A TEORIA DE CONJUNTOS E A ANÁLISE NO ENSINO DA MATEMÁTICA (ATCAEM)

Manuel Messias Rocha de Jesus

NOVA
NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Identidade:

Tipo	Disciplina
Nome	A Teoria de Conjuntos e a Análise no Ensino da Matemática
Abreviatura	ATCAEM
Sigla	ATCAEM
Código visível	11526

Creditação	
Sistema	Créditos
ECTS	6,0

Descrição geral:

Pretende-se adequar os conhecimentos prévios dos alunos às exigências didáticas da prática letiva no Ensino Secundário e no 3º ciclo do Ensino Básico. Nomeadamente:

-Lecionar com segurança os tópicos do Programa relativos à Lógica, à Teoria de Conjuntos e à Análise.

-Distinguir as abordagens didáticas válidas das que não permitem cumprir os objetivos elencados nos Programas da disciplina.

-Aplicar à lecionação de outros domínios de conteúdos as temáticas transversais relacionadas com a Teoria dos Conjuntos e a Lógica, como a aplicação de técnicas de demonstração gerais ou a utilização apropriada da escrita na comunicação matemática.

Programa (detalhe)

1. Abordagens didáticas da Lógica Bivalente no Ensino Secundário
Valor lógico de uma proposição; Princípios de não contradição e do terceiro excluído.
Operações sobre proposições e respetivas propriedades.

2. A utilização da Teoria dos Conjuntos elementar no Ensino Secundário
Condições e frases quantificadas;
Relação entre operações lógicas sobre condições e sobre os conjuntos.
Dupla inclusão e demonstração de equivalências por dupla implicação.

3. Técnicas de demonstração no Ensino Secundário
Demonstrações por contra-recíproco e por redução ao absurdo.
Escolha de contra-exemplos em contextos variados do Programa do Secundário.

4. Abordagem didática da noção de limite no Programa do 11.º ano.
O Ensino da noção de limite de uma sucessão: intuições adequadas e desadequadas.
Formalização correta da noção de convergência; noção de limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio; limites laterais e no infinito; indeterminações; assíntotas ao gráfico de uma função.
Noção de continuidade.
Noção de diferenciabilidade; aplicação do conceito de derivada ao estudo de funções e à modelação matemática de fenómenos naturais.

Bibliografia

1.Bivar A., Grosso C., Oliveira F. e Timóteo M.C. - Caderno de Apoio às Metas Curriculares de Matemática do Secundário – Matemática A, Direção Geral de Educação, 2014.

2. Campos Ferreira, J. - Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 1982.

3. Figueira, M. - Fundamentos de Análise Infinitesimal, Textos de Matemática, vol. 5, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1996.

4. Franco de Oliveira, A. - Lógica e Aritmética, Trajectos Ciência, Gradiva, 1991.

5. Santos Guerreiro, J. - Curso de Análise Matemática, Livraria Escolar Editora, 1989.

6. Sarrico, C. - Análise Matemática, Leituras e Exercícios, Gradiva, 1997.

7. Sebastião e Silva, J. - Guia para a utilização do Compêndio de Matemática (1º volume), Curso Complementar do Ensino Secundário, Edição GEP, Lisboa, 1975.

Métodos de Avaliação

Frequência: presença em pelos menos 2/3 das aulas (9 aulas).

Os alunos poderão obter aprovação à disciplina por avaliação contínua.
A avaliação contínua terá por base:

- Dois trabalhos individuais escritos sobre temas do programa, sua apresentação oral e discussão (1º trabalho 20% e 2º trabalho 30%);

- Um Teste escrito (50%).

Em alternativa, poderão submeter-se a um exame final que engloba todos os conteúdos da disciplina.

No que se segue, seguiremos o texto “Introdução à Lógica Matemática” do Professor Armando Machado.

O que distingue a atividade Matemática das outras atividades científicas?

“… a capacidade de clarificar conceitos e a de argumentar, isto é, a de adquirir (e transmitir) certezas a propósito da validade de certas afirmações, a partir do reconhecimento da validade de outras, normalmente mais simples.”

Raciocínio Lógico
(surgiu há mais de 2000 anos com a Escola dos geómetras gregos)

- Clarificar conceitos (apresentar definições)
- Argumentar (exibir demonstrações)

As expressões da linguagem matemática. Os conetivos lógicos.

"Há essencialmente dois tipos de expressões com significado matemático, …"

Chama-se ***termo***, ou ***designação***, a uma expressão cujo papel é nomear, ou designar alguma coisa.

Exemplos:
- π
- a soma de 11 parcelas iguais a 22
- $2 \times (8 \div 4)$
- o número racional positivo cujo cubo é 27
- A reta que passa pelo ponto *P* e é perpendicular à reta *s*

Chama-se ***proposição*** a uma expressão que traduz uma afirmação e à qual se pode associar um dos *valores de verdade* "**verdadeiro**" ou "**falso**".

Exemplos:
- $7 \times 3 = 22$
- Qualquer número real tem um quadrado maior ou igual a 0
- 27 não é um número primo
- $\sqrt{3} + \sqrt{7} < \sqrt{17}$ ou $\sqrt{17} < \sqrt{3} + \sqrt{7}$
- Existe um número racional cujo quádruplo é 16

Vamos chamar ***asserção*** a uma proposição que foi enunciada com o objetivo de a identificar como proposição verdadeira.

“A maioria das proposições que encontramos em textos de Matemática são asserções dos seus autores.”

“Muitas das proposições que encontramos na prática podem ser consideradas como construídas a partir de uma, ou mais, proposições mais simples por utilização de uns instrumentos lógicos, a que se costuma dar o nome de ***conetivos***, …”

A ***negação*** de uma proposição é uma nova proposição que é verdadeira se a primeira for falsa e é falsa se a primeira for verdadeira.

“Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a negação de outra, escrevemo-la antecedendo esta última do símbolo de negação $\sim$, depois de, se isso for mais claro, a envolver entre parênteses (alguns autores preferem o símbolo $\neg$).”

Exemplos:

- $\sim (9 \text{ é menor que } 5+3)$
- $\sim$ (há triângulos com um ângulo reto)

"Uma propriedade muito simples da negação é a chamada **lei da dupla negação:** Afirmar que a negação da negação de uma proposição é verdadeira é exatamente o mesmo que afirmar que a proposição original é verdadeira.
Por exemplo, escrevendo, como é usual, na forma "$4 \neq 3$" a negação da proposição "4 = 3", a proposição "$\sim(4 \neq 3)$" tem o mesmo valor de verdade que "4 = 3"."

A ***conjunção*** de duas proposições é uma nova proposição que é verdadeira se as duas primeiras o forem e que é falsa, quer no caso em que as duas primeiras são falsas, quer no caso em que uma delas é verdadeira e a outra falsa.

"Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a conjunção de outras duas, escrevemo-la colocando entre estas o símbolo de conjunção ∧, depois de, se isso for mais claro, as envolver entre parênteses."

Exemplos:
- $9 > 7 \wedge 7 > 5$
- (4 não é um número primo) ∧ (8 não é um número primo)

podemos escrever esta última conjunção na forma
(∼ (4 é um número primo)) ∧ (∼ (8 é um número primo))

A ***disjunção*** de duas proposições é uma nova proposição que é falsa no caso em que as primeiras são ambas falsas e que é verdadeira, quer no caso em que uma das primeiras é verdadeira e a outra é falsa, quer naquele em que as duas primeiras são ambas verdadeiras.

"Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a disjunção de outras duas, escrevemo-la colocando entre estas o símbolo de disjunção ∨, depois de, se isso for mais claro, as envolver entre parênteses."

Exemplos:
- $7 > 5 \vee 3 > 4$
- um dos números 4 e 7 é primo

podemos escrever esta última disjunção na forma

(4 é um número primo) ∨ (7 é um número primo)

"… há frases disjuntivas que se pretende considerar como falsas quando as duas que contribuem para a sua formação forem verdadeiras (costuma-se então dizer que se está em presença de uma *disjunção exclusiva*)."

Exemplos:
"ou vais à praia ou vês o jogo"

Dizer que a **negação da disjunção** de duas proposições é verdadeira é o mesmo que dizer que a **conjunção das negações** das duas proposições é verdadeira.

Exemplo:
dizer que a proposição

$$\sim (e = 2 \vee e = 3)$$

é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição

$$(\sim e = 2) \wedge (\sim e = 3),$$

a qual é escrita habitualmente na forma

$$e \neq 2 \wedge e \neq 3.$$

Dizer que a **negação da conjunção** de duas proposições é verdadeira é o mesmo que dizer que a **disjunção das negações** das duas proposições é verdadeira.

Exemplo:
dizer que é falsa a afirmação

15 é primo **e** par

é o mesmo que dizer que a afirmação

15 não é primo **ou** 15 não é par

é verdadeira.

“Aos dois factos assinalados atrás é costume dar o nome de **primeiras leis de de Morgan**.”

“… A conjunção de várias proposições vai, tal como no caso de duas, ser uma nova proposição que é verdadeira quando todas o forem e vai ser falsa em todos os outros casos (ou seja, quando pelo menos uma for falsa); a disjunção das mesmas proposições vai ser falsa quando todas forem falsas e vai ser verdadeira em todos os outros casos (ou seja, quando pelo menos uma for verdadeira).”

Uma *expressão proposicional*, ou *condição*, é uma expressão com variáveis que se transforma numa proposição quando se substituem essas variáveis por termos convenientes.

“Cada variável tem um *domínio* (normalmente implícito no contexto em que nos situamos), isto é, um certo conjunto de objetos ao qual a variável se refere, e, para substituirmos essa variável por um termo, é necessário assegurarmo-nos de que esse termo designa um objeto desse conjunto.”

Exemplo:
quando falamos da expressão proposicional

$$x^2 - 1 = 0,$$

x, será provavelmente uma *variável real*, isto é, uma variável destinada a ser substituída por um termo que designe um número real.

Se uma mesma variável aparecer mais que uma vez, ela deve ser substituída todas as vezes pelo mesmo termo; pelo contrário, diferentes variáveis podem ser substituídas pelo mesmo ou por diferentes termos.

Uma expressão designatória é uma expressão com variáveis que se transforma num termo quando se substituem essas variáveis por termos.

Exemplo:
expressões como

$$x^3 + y^2 + 1$$

contêm variáveis e transformam-se em termos quando se substituem essas variáveis por termos.

"… os três conetivos que estudámos atrás, e que permitiam formar novas proposições a partir de proposições mais simples, vão permitir formar do mesmo modo novas expressões proposicionais a partir de expressões proposicionais mais simples."

Exemplo:
partindo de expressões proposicionais como

$$x > 4$$

e

$$x < 5$$

podemos obter a expressão proposicional

$$x > 4 \wedge x < 5.$$

Exercícios:

1. Analise cada uma das proposições seguintes de forma a tornar claro o modo como intervêm na sua formação os conetivos lógicos de negação, conjunção e disjunção.

(a) 5 é um divisor comum de 15 e 25.

(b) 7 não é primo nem par.

(c) 5 divide pelo menos um dos números 7 e 10.

2. Utilize as primeiras leis de de Morgan para encontrar proposições cujo valor de verdade é o **oposto** do das seguintes:

(a) π^2 é simultaneamente maior e menor que 10.

(b) Vou ao cinema ou como pipocas.

(c) O Carlos e o João gostam de nadar.

(d) O Filipe não sabe ler ou está distraído.

3. Para cada uma das expressões proposicionais seguintes encontre, se possível, substituições de variáveis que as transformem em proposições verdadeiras e em proposições falsas. Considere quer x e y são variáveis reais, ou seja que têm o conjunto dos números reais por domínio.

(a) $x^2 - 3x = 4$

(b) $x^2 = xy$

(c) $x + y < x$

(d) $x^2 + 1 > 0$

(e) $x + 1 = x - 1$.

Uma *expressão proposicional universal* é uma expressão proposicional que se transforma numa proposição verdadeira, qualquer que seja o modo como substituímos as suas variáveis por termos.

Exemplos:
As seguintes expressões proposicionais, com variável real, são *universais*:

- $x \geq 0 \vee x < 0$
- $x > 1 \vee x < 2$
- $x^2 + 1 > 0$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

"… diremos que uma expressão proposicional é uma *asserção* se for enunciada pelo seu autor como sendo universal."

"… quando falarmos em geral de expressões proposicionais, admitimos que estas possam ser também proposições, olhando assim para as proposições como sendo expressões proposicionais com 0 variáveis. Dizer que uma proposição, enquanto expressão proposicional, é universal corresponde então a dizer que ela é verdadeira. Do mesmo modo, vamos considerar que os termos são expressões designatórias com 0 variáveis."

A *implicação* entre duas proposições, uma primeira o *antecedente* e uma segunda o *consequente*, é uma nova proposição que é **verdadeira** nos casos em que

- O antecedente é verdadeiro e o consequente é verdadeiro
- O antecedente é falso e o consequente é verdadeiro
- O antecedente é falso e o consequente é falso

e é **falsa** no caso em que

- O antecedente é verdadeiro e o consequente é falso

Exemplos de asserções que fazem intervir a implicação.

- **Se** um triângulo tem dois lados iguais**, então** os ângulos opostos são iguais
- **Se** $x \times y = 0$**, então** $x = 0$ ou $y = 0$
- $x > 0$ e $y > z$ **implica** $x \times y > x \times z$.

"Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a implicação entre outras duas, escrevemo-la colocando o antecedente e o consequente, por esta ordem, separados pelo símbolo de implicação ⇒, depois de, se isso for mais claro, os envolver entre parênteses."

Exemplos:

- (dois lados triângulo são iguais) ⇒ (os ângulos opostos são iguais)
- $x \times y = 0 \Rightarrow (x = 0 \ \vee \ y = 0)$
- $(x > 0 \wedge y > z) \Rightarrow x \times y > x \times z$.

Regra da negação de uma implicação: O valor de verdade da negação de uma implicação é o mesmo que o da conjunção entre o antecedente e a negação do consequente.

Exercício 4. Utilize a regra da negação de uma implicação para encontrar expressões proposicionais, cujo valor de verdade seja o da **negação** de cada uma das seguintes:
(a) Se choveu então fui ao cinema.
(b) Se alguém não quer ser lobo então não lhe veste a pele.
(c) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$.

“A *implicação recíproca* é aquela cujo antecedente é o consequente da primeira e cujo consequente é o antecedente da primeira.”

A implicação recíproca de “$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$” é “$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$”.

“A *implicação contrária* é aquela cujo antecedente é a negação do antecedente da primeira e cujo consequente é a negação do consequente da primeira.”

A implicação contrária de “$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$” é “$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$”.

“A *implicação contrarrecíproca* é aquela cujo antecedente é a negação do consequente da primeira e cujo consequente é a negação do antecedente da primeira, …”

A implicação contra-recíproca de “$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$” é “$x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$”.

Regra da passagem ao contrarrecíproco: Uma implicação entre duas proposições e a implicação contrarrecíproca têm sempre o mesmo valor de verdade.

Exercício 5. Para cada uma das expressões proposicionais seguintes encontre formulações para as respetivas recíproca, contrária e contrarrecíproca.
(a) $xy = x \Rightarrow y = 1$.
(b) Quem muito fala pouco acerta.

A *equivalência* entre duas proposições é uma nova proposição que é verdadeira, quer no caso em que as primeiras são ambas verdadeiras, quer no caso em que estas são ambas falsas, e que é falsa no caso em que uma das primeiras é verdadeira e a outra é falsa.

"Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a equivalência entre outras duas, escrevemo-la separando estas pelo símbolo de equivalência $\Leftrightarrow$, depois de, se isso for mais claro, as envolver entre parênteses."

Por exemplo o carácter de equivalência das asserções

- Um triângulo é equilátero se, e só se, é equiângulo
- Uma condição necessária e suficiente para que $x \times y = 0$ é que $x = 0$ ou $y = 0$

fica sublinhado se as escrevermos na forma

- (o triângulo é equilátero) $\Leftrightarrow$ (o triângulo é equiângulo)
- $x \times y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$.

Dizer que a equivalência de duas proposições é verdadeira é o mesmo que dizer que são verdadeiras a implicação que se obtém tomando uma das proposições como antecedente e a outra como consequente e a recíproca desta.

Por exemplo, dizer que

$$x \times y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$$

é universal é o mesmo que dizer que são universais as duas implicações

$$x \times y = 0 \ \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0) \text{ e } (x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow x \times y = 0.$$

Exercício 6. Para cada uma das expressões proposicionais seguintes, analisá-la até onde for possível em termos da sua formação a partir de expressões mais simples, por utilização dos conetivos lógicos. Descrever essa análise utilizando os símbolos lógicos para os conetivos e colocar parênteses, nos casos em que isso seja útil para uma melhor legibilidade ou para evitar ambiguidades.

(a) Ou $x^2 + y^2 > 0$, ou tem-se simultaneamente $x = 0$ e $y = 0$.

(b) Ou $n = 1$, ou n não é divisor de 9, ou n não é divisor de 10.

(c) O número x é maior que pelo menos um dos números y e z.

(d) $x > 3$ ou $x < 5$.

(e) Os números x e $-x$ são ambos menores que y.

(f) n é múltiplo de 5 e de 7.

(g) Nem x nem y são números positivos.

(h) Se $x \neq y$ e x não é menor que y, então y é menor que x.

(i) Se $xy = 1$ e $x \neq y$, então $x < 1$ ou $y < 1$.

Exercício 6.

(j) $3x = 6$ quando $2x = 4$.

(l) $x^2 = 4$ se, e só se, $x = 2$.

(m) Quer no caso em que $x < 0$, quer naquele em que $x > 0$, tem-se $x^2 > 0$.

(n) É condição necessária e suficiente para que $xy < xz$ que seja $x < 0$ e $y < z$.

(o) Se x é simultaneamente maior e menor que 0, então x^2 é menor que 0.

Exercício 7. Verificar quais das alíneas do exercício precedente são asserções válidas, isto é, são proposições verdadeiras ou expressões proposicionais universais (consideramos n como variável natural e x, y e z como variáveis reais). No caso das expressões proposicionais que não sejam universais, apresentar contraexemplos, isto é, substituições das variáveis que transformem as expressões proposicionais em proposições falsas.

Exercício 8. Um estudante menos atento utilizou os conetivos lógicos de forma incorreta para analisar certas expressões proposicionais em linguagem corrente. Descobrir quais seriam essas expressões e explicitar uma análise correta.

(a) $x\sim < y$.

(b) $0 < x \wedge y$.

(c) $x \vee y$ é positivo.

(d) $x > 0 \sim \Rightarrow x > 1$.

(e) O professor ⇒ com a Marta ∧ com o João.

As expressões da linguagem matemática. Quantificadores

O *quantificador universal* é um instrumento lógico que transforma uma expressão proposicional com uma variável numa proposição, a qual é verdadeira se a expressão proposicional for universal e é falsa se a expressão proposicional não for universal, ou seja, se houver pelo menos uma substituição da variável que conduza a uma proposição falsa.

"Quando queremos tornar claro que uma proposição é obtida através da utilização do quantificador universal, enunciamo-la antecedendo a expressão proposicional de partida do símbolo ∀ acompanhado, usualmente por baixo ou em índice, da variável que figura nessa expressão e englobando eventualmente entre parênteses a expressão proposicional, no caso em que isso possa contribuir para uma melhor clareza ou para evitar ambiguidades."

Exemplo:

$$\forall_x (x^2 \geq 0)$$

ou ainda não havendo perigo de confusão

$$\forall_x x^2 \geq 0.$$

"Na proposição obtida é costume dizer que x é uma *variável muda* para lembrar que, a expressão final é uma proposição e não uma expressão proposicional em que x seja candidato a ser substituído (por oposição é costume dizer que as variáveis candidatas a ser substituídas nas expressões proposicionais são *variáveis livres*)."

O *quantificador existencial* é um instrumento lógico que transforma uma expressão proposicional com uma variável numa proposição, que é verdadeira se houver pelo menos uma substituição da variável que conduza a uma proposição verdadeira e que é falsa caso contrário, isto é, se qualquer substituição conduzir a uma proposição falsa.

"Quando queremos tornar claro que uma proposição é obtida através da utilização do quantificador existencial, enunciamo-la antecedendo a expressão proposicional de partida do símbolo ∃ acompanhado, usualmente por baixo ou em índice, da variável que figura nessa expressão e englobando eventualmente entre parênteses a expressão proposicional, …"

Exemplo:
A proposição

- Há um número real cujo cubo é 8

pode ser escrita na forma

- $\exists_x x^3 = 8$.

Exercício 9. Analise cada uma das expressões proposicionais seguintes utilizando os quantificadores e os conetivos lógicos. Em cada caso considere que x, y e z são variáveis cujo domínio são os números reais e que m, n e p são variáveis cujo domínio são os números naturais.

(a) Nem todos os números naturais são pares.

(b) A equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem solução.

(c) Há números naturais que não são pares nem primos.

(d) x é maior que todos os números reais.

(e) Há pelo menos um número real que é maior que todos os números reais.

(f) Existe um número real maior que x.

(g) Para cada número real, existe um número real maior que ele.

(h) As equações $x^2 - 1 = 0$ e $x^2 + 2x + 1 = 0$ têm uma solução comum.

Exercício 10. Para cada uma das expressões seguintes, no caso de se tratar de uma proposição, indique se é verdadeira ou falsa e, no caso de se tratar de uma expressão proposicional com variáveis livres, indicar atribuições de valores às variáveis, se as houver, que a transforme numa proposição verdadeira e numa proposição falsa. Como anteriormente, considerar que x, y e z são variáveis cujo domínio são os números reais e que m, n e p são variáveis cujo domínio são os números naturais.

(a) $\forall_x (x < 0 \vee x > 0)$.

(b) $\forall_x \big(x \neq 0 \Rightarrow (x < 0 \vee x > 0)\big)$.

(c) $\forall_x \big((x \geq 0 \wedge x \leq 0) \Rightarrow x = 0\big)$.

(d) $\forall_n n \geq m$.

(e) $\exists_m(\forall_n n \geq m)$.
(f) $\forall_x x > y$.
(g) $\exists_y(\forall_x x > y)$.
(h) $\exists_y x > y$.
(i) $\forall_x\left(\exists_y x > y\right)$.
(j) $\forall_{m,n} m + n > m$.
(l) $\forall_x(x \times y = 0 \Rightarrow y = 0)$.
(m) $(\forall_x x \times y = 0) \Rightarrow y = 0$.

Dizer que a **negação** de uma proposição obtida através da aplicação do **quantificador existencial** a uma expressão proposicional é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição obtida aplicando o **quantificador universal** à **negação** da expressão proposicional.

Exemplo:
Dizer que "não é verdade que existam números naturais cujo dobro é 5" é o mesmo que dizer que "o dobro de qualquer número natural é diferente de 5".

Dizer que a **negação** de uma proposição obtida através da aplicação do **quantificador universal** a uma expressão proposicional é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição obtida aplicando o **quantificador existencial** à **negação** da expressão proposicional.

Exemplo:
Dizer que “não é verdade que todos os homens são mortais” é o mesmo que dizer que “existe um homem que não é mortal”.

“Aos dois factos assinalados atrás é costume dar o nome de **segundas leis de De Morgan**.”

Exercício 11. Utilize as segundas leis de De Morgan para obter proposições com valores de verdade **opostos** aos das seguintes:
(a) Todos os homens são vaidosos.
(b) Há números naturais cujo quadrado é ímpar.
(c) Existe um número real que é maior que o seu quadrado.

Exercício 12. Analise cada uma das expressões proposicionais seguintes utilizando os quantificadores e os conetivos lógicos. Em cada caso considere que x, y e z são variáveis cujo domínio são os números reais e que m, n e p são variáveis cujo domínio são os números naturais.
(a) Todos os números primos são ímpares ou iguais a 2.
(b) Não existe divisor comum de m e n para além de 1.
(c) Há pelo menos um número natural sem nenhum divisor, além de 1 e 7.
(d) Todos os números reais, com a possível exceção de 0, têm um quadrado maior que 0.
(e) Todos os números reais, exceto 0, têm um quadrado maior que 0.