Matemática II

Funções de várias variáveis

Derivadas Parciais

Manuel Messias Rocha de Jesus

Departamento de Matemática
FCT-UNL
mrj@fct.unl.pt

2023-2023

Matemática II - 2023 - Funcionamento

- **Regras de Avaliação**
  - Avaliação Contínua
    - Frequência = 2/3 aulas práticas (17 num total de 26)
    - 2 testes
  - Avaliação por exame Final
    - Exame de Recurso
  - Possibilidade de repetição de um dos testes na Época de Recurso
- **Datas de avaliação**
  - Avaliação Contínua
    - 1º Teste - 26/04/2023 às 15h às 16h 30m (quarta-feira)
    - 2º Teste - 14/06/2023 às 10h às 11h 30m (quarta-feira)
  - Avaliação por exame Final
    - Exame de Recurso - / - /2023 às (-)

Matemática II - 2023 - Funcionamento

- **Horário de dúvidas**
  - - Prof. Manuel Messias (Ed. VII, 3º Piso, Gab. 55, Ext. 10852):
    - Terça-feira das 16h às 17h 30m.
    - Quinta-feira das 18h às 19h 30m (**online**).

Matemática II - 2023 - Funcionamento

Programa

Matemática II

1. **Aplicações do cálculo diferencial:**

   derivadas parciais; regressão linear; erros em medições; propagação do erro máximo; aproximação linear de uma função.

2. **Cálculo Integral:**

   cálculo de primitivas e integrais; equações diferenciais de variáveis separáveis.

5. **Introdução às probabilidades e estatística:**

   variáveis aleatórias; média, variância e desvio padrão; a distribuição Normal; intervalo de confiança para a média de uma população normal; distribuição t-student; testes unilaterais e bilaterais.

Matemática II - 2023 - Funcionamento

Bibliografia

1 ANTON, Howard; Bivens Irl; Davis Stephen - Cálculo vol I e II, 8ª edição, Bookman, 2007.

2 Bento, Murteira- Probabilidades e Estatistica volI e II, McGraw-Hill.

3 Spiegel, Murray- Estatistica, McGraw-Hill, 1984.

Matemática II - 2023 - Derivadas

Para funções de uma só variável, a derivada de uma função f num ponto a representa a taxa de variação da função nesse ponto e é dada pelo limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Relembremos algumas das principais regras de derivação: sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Consideremos ainda duas funções de variável real, f e g, de variável x.

$(f+g)' = f' + g'$
$\alpha' = 0$
$(fg)' = f'g + fg'$ (em particular, $(\alpha g)' = \alpha g'$)

Matemática II - 2023 - Derivadas

$(g \circ f)' = (g(f))' = g'(f)f'$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

$x' = 1$	
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
$(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt[n]{f})' = \dfrac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$

Matemática II - 2023 - Derivadas

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a f)' = \dfrac{f'}{f \ln a}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^f)' = e^f f'$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^f)' = a^f f' \ln a$
	$(f^g)' = g f^{g-1} f' + f^g g' \ln f$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin f)' = f' \cos f$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos f)' = -f' \sin f$

Matemática II - 2023 - Derivadas

Exemplos

1. $(2^x + x^2 + 1)' = (2^x)' + (x^2)' + (1)' = 2^x \ln(2) + 2x + 0.$

2.
$$\begin{aligned}(x^3 \cos(x))' &= 3x^2 \cos(x) + x^3(-\sin(x)) \\ &= 3x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x).\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}(\sin^2(x))' &= (\sin(x)\sin(x))' \\ &= \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Exemplos

4.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

Logo

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).$$

Matemática II - 2023 - Funções de várias variáveis

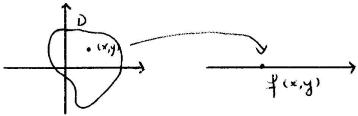
A temperatura na superfície da Terra é uma função das variáveis latitude e longitude.

$T = f(x, y)$, $T-$ temperatura, $x-$ latitude, $y-$ longitude.

Este é um exemplo de uma função de duas variáveis.

Definição

Uma função de duas variáveis é uma correspondência unívoca de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$. Escrevemos



$$\begin{array}{rccc} f: & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y). \end{array}$$

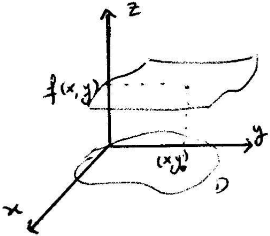
A D chamamos domínio da função f; ao conjunto das imagens

$$\{z \in \mathbb{R} : \ z = f(x, y), \ (x, y) \in D\}$$

chamamos contradomínio de f e denotamo-lo por D'; e ao conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D, \ z = f(x, y)\}$$

chamamos gráfico de f.

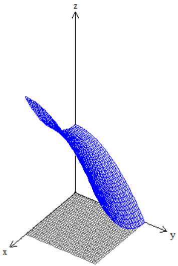


Exemplo

Consideremos a função $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$, de domínio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}.$$

O esboço do seu gráfico é



Analogamente se definem funções de três ou mais variáveis. No caso das três variáveis, temos

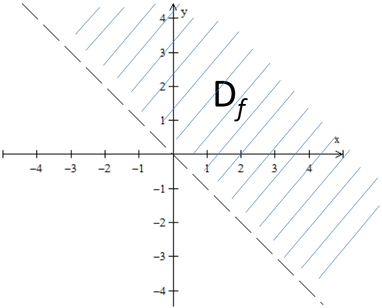
$$\begin{array}{rccc} f: & D \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z). \end{array}$$

Neste caso, o gráfico é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$, pelo que não é possível representar graficamente uma tal função.

Exemplo

Considere-se a função de duas variáveis $f(x,y) = \ln(x+y)$. O maior domínio de definição desta função é

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x+y > 0\}$.

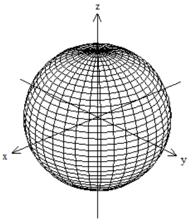


Exemplo

Considere-se agora uma função de três variáveis:
$f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$. Tem-se

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

O domínio da função é a esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 1.



Dada uma função de duas variáveis $f(x, y)$ podemos questionar de que forma varia o valor de f quando fixamos y e permitimos que x varie, ou quando fixamos x e permitimos que y varie.

Por exemplo, a lei dos gases ideais estabelece que, sob determinadas condições, a pressão exercida por um gás é uma função do volume do gás e da sua temperatura. Assim, um físico estudando os gases pode estar interessado na taxa de variação da pressão se o volume se mantém constante e a temperatura varia, ou ou se a temperatura permanece constante e o volume varia.

Suponhamos que (x_0, y_0) é um ponto do domínio de uma função $f(x, y)$. Se fixamos $y = y_0$ então $f(x, y_0)$ é uma função apenas da variável x que vamos denotar por $g(x)$. O valor da derivada de $g(x)$ em x_0, $g'(x_0)$, dá-nos a taxa de variação instantânea de f em relação a x no ponto (x_0, y_0). De maneira inteiramente análoga, se fixamos $x = x_0$ então $f(x_0, y)$ é uma função apenas da variável y que vamos denotar por $h(y)$ e o valor da derivada de $h(y)$ em y_0, $h'(y_0)$, dá-nos a taxa de variação instantânea de f em relação a y no ponto (x_0, y_0).

Definição

Sejam $f(x,y)$ uma função e (x_0,y_0) um ponto do seu domínio. Então a ***derivada parcial de f em ordem a x*** *em (x_0,y_0) é a derivada em x_0 da função que se obtém quando se fixa $y=y_0$ e se permite a variação de x, digamos $g(x)$. Esta derivada parcial é denotada por $f_x(x_0,y_0)$ e é dada por*

$$f_x(x_0,y_0)=g'(x_0) \tag{1}$$

A ***derivada parcial de f em ordem a y*** *em (x_0,y_0) é a derivada em y_0 da função que se obtém quando se fixa $x=x_0$ e se permite a variação de y, digamos $h(y)$. Esta derivada parcial é denotada por $f_y(x_0,y_0)$ e é dada por*

$$f_y(x_0,y_0)=h'(y_0) \tag{2}$$

Exemplo

Determine $f_x(-1,2)$ e $f_y(-1,2)$ para a função

$$f(x,y) = 3x^2y^3 + 2x + 5y.$$

Solução. Tomando

$$g(x) = f(x,2) = 3x^2 \times 2^3 + 2x + 5 \times 2 = 24x^2 + 2x + 10$$

então $f_x(x,2) = g'(x) = 48x + 2$ e portanto

$$f_x(-1,2) = g'(-1) = 48 \times (-1) + 2 = -48 + 2 = -46.$$

Exemplo

Por outro lado, tomando

$$h(y) = f(-1, y) = 3 \times (-1)^2 \times y^3 + 2 \times (-1) + 5y = 3y^3 - 2 + 5y$$

então $f_y(-1, y) = h'(y) = 9y^2 + 5$ e portanto

$$f_y(-1, 2) = h'(2) = 9 \times 2^2 + 5 = 36 + 5 = 41.$$

As fórmulas (1) e (2) da definição anterior fornecem-nos as derivadas parciais de uma função num ponto específico (x_0, y_0). No entanto, a maior parte das vezes é preferível omitir os índices e pensar nas derivadas parciais como funções das variáveis x e y.

Estas funções são respetivamente

$$f_x(x, y) = g'(x) \qquad\qquad f_y(x, y) = h'(y).$$

No próximo exemplo apresentamos uma forma alternativa de efetuar os cálculos do exemplo anterior.

Exemplo

Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para a função

$$f(x, y) = 3x^2y^3 + 2x + 5y$$

e use essas derivadas parciais para calcular $f_x(-1, 2)$ e $f_y(-1, 2)$.

Solução. Mantendo y fixo e derivando em ordem a x obtemos

$$f_x(x, y) = 6xy^3 + 2$$

Exemplo

e mantendo x fixo e derivando em ordem a y obtemos

$$f_y(x,y) = 9x^2y^2 + 5.$$

Assim,

$$f_x(-1,2) = 6 \times (-1) \times 2^3 + 2 = -48 + 2 = -46$$

e

$$f_y(-1,2) = 9 \times (-1)^2 \times 2^2 + 5 = 36 + 5 = 41$$

o que está de acordo com os resultados anteriores.

Matemática II - 2023 - Derivadas parciais

Dada uma função $f(x, y)$ as suas derivadas parciais f_x e f_y também são denotadas pelos símbolos

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y},$$

respetivamente.

A notação usual para as derivadas parciais de $f(x, y)$ num ponto (x_0, y_0) são respetivamente

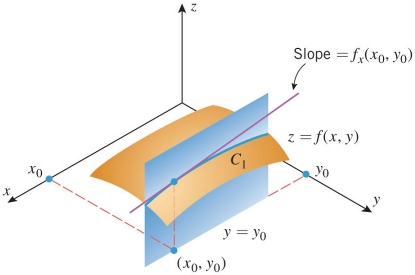
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

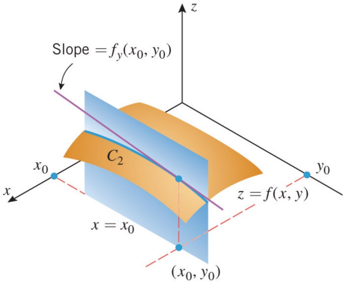
O símbolo ∂ designa-se por sinal de derivada parcial. Este símbolo provém do alfabeto cirílico.

Matemática II - 2023 - Derivadas parciais

Relembremos que se $f(x)$ é uma função real de variável real então o valor de $f'(x_0)$ pode ser interpretado tanto como a taxa de variação de y em relação a x em x_0 ou, como o declive da reta tangente ao gráfico de f em x_0. As derivadas parciais têm interpretações análogas. Suponhamos que C_1 é a interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$ e C_2 é a interseção com o plano $x = x_0$. Assim, $f_x(x, y_0)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de f em relação a x ao longo da curva C_1 e $f_y(x_0, y)$ pode ser interpretada como a taxa de variação de f em relação a y ao longo da curva C_2. Em particular, $f_x(x_0, y_0)$ é a taxa de variação instantânea de f em relação a x no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ da curva C_1 e $f_y(x_0, y_0)$ é a taxa de variação instantânea de f em relação a y no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ da curva C_2.

Matemática II - 2023 - Derivadas parciais





Matemática II - 2023 - Derivadas parciais

Geometricamente $f_x(x_0, y_0)$ pode ser encarado como o declive da tangente à curva C_1 no ponto (x_0, y_0) e $f_y(x_0, y_0)$ pode ser encarado como o declive da tangente à curva C_2 no ponto (x_0, y_0). Dizemos que $f_x(x_0, y_0)$ é a **inclinação da superfície** $z = f(x, y)$ **nas direção de** x no ponto (x_0, y_0) e $f_y(x_0, y_0)$ é a **inclinação da superfície** $z = f(x, y)$ **nas direção de** y no ponto (x_0, y_0).

Exemplo

Seja $f(x, y) = xy^2 + 5x^3$.

1. Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção de x no ponto $(-1, 2)$.

2. Determine a inclinação da superfície $z = f(x, y)$ na direção de y no ponto $(-1, 2)$.

Exemplo

Solução (a). Derivando f em ordem a x com y fixado obtemos

$$f_x(x, y) = y^2 + 15x^2.$$

Assim, a inclinação na direção de x é
$f_x(-1, 2) = 2^2 + 15 \times (-1)^2 = 19$; isto é, f cresce à taxa de 19 unidades por cada unidade de crescimento em x.

Solução (b). Derivando f em ordem a y com x fixado obtemos

$$f_y(x, y) = 2xy.$$

Assim, a inclinação na direção de y é
$f_y(-1, 2) = 2 \times (-1) \times 2 = -4$; isto é, f decresce à taxa de 4 unidades por cada unidade de crescimento em y.