Uma Introdução às Equações de Evolução Semilineares

Beatriz Salvador
Orientador: Prof. Doutor Luís Trabucho

Faculdade de Ciências e Tecnologia Nova de Lisboa

15 de Maio de 2019

Semigrupos de Operadores Lineares e Equações Diferenciais em Espaços de Banach

Uma Introdução às Equações de Evolução Semilineares

Beatriz Salvador

Orientador: Prof. Doutor Luís Trabucho

Faculdade de Ciências e Tecnologia Nova de Lisboa

15 de Maio de 2019

Índice

Problema de Motivação 1

O que é que têm em comum estas equações?

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_x = 0, x \in \mathbb{R}; \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}; \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}; \\ u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Problema de Motivação 2

$$u' = au \ , \qquad a \in \mathbb{R}$$

Problema de Motivação 2

$$u' = Au \ , \quad A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$$

Problema de Motivação 2

$$u' = Au \ , \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

Problema de Motivação 2

$$u'(t) = \Delta u(t)$$

Definição

Seja X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.
Definimos

$$e^A := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n$$

Operadores dissipativos

Definição

Seja X um espaço de Banach.
Um operador A em X diz-se **dissipativo** se

$$\|u - \lambda A u\| \geq \|u\|$$

para todo o $u \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Operadores m-dissipativos

Definição

Seja X um espaço de Banach.
Um operador A em X diz-se **m-dissipativo** se

- A é dissipativo;
- para todo o $\lambda > 0$ e $f \in X$, existe $u \in D(A)$ tal que $u - \lambda Au = f$.

Definição

Seja X um espaço de Banach, A um operador m-dissipativo em X e $\lambda > 0$. Para todo $f \in X$, denotamos por

$$J_\lambda(f) = (I - \lambda A)^{-1} f$$

a solução u da equação $u - \lambda A u = f$.

Operadores m-dissipativos

Teorema

Se A é m-dissipativo, então $\lim_{\lambda \downarrow 0} \|J_\lambda u - u\| = 0$ *para todo o* $u \in \overline{D(A)}$.

Definição

Seja A um operador m-dissipativo. Para todo o $\lambda > 0$, denotamos por A_λ o operador definido por

$$A_\lambda = AJ_\lambda = \frac{J_\lambda - I}{\lambda}.$$

Operadores m-dissipativos

Teorema

Se A for m-dissipativo e $\overline{D(A)} = X$, então $A_\lambda u \longrightarrow Au$ quando $\lambda \downarrow 0$, para todo o $u \in D(A)$.

Teorema

Seja X um espaço de Hilbert. Então A é dissipativo em X se e só se $\langle Au, u\rangle \leq 0$, para todo $u \in D(A)$.

Teorema

Seja X um espaço de Hilbert. Se A é m-dissipativo em X, então $D(A)$ é denso em X.

Teorema

Seja X um espaço de Hilbert. Se A é m-dissipativo em X, então

$$J_\lambda u \longrightarrow u \text{ quando } \lambda \downarrow 0,$$

para todo $u \in X$ e

$$A_\lambda u \longrightarrow Au \text{ quando } \lambda \downarrow 0,$$

para todo $u \in D(A)$.

Exemplo 1 - Laplaciano num subconjunto de $\mathbb{R}^N$: teoria em L^2

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, e seja $Y = L^2(\Omega)$ espaço de Hilbert. Definimos o operador linear A em Y por

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in Y\}; \\ Au = \Delta u, \forall u \in D(A). \end{cases}$$

Exemplo 1 - Laplaciano num subconjunto de $\mathbb{R}^N$: teoria em L^2

Teorema

A é m-dissipativo em Y e tem domínio denso.

Exemplo 2 - Laplaciano num subconjunto de $\mathbb{R}^N$: teoria em L^∞

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, e seja $Z = L^\infty(\Omega)$ espaço de Hilbert. Definimos o operador linear A em Z por

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap Z; \Delta u \in Z\}; \\ Au = \Delta u, \forall u \in D(A). \end{cases}$$

Exemplo 2 - Laplaciano num subconjunto de $\mathbb{R}^N$: teoria em L^∞

Teorema

A é m-dissipativo em Z.

Exemplo 3 - Laplaciano num subconjunto de $\mathbb{R}^N$: teoria em C_0

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, e seja $X = C_0(\Omega)$. Definimos o operador linear A em X por

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap X : \Delta u \in X\}; \\ Au = \Delta u, \forall u \in D(A). \end{cases}$$

Exemplo 3 - Laplaciano num subconjunto de $\mathbb{R}^N$: teoria em C_0

Teorema

Assumindo que Ω tem fronteira Lipschitz contínua, então A é m-dissipativo com domínio denso.

Definição

Seja X um espaço de Banach e seja A um operador m-dissipativo em X de **domínio denso**. Para $\lambda > 0$, consideremos os operadores J_λ e A_λ definidos anteriormente e ainda, para $t \geq 0$,

$$T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}.$$

Semigrupo gerado por um operador m-dssipativo

Teorema

Para todo o $x \in X$, *a sucessão* $u_\lambda(t) = T_\lambda(t)x$ *converge uniformemente em intervalos limitados* $[0, T]$ *para uma função* $u \in C([0,\infty), X)$ *quando* $\lambda \downarrow 0$. *Definimos* $T(t)x = u(t)$ *para todo o* $x \in X$ *e* $t \geq 0$. *Então*

$$\begin{aligned} & T(t) \in \mathcal{L}(X) \quad e \quad \|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0; \\ & T(0) = I; \\ & T(t+s) = T(t)T(s), \forall s, t \geq 0. \end{aligned}$$

Além disto, para todo o $x \in D(A)$, $u(t) = T(t)x$ *é a única solução do problema*

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), X); \\ u'(t) = Au(t), \forall t \geq 0, \\ u(0) = x \end{cases}$$

Contração de semigrupo

Definição

Uma família de um parâmetro $(T(t))_{t\geq 0}$ é uma contração de semigrupo em X se

(i) $\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$;

(ii) $T(0) = I$;

(iii) $T(t+s) = T(t)T(s)$;

(iv) para todo o $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ está em $C((0,\infty), X)$.

Gerador de uma contração de semigrupo

Definição

O gerador de $(T(t))_{t\geq 0}$ é o operador linear L definido por

$$D(L) = \{x \in X : \frac{T(h)x - x}{h} \text{ tem limite em } X \text{ quando } h \downarrow 0\},$$

e

$$Lx = \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h},$$

para todo o $x \in D(L)$

Contração de semigrupos e seus geradores

Teorema

Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ *uma contração de semigrupo em* X *e seja* L *o seu gerador. Então* L *é um operador m-dissipativo e* $D(L)$ *é denso em* X.

O resultado que todos (não) esperávamos

Teorema (TEOREMA DE HILLE-YOSIDA-PHILIPS)

Um operador linear A é gerador de uma contração de semigupo em X, se e só se, A é m-dissipativo com domínio denso.

Semigrupos de isometrias

Definição

Uma família de um parâmetro $(T(t))_{t\geq 0}$ é semigrupo de isometrias em X se

(i) $\|T(t)x\| = \|x\|, \forall x \in X, \forall t \in \mathbb{R}$;

(ii) $T(0) = I$;

(iii) $T(t+s) = T(t)T(s)$;

(iv) para todo o $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ está em $C(\mathbb{R}, X)$.

Teorema

Seja A um operador m-dissipativo de domínio denso, e seja $(T(t))_{t\geq 0}$ uma contração de semigrupo em X gerado por A. Então $(T(t))_{t\geq 0}$ é a restrição a $\mathbb{R}_+$ de um grupo de isometrias, se e só se, $-A$ é m-dissipativo.

Referências

- Thierry Cazenave and Alain Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*,Clarendon Press - Oxford (1998).
- Jaime E. Muñoz Rivera, *Estabilização de Semigrupos & Aplicações*, Séries de Métodos Matemáticos - Rio de Janeiro (2008).