $\sum_{n=1}^{m} f_{\tau_n}$ é invertível em A.

4 Lema 2

Seja A uma Álgebra de Bancah unitária, M uma classe localizadora de A e $x, x' \in A$ M-equivalentes.

- x é M-invertível $\Leftrightarrow$ x' é M-invertível.

5 Princípio Local de Gohberg e Krupnik

Seja A uma Álgebra de Banach unitária, $\{M_\tau\}_{\tau \in X}$ uma cobertura de elementos do centro de A, $x \in A$ e $\forall \tau \in X$, seja x_τ M_τ-equivalente a x.

- x é invertível $\Leftrightarrow$ $\forall \tau \in X$, x_τ é M_τ-invertível.

6 Referências

- Bastos, A., Fernandes, C. & Santos, P. (2011). *Introdução às Álgebras de Operadores.* Disponível aqui.
- Roch, S., Santos P. & Silbermann, B. (2011). *Non-commutative Gelfand Theories.* Disponível aqui (Capítulo 2).