Álgebra Linear e Geometria Analítica

1-Matrizes

Departamento de Matemática
FCT/UNL
2016-2017

Programa

1. **Matrizes**
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

Apresentação

- Regente de ALGA dos cursos MIEEC+MIEF+MIEMc: Manuel Messias.
- Horário de dúvidas:
  -Quarta-feira das 15h às 16h 30m;
  -Sexta-feira das 15h às 16h 30m.
- Gabinete 55 do 3º Piso do Edifício 7, Extensão telefónica 10852.
- e-mail:mrj@fct.unl.pt

Apresentação

- Professores dos turnos práticos:

  -Filipe Ramos: P25;
  -Isabel Cabral: P34, P37;
  -Joana Matos: P24, P32, P33, P36;
  -Maria Cecília Perdigão Silva: P35;
  -Maria Helena Santos: P28;
  -Maria Isabel Gomes: P27;
  -Philippe Laurent Didier: P26.

- Professora Responsável de ALGA: Maria Cecília Perdigão Silva.

Avaliação Contínua

Testes de ALGA

Para que um aluno possa efectuar qualquer uma das provas (testes ou exames) terá de inscrever-se no CLIP no local e datas referidas para esse efeito. No dia da prova o aluno terá de trazer consigo:

a) Cartão de Cidadão ou Bilhete de Identidade;
b) Caderno de prova (com o cabeçalho não preenchido).

DATAS

- **1ºTeste** - dia 21-10-2016, Sexta-feira, 17:00
- **2ºTeste** - dia 23-11-2016, Quarta-feira, 14:30
- **3ºTeste** - dia 16-12-2016, Sexta-feira, 17:00

Todos os testes têm a duração de 1 hora.

Avaliação Contínua

Sejam T_1, T_2 e T_3 as classificações obtidas no 1º, 2º e 3º testes, respectivamente, os quais serão classificados de 0 a 20 até às décimas. Um aluno só poderá ficar aprovado na disciplina por avaliação contínua se

$$T_3 \geq 7 \quad \text{e} \quad 0,3 \times T_1 + 0,35 \times T_2 + 0,35 \times T_3 \geq 9,5.$$

Neste caso a classificação final será dada por esta média arredondada às unidades, excepto se esta média for superior ou igual a 17,5, caso em que o aluno poderá optar entre ficar com a classificação final de 17 ou realizar uma prova complementar para defesa de nota.

Frequência

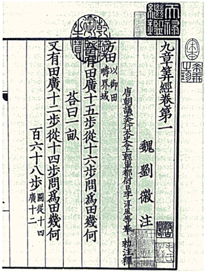
Número máximo de faltas às práticas **3**.

Livro recomendado

ALGEBRA LINEAR (4ª Edição), *Isabel Cabral, Cecília Perdigão, Carlos Saiago*, Escolar Editora 2014

Um pouco de História

Jiu zhang suan-shu ("Nove capítulos da arte matemática") foi um dos mais importantes manuscritos matemáticos chineses. A obra é constituída por uma mistura de conhecimentos de diferentes autores. Foi reescrita e comentada por Liu Hui (250 anos a.C.), um dos mais proeminentes matemáticos chineses da Antiguidade, considerado o Euclides Chinês.


九章筭經卷第一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四廣十二

Um pouco de História

No manuscrito podemos encontrar um surpreendente algoritmo para a resolução do que hoje designamos por sistemas de equações lineares ilustrado através do seguinte problema prático:

"3 feixes de cereal de uma colheita de boa qualidade, 2 feixes de cereal de uma colheita de média qualidade e 1 feixe de cereal de uma colheita de má qualidade são vendidos por 39 *dou*. 2 feixes de cereal de uma colheita de boa qualidade, 3 feixes de cereal de uma colheita de qualidade média e 1 feixe de cereal de uma colheita de má qualidade são vendidos por 34 *dou*. 1 feixe de cereal de uma colheita de boa qualidade, 2 feixes de cereal de uma colheita de qualidade média e 3 feixes de cereal de uma colheita de má qualidade são vendidos por 26 *dou*. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?"

Um pouco de História

Segundo o método chinês o problema deve ser representado pelo seguinte quadro numérico e o procedimento é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Um pouco de História

Segundo o método chinês o problema deve ser representado pelo seguinte quadro numérico e o procedimento é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \color{blue}{6} & \color{red}{3} \\ 2 & \color{blue}{9} & 2 \\ 3 & \color{blue}{3} & 1 \\ 26 & \color{blue}{102} & 39 \end{array}$$

Um pouco de História

Segundo o método chinês o problema deve ser representado pelo seguinte quadro numérico e o procedimento é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \color{blue}{3} & \color{red}{3} \\ 2 & \color{blue}{7} & \color{red}{2} \\ 3 & \color{blue}{2} & \color{red}{1} \\ 26 & \color{blue}{63} & \color{red}{39} \end{array}$$

Um pouco de História

Segundo o método chinês o problema deve ser representado pelo seguinte quadro numérico e o procedimento é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}$$

Um pouco de História

Segundo o método chinês o problema deve ser representado pelo seguinte quadro numérico e o procedimento é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \color{blue}{3} & 0 & \color{red}{3} \\ \color{blue}{6} & 5 & 2 \\ \color{blue}{9} & 1 & 1 \\ \color{blue}{78} & 24 & 39 \end{array}$$

Um pouco de História

Segundo o método chinês o problema deve ser representado pelo seguinte quadro numérico e o procedimento é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Um pouco de História

Segundo o método chinês o problema deve ser representado pelo seguinte quadro numérico e o procedimento é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \color{blue}{0} & 0 & 3 \\ \color{blue}{20} & \color{red}{5} & 2 \\ \color{blue}{40} & 1 & 1 \\ \color{blue}{195} & 24 & 39 \end{array}$$

Um pouco de História

Segundo o método chinês o problema deve ser representado pelo seguinte quadro numérico e o procedimento é o seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \color{blue}{0} & 0 & 3 \\ \color{blue}{0} & \color{red}{5} & 2 \\ \color{blue}{36} & \color{red}{1} & 1 \\ \color{blue}{99} & \color{red}{24} & 39 \end{array}$$

Um pouco de História

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Pela primeira coluna concluímos que o preço do feixe de má qualidade é $\dfrac{99}{36} = 2,75$ *dou* e depois, por substituição, concluímos que o preço feixe de qualidade média é $4,25$ *dou* e o preço feixe de boa qualidade é $9,25$ *dou*.

Um pouco de História

Utilizando a notação actual o problema pode ser expresso pelo seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z, sobre $\mathbb{R}$, em que x, y e z representam, respectivamente, os preços dos feixes de baixa, média e alta qualidade:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}\right. .$$

A este sistema corresponde a "matriz"

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right].$$

Um pouco de História

Através do algoritmo do manuscrito obtivemos o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z, sobre $\mathbb{R}$:

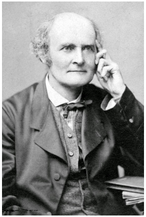
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ & & 5y & + & z & = & 24 \\ & & & & 36z & = & 99 \end{array}\right. .$$

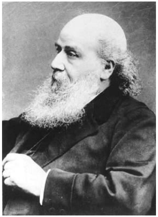
A este sistema corresponde a "matriz"

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 99 \end{array}\right].$$

Um pouco de História

O matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) foi o primeiro a estudar matrizes. Quando era estudante conheceu James Joseph Sylvester (1814-1897), também um ícone da álgebra britânica, de quem se tornou amigo. Nessa época Cayley escreveu um artigo usando o termo Matriz (termo este que já teria sido usado por Sylvester cinco anos antes).





1.1 Algumas definições e exemplos

- $\mathbb{R}$ - conjunto dos números reais
- $\mathbb{C}$ - conjunto dos números complexos
- $\mathbb{K}$ - conjunto dos escalares
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- $n, m \in \mathbb{N}$
- $$\begin{array}{rcl} A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i, j) & \longmapsto & A(i, j) = a_{ij} \end{array}$$

1.1 Algumas definições e exemplos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{21}- elemento de A situado na linha 2 e na coluna 1

linha i de $A = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$

coluna j de $A = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ - conjunto das matrizes $m\times n$ sobre $\mathbb{K}$

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

Dizemos que as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são **iguais**, e escrevemos $A = B$, se $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n$. Caso contrário escrevemos $A \neq B$.

- $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
- $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
- a_{ij}, b_{ij} - elementos **homólogos**

Só podem ser iguais matrizes com igual número de linhas, igual número de colunas e com elementos homólogos iguais.

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

A diz-se uma **matriz–coluna** se $n = 1$.

A diz-se uma **matriz–linha** se $m = 1$.

A diz-se uma **matriz quadrada** se $m = n$. Neste caso diz-se que A é quadrada de **ordem** n ou, simplesmente, que A é uma matriz de ordem n.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -e^{-2} & 5\pi \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

1.1 Algumas definições e exemplos

Seja A uma matriz quadrada de ordem n:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ - **elementos diagonais** de A

$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ - **diagonal principal** de A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ - **triangular superior** ($a_{ij} = 0$ para $i > j$)

1.1 Algumas definições e exemplos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ - **triangular inferior** ($a_{ij} = 0$ para $i < j$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ - **diagonal** ($a_{ij} = 0$ para $i \neq j$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$$ - **escalar** (diagonal com $a_{ii} = \alpha,\ i = 1, \ldots, n$)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ - **matriz identidade**

1.1 Algumas definições e exemplos

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} e^{\pi} & 0 \\ 0 & e^{\pi} \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição

Designamos por **matriz nula** de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e representamos por $0_{m\times n}$ ou simplesmente por 0 se não houver ambiguidade a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, representamos por $-A$ a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que:

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes - Adição de matrizes

Definição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz soma** da matriz A com a matriz B, e denotamos por $A+B$ à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i,j) é $a_{ij}+b_{ij}$ isto é

$$(A+B)_{ij} = a_{ij}+b_{ij} \qquad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Adição de matrizes

Proposição

Tem-se:

1. $\forall_{A,B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A + B = B + A$ (comutativa).
2. $\forall_{A,B,C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad (A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa).
3. $\exists_{0_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \ \forall_{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A$ (existência de elemento neutro).
4. $\forall_{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \ \exists_{-A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$ (existência de oposto).

Se $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, representamos por $A - B$ a matriz $A + (-B)$.

1.2 Operações com matrizes - Multiplicação de um escalar por uma matriz

Definição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz produto do escalar** α **pela matriz** A, e denotamos por αA, à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujo elemento (i,j) é αa_{ij}, isto é,

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad i = 1,\dots,m \quad j = 1,\dots,n$$

$\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de um escalar por uma matriz

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. *Tem-se*

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
4. $1A = A$.
5. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.
6. *Se* $\alpha A = 0_{m\times n}$ *então* $\alpha = 0$ *ou* $A = 0_{m\times n}$.

1.2 Operações com matrizes - Multiplicação de matrizes

Definição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Define-se **produto** da matriz A pela matriz B, e representa-se por AB, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ tal que

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, p.$$

Assim,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9 + 1\times(-8) + 2\times(-1) & 0\times 8 + 1\times(-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0\times(-8) + 5\times(-1) & 3\times 8 + 0\times(-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix} =$$

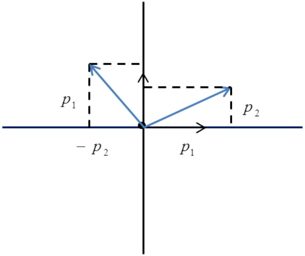
$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

1.2 Operações com matrizes

A matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ transforma qualquer vector $\overrightarrow{x} = (p_1, p_2)$ de $\mathbb{R}^2$ num vector $\overrightarrow{y} = (-p_2, p_1)$ de $\mathbb{R}^2$, pois

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_2 \\ p_1 \end{bmatrix},$$

o que representa uma rotação de $\dfrac{\pi}{2}$ no plano.



1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de matrizes

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam B, C matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa).
2. $A(B+C) = AB + AC$ (distributiva, à esquerda),
   $(B+C)A = BA + CA$ (distributiva, à direita).
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_m A = A$.

Demonstração da 2ª afirmação da propriedade 2:

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B, C \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. Vejamos que

$$(B+C)A = BA + CA.$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de matrizes

Como $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B + C \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$, tem-se

$$(B + C)A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}).$$

Por outro lado, $BA, CA \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ donde

$$BA + CA \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}).$$

Então $(B + C)A$ e $BA + CA$ são ambas matrizes do tipo $p \times n$. Da definição de produto de matrizes resulta que o elemento da posição (i, j) da matriz $(B + C)A$ é

$$((B + C)A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (B + C)_{ik} a_{kj}.$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de matrizes

Pela definição de soma de matrizes tem-se

$$(B+C)_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$$

e, portanto,

$$((B+C)A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (b_{ik} + c_{ik}) a_{kj}.$$

Por outro lado,

$$(BA+CA)_{ij} = (BA)_{ij} + (CA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} + \sum_{k=1}^{m} c_{ik} a_{kj}.$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de matrizes

Utilizando as propriedades distributiva da multiplicação em relação à adição, comutativa e associativa da adição, em $\mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned}((B+C)A)_{ij} &= \sum_{k=1}^{m}(b_{ik}+c_{ik})a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} + \sum_{k=1}^{m} c_{ik}a_{kj} \\ &= (BA)_{ij} + (CA)_{ij} \\ &= (BA+CA)_{ij},\end{aligned}$$

$i = 1, ..., p, j = 1, ..., n$. Logo

$$(B+C)A = BA + CA.\blacksquare$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de matrizes

Algumas propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

- A multiplicação de matrizes <u>não</u> é comutativa.
- $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0)$,
  isto é, pode ter-se $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
- $(AB = AC \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$,
  $(BA = CA \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$.

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Temos que* $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$ *e* $AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.2 Operações com matrizes - Potência de expoente k de uma matriz

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **potência de expoente k de A** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representamos por A^k, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Proposição

Quaisquer que sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $k, l \in \mathbb{N}_0$, tem-se

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

1.2 Operações com matrizes - Potência de expoente k de uma matriz

Demonstração da propriedade 2:

Vamos demonstrar por indução em l. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{N}_0$.

Se $l = 0$, temos $(A^k)^l = (A^k)^0 = I_n = A^0 = A^{k\cdot 0} = A^{kl}$.

Hipótese de Indução: $(A^k)^l = A^{kl}$.

Demonstremos que $(A^k)^{(l+1)} = A^{k(l+1)}$.

Atendendo à definição de potência, à hipótese de indução, à propriedade 1 e à distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{K}$, temos

$$(A^k)^{(l+1)} = (A^k)^l A^k = A^{kl}A^k = A^{kl+k} = A^{k(l+1)}.$$

Logo, para quaisquer $k, l \in \mathbb{N}_0$ tem-se

$$(A^k)^l = A^{kl}. \blacksquare$$

1.3 Matrizes invertíveis

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, tal que $AB = BA = I_n$.

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Definição

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, a única matriz B tal que $AB = BA = I_n$ designa-se por a **inversa** de A e é denotada por A^{-1}.

1.3 Matrizes invertíveis

Em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A \neq 0 \quad \not\Rightarrow \quad A$ invertível.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *<u>não</u> tem inversa porque, para qualquer* $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, se tem*

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2$$

ou

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+5b & 0 \\ -c+5d & 0 \end{bmatrix} \neq I_2.$$

1.3 Matrizes invertíveis

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *uma matriz invertível.*

1. *Se* $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é tal que* $AB = I_n$ *então* $B = A^{-1}$ *e, portanto,* $BA = I_n$.
2. *Se* $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é tal que* $BA = I_n$ *então* $B = A^{-1}$ *e, portanto,* $AB = I_n$.

Demonstração da propriedade 2:

Como A é invertível, A^{-1} existe (e é única). Da igualdade $BA = I_n$ resulta,

$$(BA)A^{-1} = I_nA^{-1} \;\Leftrightarrow\; B(AA^{-1}) = A^{-1} \;\Leftrightarrow\; BI_n = A^{-1} \;\Leftrightarrow\; B = A^{-1}.$$

Então $AB = AA^{-1} = I_n.\blacksquare$

1.3 Matrizes invertíveis

Teorema

1. *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é invertível então* A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. *Se* $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ *e* A *é invertível então* αA *é invertível e* $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.
3. *Se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. *Mais geralmente, se* $k \in \mathbb{N}$ *e* $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* $A_1 \cdots A_k$ *é invertível e* $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}$.
5. *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é invertível então, para qualquer* $k \in \mathbb{N}$, A^k *é invertível e* $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

1.3 Matrizes invertíveis

Demonstração da propriedade 4:

Vamos demonstrar por indução em k que se $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}$.

Se $k = 1$ a afirmação é trivial. Para $k = 2$ temos, pela Propriedade 3, A_1A_2 é invertível e $(A_1A_2)^{-1} = {A_2}^{-1}{A_1}^{-1}$.

Hipótese de Indução: Se $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}$.

Demonstremos que se $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_kA_{k+1}$ é invertível e $(A_1 \cdots A_kA_{k+1})^{-1} = {A_{k+1}}^{-1}{A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}$.

Pela hipótese de indução, $A_1 \cdots A_k$ é invertível donde, pela Propriedade 3, $(A_1 \cdots A_k)A_{k+1}$ é invertível e

$$((A_1 \cdots A_k)A_{k+1})^{-1} = {A_{k+1}}^{-1}(A_1 \cdots A_k)^{-1}.$$

1.3 Matrizes invertíveis

Finalmente, pela hipótese de indução e pela propriedade associativa da multiplicação de matrizes, concluímos que $A_1 \cdots A_k A_{k+1}$ é invertível e

$$\begin{aligned}(A_1 \cdots A_k A_{k+1})^{-1} &= {A_{k+1}}^{-1}(A_1 \cdots A_k)^{-1} \\ &= {A_{k+1}}^{-1}({A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}) \\ &= {A_{k+1}}^{-1}{A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}. \blacksquare\end{aligned}$$

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz transposta** de A, e representamos por $A^\top$, a matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$\left(A^\top\right)_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

1. $\left(A^\top\right)^\top = A$.
2. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.
3. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$.
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
5. $\left(A^k\right)^\top = \left(A^\top\right)^k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$.
6. *Se A é invertível então $A^\top$ é invertível e* $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Demonstração da propriedade 2: Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então $(A+B)^\top$ e $A^\top + B^\top$ pertencem ambas a $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Vejamos que os elementos homólogos de $(A+B)^\top$ e $A^\top + B^\top$ são iguais, isto é, que

$$\left((A+B)^\top\right)_{ij} = \left(A^\top + B^\top\right)_{ij}.$$

Tem-se, pelas definições de adição e transposição de matrizes,

$$\begin{aligned}\left(A^\top + B^\top\right)_{ij} &= \left(A^\top\right)_{ij} + \left(B^\top\right)_{ij}\\ &= (A)_{ji} + (B)_{ji}\\ &= (A+B)_{ji} = \left((A+B)^\top\right)_{ij},\end{aligned}$$

$i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$. Logo $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.■

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Definição

Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A = A^\top$ e **hemi–simétrica** se $A = -A^\top$.

Definição

Dizemos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é **simétrica** se $a_{ij} = a_{ji} \quad i,j = 1,\ldots,n$ e que é **hemi-simétrica** se $a_{ij} = -a_{ji} \quad i,j = 1,\ldots,n$.

Exemplo

A matriz $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$ *é simétrica. A matriz* $\begin{bmatrix} 0 & \pi i & 2i \\ -\pi i & 0 & -3 \\ -2i & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *é hemi–simétrica. A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ *não é simétrica nem hemi–simétrica.*