Introdução à Teoria das Distribuições

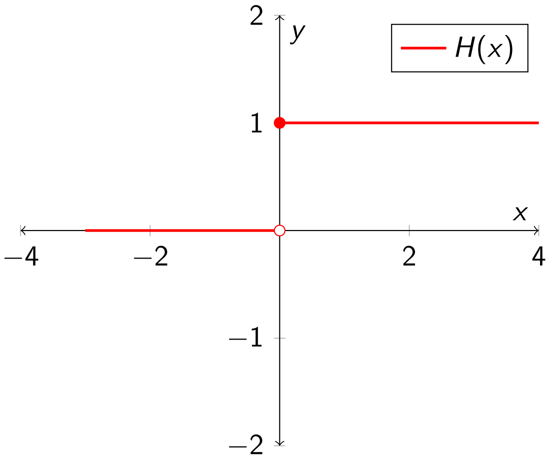
Beatriz Salvador
Orientador: Prof. Doutor Luís Trabucho

Faculdade de Ciências e Tecnologia Nova de Lisboa

5 de Dezembro de 2018

Índice

Problema de Motivação



Definições e Notação

- Seja
$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^{\infty}(\Omega) : \textit{supp } \varphi \text{ é compacto}\}$$

- Seja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Denotamos por $|\alpha|$ e chamamos **comprimento** de α ao número
$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$$
Definimos o operador diferencial
$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

- Seja $\mathcal{D}(\Omega)^*$ o dual algébrico de $\mathcal{D}(\Omega)$.

- Uma **distribuição** T é um elemento de $\mathcal{D}(\Omega)^*$ que verifica:
  Para cada compacto $K \subseteq \Omega$, existe uma constante c_K e um número natural m tais que

$$\forall \varphi \in D_K(\Omega) \ |\langle T, \varphi \rangle| \leq c_K \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi(x)|$$

  Denotamos por $D'(\Omega)$ o espaço das distribuições.

Exemplo Fundamental

Consideremos

- $L^1(\Omega)$ - espaço das funções integráveis à Lebesgue
- $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ - espaço das funções integráveis à Lebesgue em qualquer compacto de Ω

Podemos associar a cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ uma função T_f da seguinte maneira:

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \longrightarrow T_f \in D'(\Omega)$$

tal que

$$\forall \varphi \in D(\Omega),\ \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi$$

Exemplo Fundamental

Desta maneira podemos definir o mapa

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \to D'(\Omega)$$
$$f \mapsto T_f$$

Esta aplicação é **linear**, **injectiva** e **contínua**.
Isto é, podemos identificar qualquer função localmente integrável f com a sua associada distribuição T_f.
Desde modo, vamos então passar a escrever $\langle f, \varphi \rangle$ em vez de $\langle T_f, \varphi \rangle$.

No entanto, NÃO é sobrejectiva.

Vejamos um exemplo.

Exemplo Fundamental

Distribuição Delta Dirac

Assumamos que $0 \in \Omega$. Definimos a distribuição **Delta Dirac** através de

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \ \forall \varphi \in D(\Omega)$$

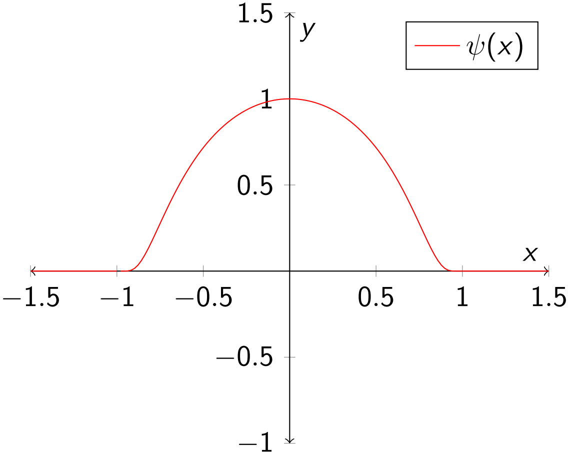
Consideremos $\Omega = \mathbb{R}$ e definimos

$$\begin{cases} \psi \in D(\mathbb{R}), & 0 \leq \psi \leq 1 \\ \psi(0) = 1, & supp\ \psi \subset [-1, 1] \end{cases}$$

Por exemplo,

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{1 - \frac{1}{1-x^2}} & se\, x \in]-1, 1[\\ 0 & se\, x \notin]-1, 1[\end{cases}$$

Exemplo fundamental



Exemplo fundamental

Sejam $\psi_p(x) = \psi(px), p \in \mathbb{N}$.
Então $\psi_p \in D(\Omega),\ 0 \leq \psi \leq 1$; $\psi(0) = 1$ e *supp* $\psi_p \subset [-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}]$.

Vamos assumir que existe uma função $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $T_f = \delta$.
Então

$$\forall p \in \mathbb{N}\langle \delta, \psi_p \rangle = \psi_p(0) = 1 = \int_{\mathbb{R}} f\psi_p$$

Ora

$$\forall x \neq 0 \quad \lim_{p \to \infty} \psi_p(x) = 0$$

Logo, quando

$$p \to \infty \implies \psi_p(x) \to 0\, a.e \implies f\psi_p(x) \to 0\, a.e$$

Exemplo fundamental

Por outro lado,

$$|f\psi_p| \leq |f|$$

Logo, quando

$$p \to \infty \implies \int_{\mathbb{R}} f\psi_p = \int_{-1}^{1} f\psi_p \to 0$$

Mas tínhamos visto que $\int_{\mathbb{R}} f\psi_p = 1$. Chegámos a um absurdo com $1 = 0$.

Derivada Distribucional

Definimos

$$T \in D'(\Omega) \to D^\alpha T \in D'(\Omega)$$

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Derivada usual vs Derivada Distribucional

Seja

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega) \implies f \text{ tem derivada distribucional}$$

Consideremos o espaço $C^\infty(\overline{\Omega})$.
Então

$$f \in C^\infty(\overline{\Omega}) \implies f \in C^\infty(\Omega) \text{ e } (D^\alpha f)\big|_{\partial\Omega} \text{ está bem definida}$$

Derivada usual vs Derivada Distribucional

A distribuição associada a f está definida da seguinte maneira:

$$\varphi \in D(\Omega) \longrightarrow \int_\Omega f\varphi$$

E portanto,

$$\langle \underbrace{D^\alpha f}_{D'-der}, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, \underbrace{D^\alpha \varphi}_{usual-der}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f\, D^\alpha \varphi$$

Derivada usual vs Derivada Distribucional

Escolhendo $\alpha = (0, ..., 1, ..., 0)$ tal que $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos:

$$\langle \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{D'-der}, \varphi \rangle = (-1)\langle f, \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}_{usual-der} \rangle = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Mas para $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(f\varphi)}_{usual-der} - \underbrace{\varphi \frac{\partial f}{\partial x_i}}_{usual-der}$

Logo

$$\langle \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{D'-der}, \varphi \rangle = -\int_\Omega \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(f\varphi)}_{usual-der} + \int_\Omega \underbrace{\varphi \frac{\partial f}{\partial x_i}}_{usual-der}$$

Derivada usual vs Derivada Distribucional

Usando a Fórmula de Green,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(f\varphi) = \int_{\partial\Omega} f\varphi\nu_i$$

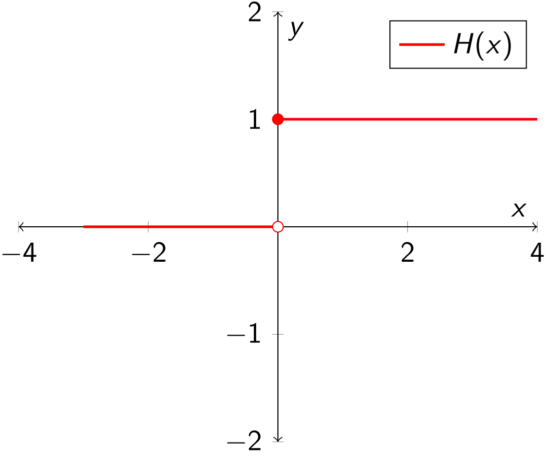
onde $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ é a normal exterior à fronteira.
Logo

$$\langle \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{D'-der}, \varphi\rangle = -\int_{\partial\Omega} f\varphi\nu_i + \int_\Omega \varphi\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_\Omega \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{usual-der} \varphi = \langle \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{usual-der}, \varphi\rangle$$

Portanto, obtivemos:

$$\text{Se } f \in C^{\infty}(\overline{\Omega}), \text{ então } \langle \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{D'-der}, \varphi \rangle = \langle \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{usual-der}, \varphi \rangle \; \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Voltando ao Problema de Motivação



Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$.
Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ por:

$$f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ é mensurável} \\ |f|^p \in L^1(\Omega) \end{cases}$$

Espaços L^p

É possível definir uma **norma** neste espaço:

$$||f||_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}$$

Se $p = 2$, então $L^2(\Omega)$ é um **espaço de Hilbert** onde está definido o **produto interno**:

$$\forall u, v \in L^2(\Omega) \quad (u, v) = \int_\Omega uv$$

Definição: Seja m um número natural $(m \geq 0)$.
Definimos o espaço $H^m(\Omega)$ por:

$$u \in H^m(\Omega) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u \in D'(\Omega) \\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ com } |\alpha| \leq m \;, \quad \underbrace{D^\alpha u}_{D'-der} \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

É fácil de ver que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Para m fixo, é possível definir um **produto interno** neste espaço:

$$(u, v) \in (H^m(\Omega))^2 \longrightarrow \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v$$

o qual induz a **norma**:

$$||u||_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||^2_{0,m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para $u \in H^m(\Omega)$, $0 \leq k \leq m$, definimos a **seminorma**:

$$|u|_{k,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^2_{0,m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

<u>Definição:</u>
É possível verificar que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$.
Definimos

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)} \quad (\text{fecho para a norma de } H^m(\Omega))$$

Teorema de Hahn-Banach

Sejam E e F dois espaços de Banach equipados com $||.||_E$ e $||.||_F$, respetivamente, e E_0 um subespaço denso de E.
Seja p uma seminorma contínua em E.
Seja L uma aplicação linear de E_0 para F tal que

$$\exists c \geq 0 \;\; ||Lx||_F \leq c\, p(x) \;\; \forall x \in E_0$$

Então, existe uma única extensão de L (ainda denotada por L) a todo o espaço E, que é **linear e contínua**.
Mais,

$$||Lx||_F \leq c\, p(x) \;\; \forall x \in E$$

onde c **é a mesma constante que acima**.

Hipóteses necessárias para prosseguirmos

A partir de agora vamos assumir que:

- Ω é limitado
- $\partial\Omega$ é Lipschitziana

Iremos usar os seguintes resultados:

- $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $H^m(\Omega),\ m \geq\ 0$
- $\exists c = c(\Omega)$ tal que $||v||_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega)||v||_{L^1(\Omega)},\ \ \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$

Traço

Uma vez que $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, podemos considerar $v\Big|_{\partial\Omega}$, i.e, v está bem definida na fronteira.

$$v\Big|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \Leftrightarrow \mathbb{R}$$

$$v\Big|_{\partial\Omega} \in L^1(\partial\Omega)$$

Aplicando o Teorema de Hahn-Banach com

$$E = H^1(\Omega); \quad E_0 = C^\infty(\overline{\Omega}); \quad F = L^2(\partial\Omega); \quad p = ||\cdot||_{1,\Omega}$$

$$L : C^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \quad \text{definida por}$$
$$v \mapsto Lv = v\big|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$$

onde L é uma aplicação linear e contínua que satisfaz

$$||v||_{L^2(\Omega)} \leq ||v||_{1,\Omega} \;\; \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

Obtemos que L pode ser estendido a todo o espaço $H^1(\Omega)$.

Traço

Isto é, toda a função $v \in H^1(\Omega)$ admite um valor na fronteira $v\big|_{\partial\Omega}$ que pertence ao espaço $L^2(\partial\Omega)$.
Devido a

$$\forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad ||v||_{L^2(\Omega)} \leq ||v||_{1,\Omega}$$

podemos concluir que a aplicação

$$v \in H^1(\Omega) \longrightarrow v\big|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$$

é linear e contínua de $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$.
Designamos esta aplicação por **Traço de v**, e representamos por $tr\ v$.

Aplicações do Traço

Uma aplicação do resultado anterior é permitir-nos provar que

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid tr\ v = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$$

Espaço $H^{\frac{1}{2}}$

É possível verificar que o traço é uma forma linear e contínua de $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$. No entanto, não é injectiva.
Para além disso, o traço não é sobrejectivo e esta é a razão pela qual introduzimos o espaço $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$:

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{g \in L^2(\partial\Omega) : \exists v \in H^1(\Omega),\ \ g = v\big|_{\partial\Omega}\right\}$$

Espaço $H^{\frac{1}{2}}$

É possível equipar este espaço com a norma de L^2. No entanto, $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ não é fechado para esta norma.
É possível provar que $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é denso em $L^2(\partial\Omega)$.
Podemos definir a norma em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ por:

$$\|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \overset{\text{def}}{=} \inf_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ v|_{\partial\Omega}=g}} \|g\|_{1,\Omega}$$

Lema Para cada $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Existe uma e uma só $\omega_g \in (H_0^1(\Omega))^{\perp}$ tal que $\omega_g\big|_{\partial\Omega} = g$ e o mapa $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \ni g \to \omega_g \in H^1(\Omega)$ é linear.
Para além disso, este mapa é bijectivo.

Espaço $H^{\frac{1}{2}}$

Resumindo, temos:

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \left\{ g \in L^2(\partial\Omega) \colon \exists v \in H^1(\Omega) \colon g = v\big|_{\partial\Omega} \right\}$$

1. $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma:

$$\|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \overset{\text{def}}{=} \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v|_{\partial\Omega} = g}} \|g\|_{1,\Omega}$$

2. $\mathrm{tr} \colon H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ é linear e contínua.
3. Existe uma extensão linear e contínua

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \ni g \to \omega_g \in H^1(\Omega)$$

Problema Elíptico

Consideremos $I =]0,1[$ e a EDO

$$\begin{cases} -u'' + \lambda u = f & \text{em } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

onde f é uma função e $\lambda \in \mathbb{R}$ (dados).
Se $f \in L^1_{\text{loc}}(I) \subset D'(I)$, podemos considerar a EDO em $D'(I)$:

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in D'(I) \text{ tal que} \\ -u'' + \lambda u = f \text{ em } D'(I) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Problema Elíptico

Não é possível ter em conta as condições de fronteira porque não estão definidas em $D'(I)$. Temos então de formular o problema em $H^1(I)$.

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H^1(I), \text{ tal que} \\ -u'' + \lambda u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \\ f \in L^1_{\text{loc}}; \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Calcular } u \in H^1_0(I), \text{ tal que} \\ -u'' + \lambda u = f \\ f \in L^1_{\text{loc}}; \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Problema Elíptico

Seja $f \in L^2(I)$ e considere-se o problema:
Calcular $u \in H_0^1(I)$ tal que (u é uma distribuição):

$$\begin{aligned} -u'' + \lambda u = f &\Leftrightarrow \langle -u'' + \lambda u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle -u'', \varphi \rangle + \lambda \langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle u', \varphi' \rangle + \lambda \langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(I) \end{aligned}$$

Problema Elíptico

Como estamos à procura de

$$u \in H_0^1(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in L^2(I) \\ u' \in L^2(I) \end{cases}$$

podemos escrever o problema anterior na forma

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1(I), \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_I u'\varphi' + \lambda \int_I u\varphi = \int_I f\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I) \end{cases}$$

Problema Elíptico

Consideremos um qualquer $v \in H_0^1(I)$. Por definição de $H_0^1(I)$,

$$\exists\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(I) \text{ tal que } \varphi_n \to v \text{ em } H^1(I) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi_n \to v \text{ em } L^2(I) \text{ e } \varphi_n' \to v' \text{ em } L^2(I)$$

Consequentemente,

$$\int_I f\varphi_n \to \int_I fv$$

$$\lambda \int_I u\varphi_n \to \lambda \int_I uv$$

$$\int_I u'\varphi_n' \to \int_I u'v'$$

O problema acima é então equivalente a

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1(I), \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_I u'v' + \lambda \int_I uv = \int_I f\varphi, \quad \forall v \in H_0^1(I) \end{cases}$$

Vamos agora considerar o funcional $J\colon H_0^1(I) \to \mathbb{R}$ definido por:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_I (u')^2 + \frac{\lambda}{2}\int_I u^2 - \int_I fu$$

O nosso problema é então equivalente a

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1(I), \text{ tal que} \\ \langle J'(u).v\rangle = 0, \quad \forall v \in H_0^1(I) \end{cases}$$

Problema Elíptico

<u>Observação:</u> Uma forma de encontrar $u \in H_0^1(I)$ tal que $\langle J'(u).v \rangle = 0$ é

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1(I), \text{ tal que} \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in H_0^1(I) \end{cases}$$

que é um problema de minimização.

Problema Elíptico

Definindo a forma bilinear

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\cdot,\cdot)\colon H_0^1(I) \times H_0^1(I) \to \mathbb{R} \\ a(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\int_I u'v' + \lambda \int_I uv, \quad \forall u \in H_0^1(I) \quad \forall v \in H_0^1(I) \end{array} \right.$$

e a forma linear

$$\left\{ \begin{array}{l} l(\cdot)\colon H_0^1(I) \to \mathbb{R} \\ l(v) \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I) \quad (f \in L^2(I)) \end{array} \right.$$

o problema fica na forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Calcular } u \in H_0^1(I), \text{ tal que} \\ a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(I) \end{array} \right.$$

Teorema de Lax-Milgram

Seja V um espaço de Hilbert.
Sejam $a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua em $V \times V$ e $l(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ um forma linear em V. Então se a forma bilinear for V-elíptica, i.e,

$$\text{Se } \exists\, \alpha > 0 \text{ tal que } a(v,v) \geq \alpha ||v||_V^2, \ \forall v \in V$$

Então existe um e um só $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = l(v) \ \forall v \in V$$

Corolário do Teorema de Lax-Milgram

Se estivermos nas condições do Teorema de Lax-Milgram e ainda $a(\cdot,\cdot)$ for simétrica e $l(\cdot)$ for contínua, então o elemento $u \in V$ tal que $a(u,v) = l(v) \;\; \forall v \in V$ é caraterizado por

$$J(u) \leq J(v) \;\; \forall v \in V$$

onde $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - l(v) \;\; \forall v \in V$$

Voltando ao Problema Elíptico

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H^1, \text{ tal que} \\ -u^{''} + \lambda u = f \in L^2(I) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1, \text{ tal que} \\ a(u,v) = l(v), \ \forall v \in H_0^1(I) \\ a(u,v) = \int_I u'v' + \lambda \int_I uv, \ \forall u, v \in H_0^1(I) \\ l(v) = \int_I fv, \ \forall v \in H_0^1(I) \end{cases}$$

Voltando ao Problema Elíptico

É possível provar que $a(\cdot,\cdot)$ e $l(\cdot)$ são contínuas e que para $\lambda \geq 0$, $a(\cdot,\cdot)$ é H_0^1-elíptica.
Logo, pelo Teorema de Lax-Milgram, o problema anterior tem uma única solução se $\lambda \geq 0$.

Voltando ao Problema Elíptico

Uma vez que $a(\cdot,\cdot)$ é simétrica, a única solução u do problema anterior é caraterizada por:

$$J(u) \leq J(v) \ \forall v \in H_0^1(I)$$

onde $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v), \ \forall v \in H_0^1(I)$.
Isto é, u é uma função minimizante do funcional $J(v)$ sobre $H_0^1(I)$.

Consequências do Teorema de Lax-Milgram

Consideremos agora

$$\begin{cases} a(u,v) = \int_I u'v' + \lambda \int_I uv, \ \forall u, v \in H^1(I) \\ \lambda > 0 \end{cases}$$

$a(\cdot,\cdot)$ é bilinear e contínua em $H^1(I)$.

$$l(v) = \int_I fv, \ \forall v \in H^1(I)$$

$l(v)$ é linear e contínua em $H^1(I)$.

Consequências do Teorema de Lax-Milgram

Uma vez que $\lambda > 0$, $a(\cdot,\cdot)$ é H^1-elíptica e portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram concluímos que

$$\begin{cases} \exists^1 \ \hat{u} \in H^1(I) \ \text{ tal que} \\ a(\hat{u}, v) = l(v) \ \forall v \in H^1(I) \end{cases}$$

û é diferente de u

u é a solução do problema em $H_0^1(I)$
û é a solução do problema em $H^1(I)$

Consequências do Teorema de Lax-Milgram

É possível provar que û é a única solução do problema

$$\begin{cases} \text{Calcular } \hat{u} \in H^1, \text{ tal que} \\ -\hat{u}'' + \lambda \hat{u} = f \in L^2(I) \\ \hat{u}'(0) = \hat{u}'(1) = 0 \end{cases}$$

EDP Elíptica em dim ≥ 2

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de fronteira Lipschitziana.
Seja $f \in L^2(\partial\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dados e consideremos o problema:

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in D'(\Omega), \text{ tal que} \\ -\Delta u + \lambda u = f \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

EDP Elíptica em dim ≥ 2

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que} \\ -\Delta u + \lambda u = f \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que} \\ \langle -\Delta u, \varphi \rangle + \lambda \langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in D(\Omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1(\Omega), \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u \varphi = \int_\Omega f \varphi, \ \forall \varphi \in D(\Omega) \end{cases}$$

EDP Elíptica em dim ≥ 2

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1, \text{tal que} \\ a(u,\varphi) = l(\varphi), \ \forall \varphi \in D(\Omega) \\ a(u,\varphi) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi, \ \forall \varphi \in D(\Omega) \\ l(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in D(\Omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Calcular } u \in H_0^1, \text{tal que} \\ a(u,v) = l(v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$