INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

MODELAÇÃO DA EXCITAÇÃO DINÂMICA SUPERFICIAL DO SUBSOLO
APLICAÇÃO À ANÁLISE ESPECTRAL DE ONDAS DE SUPERFÍCIE

José Nuno Varandas da Silva Ferreira

(Licenciado)

Dissertação elaborada no Laboratório Nacional de Engenharia Civil
para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Estruturas pela Universidade
Técnica de Lisboa, no âmbito do protocolo de cooperação entre o IST e o LNEC

Orientador: Doutor João Paulo Bilé Serra
Co-orientador: Doutor Luís Manuel Coelho Guerreiro

Júri

Presidente: Doutor João José Rio Tinto de Azevedo
Vogais: Doutor Rui Artur Bártolo Calçada
Doutor João Paulo Bilé Serra
Doutor Luís Manuel Coelho Guerreiro

Lisboa, Janeiro de 2005

Modelação da excitação dinâmica superficial do subsolo
Aplicação à análise espectral de ondas de superfície

Resumo

A presente dissertação tem como tema a modelação da propagação de ondas de Rayleigh induzidas pela introdução pontual de energia à superfície com características espectrais conhecidas ou mensuráveis.

Em primeiro lugar apresentam-se as leis matemáticas que descrevem o fenómeno da propagação de ondas, identificam-se os principais parâmetros que intervêm no fenómeno e balizam-se os diferentes estádios de comportamento dinâmico dos solos que determinam os modelos constitutivos a utilizar. Seguidamente descreve-se o método de Haskell-Thomson e o método dos estratos finos de Kausel, ambos aplicáveis ao problema da propagação em meios estratificados. Aplicando um e outro método apresentam-se os resultados em termos de curvas de dispersão e modos de propagação calculados para três configurações geotécnicas simuladas.

Finalmente calculam-se as curvas de dispersão efectivas por resolução do problema directo através de um processo de sobreposição modal, comparam-se resultados e avalia-se a importância dos diversos factores condicionantes da optimização da configuração de um ensaio de excitação dinâmica superficial, nomeadamente, o número e distância entre sensores de medição.

Analysis of Surface Dynamic Loading of Subsoil.
Application to CSW

Abstract

This work deals with the propagation of Rayleigh waves in stratified media, concerning the solution of the direct problem of determining the displacement field induced by a superficial dynamic point source of energy with known or measurable spectral characteristics.

Firstly, the mathematical formulation applied in wave propagation phenomenon is described in some detail, as well as the soil cyclic behaviour. The Haskell-Thomson method is then described and some results obtained with it are presented for three different soil profiles. Next, the thin layer method is described and subsequently applied to the same soil profiles as before. Comparisons are made between both sets of results and the relative merits of each method from the computational point of view are analysed.

Finally, the effective dispersion curves are estimated for the same examples and some final considerations are made about the experimental set-up optimisation for the superficial dynamic test execution.

Palavras-Chave

ondas de Rayleigh

modos de propagação

curva de dispersão

meios estratificados

dinâmica dos solos

ensaio de campo

Key-Words

Rayleigh waves

propagation modes

dispersion curve

multilayered media

soil dynamics

in situ test

Agradecimentos

Começo por agradecer ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil, na pessoa do seu Director Professor Nunes Correia, as excelentes condições de que pude dispor, materiais e logísticas, durante todo o trabalho de investigação e escrita desta Dissertação de Mestrado.

Agradeço ao orientador Professor Investigador João Paulo Bilé Serra muito para além das orientações, revisões e as incontáveis lições de ciência, o exemplo notável que sempre tem constituído, a quem devo muito mais do que julgo, alguma vez, poder retribuir.

Ao co-orientador Professor Luís Manuel Coelho Guerreiro agradeço as suas sugestões e o interesse desde sempre demonstrados, e ainda as suas proveitosas lições de Dinâmica de Estruturas no IST.

Agradeço a todos os investigadores, colegas e experimentadores do LNEC, o apoio, o convívio e o riso nos momentos de pausa entre o trabalho. Em particular, agradeço à Professora Investigadora Laura Caldeira o incentivo, interesse e afabilidade que sempre demonstrou.

Aos colegas da Gesbau agradeço a amizade e o apoio desde sempre demonstrados e em particular ao Engenheiro António Carlos Teles de Sousa Gorgulho, a quem devo enorme estima e apreço, agradeço a paciência, a compreensão e a confiança em mim depositadas.

Por fim, um obrigado muito especial, do fundo do meu coração, aos meus avós, à minha mãe, à minha irmã, e à Ana, pelos incentivos, pelos conselhos, pelos sacrifícios.

Índice do Texto

Índice de Figuras

Simbologia

Alfabeto Grego

δ_{ij}	delta de Kronecker
ε_{ij}	campo tensorial de deformações
$\bar{\varepsilon}$	deformação volúmica
Φ	função potencial escalar
λ	constante de Lamé
λ	comprimento de onda
μ	constante de Lamé
ρ	massa volúmica
σ_{ij}	campo tensorial de tensões
υ	coeficiente de Poisson
ω	frequência angular
Ω_i	rotações em torno do eixo x_i
ξ	coeficiente de amortecimento histerético
ψ_β	função de fase composta associada à direcção β, $\beta=1,3$
Ψ	função potencial vectorial
∇	operador nabla
∇^2	operador Laplaciano

Alfabeto Latino

e_{ij}	componente deviatórica do tensor das deformações
E_{ijkl}	tensor constitutivo de quarta ordem
E	módulo de Young
f	frequência linear
G	módulo de rigidez elástica de distorção

G_{ijkl}	tensor de funções de relaxação
G^*_{ijkl}	Tensor módulo complexo
G_{max}	módulo de distorção máximo
G_{sec}	módulo de distorção secante
G_S	função de relaxação de corte
G^*_S	módulo complexo de corte
G_V	função de relaxação volumétrica
G^*_V	módulo complexo de deformação volumétrica
J_{ijkl}	tensor de funções de fluência
k	número de onda
k_j	número de onda associado ao modo de propagação j
K	módulo de rigidez elástica volumétrica
K	quociente entre v_R e v_S
r_1, r_2	coordenadas dos vectores próprios solução do problema homogéneo associados a deslocamentos na direcção x_1 e x_3, respectivamente
r_3, r_4	coordenadas dos vectores próprios solução do problema homogéneo associados a componentes de tensão na direcção x_1 e x_3, respectivamente
s_{ij}	componente deviatórica do tensor das tensões
t	tempo
u_i	campo vectorial de deslocamentos
$\ddot{u}_i$	campo vectorial de acelerações
U	velocidade de grupo
v	velocidade de fase
$\hat{V}_\beta$	velocidade de fase efectiva associada à direcção β, $\beta=1,3$
v_P	velocidade de fase das ondas P

v_S	velocidade de fase das ondas S
W	energia média armazenada durante um ciclo
ΔW	energia dissipada pelo material durante um ciclo
x	coordenada de posição na propagação unidireccional
x_i	coordenadas de posição num referencial cartesiano

1 Introdução

"It is the continuous nature of geologic materials that causes soil dynamics and geotechnical earthquake engineering to diverge from their structural counterparts. While most structures can readily be idealized as assemblages of discrete masses with discrete sources of stiffness, geologic materials cannot. They must be treated as continua, and their response to dynamic disturbances must be described in the context of wave propagation." [Kramer S., 1996: pág. 143]

1.1 Relevância e enquadramento do tema

A engenharia sísmica, na sua vertente de identificação das características geotécnicas dos solos e dos aspectos geológicos particulares que influenciam e determinam a forma como ondas de origem sísmica se propagam e se manifestam à superfície, surgida há longa data no seio das principais preocupações e temáticas de investigação em engenharia, desempenha hoje em dia um papel determinante em múltiplos domínios da engenharia civil, para além do âmbito estrito dos problemas que concernem a propagação de sismos.

Em particular, a constatação da forte dependência das propriedades de propagação de ondas com as características de rigidez e de dissipação de energia dos solos afectados, levantaram o interesse no processo inverso da identificação geotécnica do subsolo com recurso a técnicas de excitação dinâmica forçada, vulgarmente designadas de métodos sísmicos.

O recurso a métodos sísmicos para caracterização geotécnica do subsolo tem assumido relevância progressiva no vasto domínio dos ensaios consagrados para este efeito, o que resulta, por um lado, do progresso tecnológico verificado nos equipamentos e técnicas de ensaio, e por outro, do sistemático alargamento da base de dados de resultados, permitindo estabelecer correlações interpretativas com parâmetros de modelos constitutivos já bem estudados e estabelecidos, como sejam o modelo elástico linear ou o modelo linear visco-elástico.

Entre os diversos métodos sísmicos conhecidos (Seismic cross-hole test, Seismic Down-hole test ou métodos com recurso ao cone de penetração), o método da análise espectral de ondas de superfície (SASW e CSW) apresenta a conveniência de se tratar de uma técnica de execução rápida e expedita, não intrusiva e que possibilita a caracterização de elevadas profundidades de terreno [Kramer S., 1996].

O princípio de aplicação do método de excitação superficial dinâmico reside no facto de, em meios heterogéneos, ondas com diferentes frequências se propagarem a diferentes velocidades dependendo esta relação da geometria e das propriedades mecânicas do meio afectado.

Num ensaio de excitação vertical dinâmica o registo do movimento provocado por uma fonte de energia pontual à superfície, permite, através de um processo de análise espectral de sinais, determinar uma curva de dispersão que representa a referida dependência da velocidade de propagação das ondas com a frequência.

A interpretação dos resultados destes ensaios assenta, obrigatoriamente, sobre um modelo teórico de propagação das ondas superficialmente suscitadas, e a determinação dos parâmetros geotécnicos requeridos numa resolução de um problema inverso cujo produto final são as estimativas para os parâmetros de um modelo teórico adoptado.

A construção de modelos teóricos fiáveis e adaptados a condições típicas de heterogeneidade geológica constitui, como tal, um dos passos determinantes para a efectivação deste método de caracterização geotécnica.

1.2 Objectivo e estrutura da dissertação

O objectivo da presente dissertação prende-se com a efectivação de ferramentas computacionais adequadas para a resolução do problema directo correspondente ao cálculo do campo vectorial de deslocamentos induzido pela introdução pontual de energia mecânica à superfície com características espectrais conhecidas ou mensuráveis. Procurar-se-á, com base nos resultados obtidos para diversos perfis geotécnicos paradigmáticos, focar as principais características associadas ao fenómeno da propagação de ondas de superfície e avaliar a importância dos diversos factores condicionantes da optimização da configuração de ensaio, nomeadamente, o posicionamento dos sensores de medição.

O texto desta dissertação está dividido em seis capítulos.

Após a presente introdução que constitui o primeiro capítulo, no 2º capítulo faz-se uma descrição do fenómeno da propagação de ondas, destacando-se as características particulares que regem a propagação de ondas de Rayleigh, por serem as ondas dominantes num ensaio de excitação superficial dinâmica e as responsáveis principais pelo fenómeno de dispersão referido.

No 3º capítulo descreve-se o método de Haskell-Thomson, apresentam-se os resultados numéricos obtidos para algumas configurações geotécnicas simuladas e procuram-se as justificações teóricas interpretativas.

No 4º capítulo descreve-se o método dos estratos finos e comparam-se os resultados obtidos através de um e outro método.

No 5º capitulo calculam-se as curvas de dispersão aparentes para as mesmas configurações geotécnica simuladas, analisam-se os resultados e estabelecem-se recomendações quanto ao posicionamento dos transdutores durante um ensaio de excitação superficial dinâmica.

O 6º capítulo compreende as conclusões finais e as sugestões para desenvolvimentos futuros.

2 Propagação de ondas em meios sólidos contínuos

2.1 Introdução.

A aplicação de energia mecânica sobre um corpo sólido provoca o espalhamento progressivo dessa energia para o interior e à superfície desse corpo através de ondas. Surgem assim diversos tipos de ondas, identificadas segundo as características do movimento que imprimem às partículas do meio afectado, a velocidade com que se propagam, a forma de espalhamento, radial ou cilíndrica, etc.

A divisão primordial entre os vários tipos de ondas estabelece-se entre as designadas ondas volúmicas e ondas de superfície.

As primeiras são ondas características de meios infinitos, com avanço da frente de onda radial a partir da origem do movimento e podem ser subdivididas em ondas P e ondas S.

As ondas P, também designadas de ondas primárias, ondas longitudinais, ondas irrotacionais ou ondas de compressão, são as ondas com maior velocidade de propagação, sendo por isso as primeiras a serem sentidas após aplicação de energia mecânica. Estas ondas imprimem às partículas um movimento colinear com o seu sentido de propagação.

As ondas S, também designadas por ondas secundárias, ondas de corte, ondas rotacionais ou ondas equivolúmicas, caracterizam-se por imprimir movimentos exclusivamente num plano perpendicular ao seu sentido de propagação.

Ao contrário das ondas volúmicas, que, em meios isotrópicos homogéneos, se propagam indiferentemente em todas as direcções, as ondas de superfície propagam-se unicamente numa zona próxima da superfície livre e têm um avanço de frente de onda cilíndrico e não radial.

Na Figura 2.1 ilustra-se o tipo de movimento associado aos vários tipos de onda.

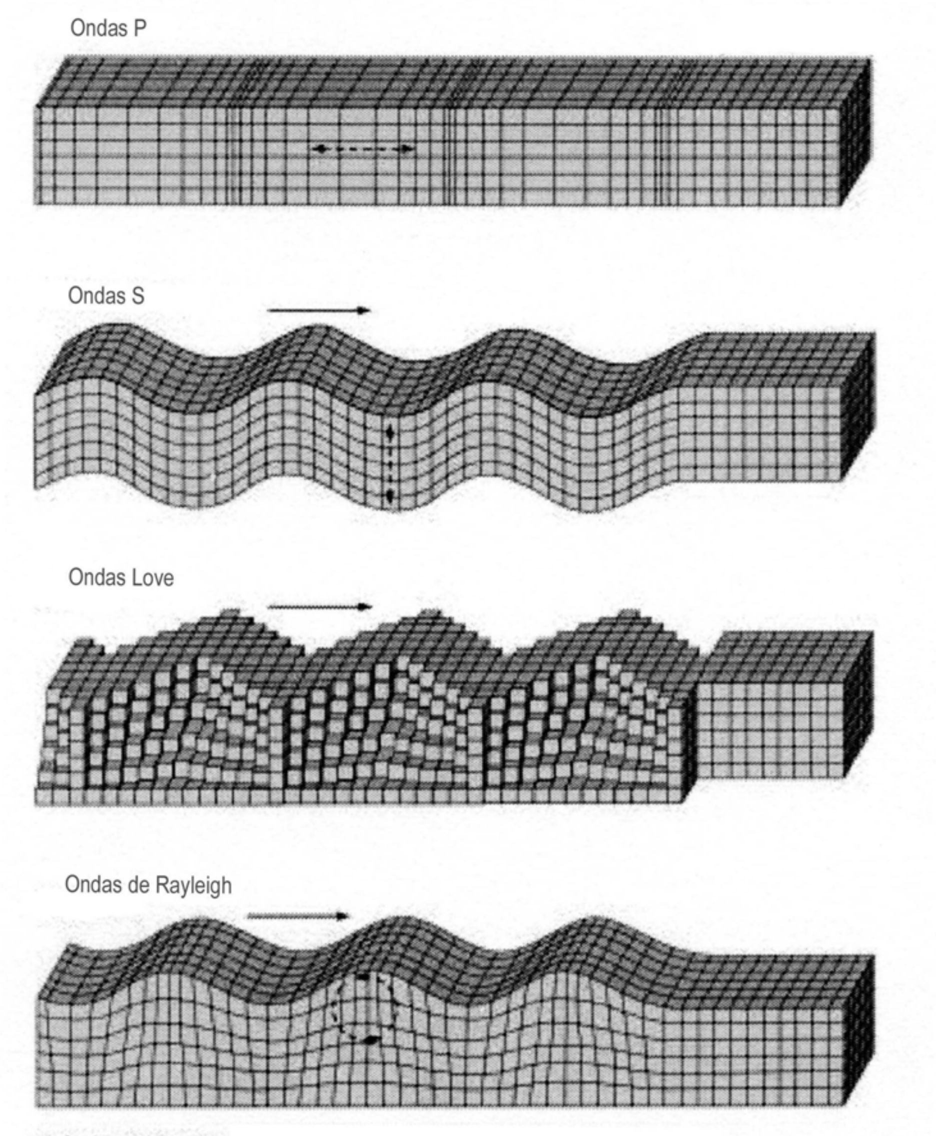


Figura 2.1 – Movimento das partículas associado aos vários tipos de ondas [Bolt, 1976]

Existem, em meios sólidos contínuos, essencialmente dois tipos de ondas de superfície, ondas de Rayleigh e ondas de Love.

As ondas de Love podem ser entendidas como um conjunto de ondas SH (ondas S com movimento das partículas exclusivamente horizontal) restringidas por múltiplas reflexões na camada superficial. É condição obrigatória para o aparecimento deste tipo de ondas que exista uma camada superficial de rigidez inferior à rigidez das camadas subjacentes.

As ondas de Rayleigh, pelo contrário, podem existir tanto em meios estratificados como em semi-espaços infinitos e caracterizam-se por imprimirem às partículas um movimento elíptico, num plano formado pela direcção de propagação e a direcção vertical, sendo a amplitude de movimento decrescente com a profundidade.

A descrição física e analítica que caracteriza a propagação das ondas de Rayleigh em meios elásticos, principal objectivo do presente capítulo, requer, primeiramente, uma apresentação mais ampla do fenómeno da propagação de ondas em meios contínuos, nomeadamente, a descrição da propagação de ondas em meios elásticos infinitos, génese da formulação teórica das ondas de Rayleigh.

2.2 Ondas volúmicas. Conceitos gerais

2.2.1 Propagação de ondas em meio infinito, elástico, homogéneo

Dado tratar-se de um assunto amplamente estudado e descrito por diversos autores [Richart, *et al.*, 1970], [Kramer, 1996], serão apresentados apenas os aspectos essenciais e de maior relevância para a compreensão das matérias subsequentes.

A determinação das equações do movimento para o caso conceptualmente mais simples da propagação de ondas em meios elásticos, infinitos isotrópicos e homogéneos, é realizada a partir do estabelecimento do equilíbrio dinâmico de forças num elemento infinitesimal. A Figura 2.2 mostra a variação das componentes rectangulares de tensões em faces opostas do elemento.

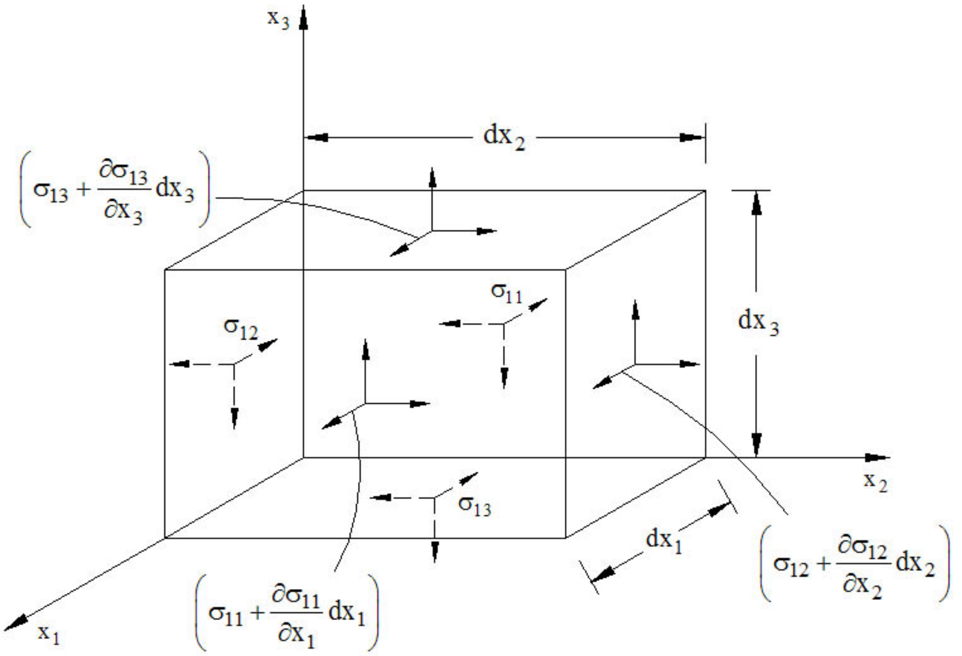


Figura 2.2 – Tensões aplicadas a um elemento infinitesimal num meio elástico infinito

O equilíbrio de forças na direcção x_1 (não considerando a possibilidade de forças mássicas aplicadas), é expresso através da 2ª lei de Newton ou do princípio de Hamilton:

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3+\left(\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3-\sigma_{12}dx_1dx_3\\&+\left(\sigma_{13}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2-\sigma_{13}dx_1dx_2=\rho\left(dx_1dx_2dx_3\right)\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}\end{aligned} \quad (2.1)$$

onde u_i representa o deslocamento na direcção x_i correspondente e ρ a massa volúmica do material.

Simplificando a expressão anterior obtém-se a equação do movimento tridimensional em função das tensões. Por exemplo, para a direcção 1:

$$\rho\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} \quad (2.2)$$

ou em notação tensorial, agora para qualquer direcção i:

$$\rho\ddot{u}_i=\sigma_{ij,j} \qquad i,j=1,2,3 \quad (2.3)$$

onde é válida a convenção da soma de Einstein aplicada a índices repetidos. Como exemplo:

$$\sigma_{ij,j} = \sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3} \quad i = 1,2,3 \tag{2.4}$$

As equações acima apresentadas resultam apenas do equilíbrio de forças no elemento e podem por isso ser consideradas genéricas para qualquer tipo de relação tensão-deformação, meio afectado ou de movimento.

Para materiais elásticos lineares sem dissipação energética é possível definir a tensão como tensão de Cauchy e a deformação como pequena deformação:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.6}$$

onde E_{ijkl} é um tensor de quarta ordem. Considerando a hipótese de elasticidade linear e isotropia do material, o número de coeficientes elásticos independentes associados ao tensor E_{ijkl} reduz-se de 81 para 2, habitualmente designados de constantes de Lamé, λ e μ.

As relações constitutivas para um material isotrópico, elástico-linear podem assim ser expressas por:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.7}$$

ou em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

A relação entre as constantes de Lamé e os parâmetros mais correntes de caracterização constitutiva de um material isotrópico, elástico, linear, são:

Módulo de Young	Módulo de rigidez elástica volumétrica	Módulo de rigidez elástica de distorção	Coeficiente de Poisson
$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$K=\lambda+\frac{2\mu}{3}$	$G=\mu$	$\upsilon=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

Tabela 2.1 – Algumas relações entre parâmetros do modelo constitutivo elástico linear isotrópico

Finalmente, é possível, por introdução das relações atrás anunciadas na equação (2.3), obter as pretendidas expressões para as equações do movimento em meios infinitos, homogéneos, isotrópicos e elásticos lineares (equações de Navier):

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda+\mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} \tag{2.9}$$

ou, em notação vectorial:

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda+\mu)\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} + \mu\nabla^2 u_i \tag{2.10}$$

onde $\bar{\varepsilon}$ representa a deformação volúmica definida por:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} = u_{i,i} \tag{2.11}$$

e ∇^2 o operador Laplaciano definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{2.12}$$

As equações do movimento expressas em (2.9) admitem duas soluções possíveis que fisicamente correspondem à propagação de dois tipos distintos de ondas.

A primeira solução pode ser obtida pela resolução da equação que se obtém derivando cada equação de ordem i relativamente a x_i e seguidamente somando esses resultados. Desta forma obtém-se uma equação de onda expressa por:

$$\rho\frac{\partial^2\bar{\varepsilon}}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\nabla^2\bar{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{\partial^2\bar{\varepsilon}}{\partial t^2} = v_P^2\nabla^2\bar{\varepsilon} \tag{2.13}$$

que corresponde à propagação de ondas longitudinais ou ondas P, onde $\bar{\varepsilon}$ designa a deformação volúmica irrotacional definida em (2.11) e v_P representa a velocidade de propagação da onda que, neste caso, é dada por:

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{2.14}$$

Por sua vez, derivando a equação do movimento (2.9) de ordem i relativamente a x_j e a equação de ordem j relativamente a x_i e subtraindo as expressões obtidas, é-se conduzido à equação (2.15). A resolução de todas as equações deste tipo conduz à segunda solução referida:

$$\rho\left(\ddot{u}_{i,j} - \ddot{u}_{j,i}\right) = \mu\nabla^2\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \tag{2.15}$$

Recordando as equações que relacionam as rotações em torno de cada eixo (Ω_k) com os deslocamentos:

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \tag{2.16}$$

e substituindo na equação (2.15), encontra-se uma expressão alternativa para a equação governativa da segunda solução:

$$\ddot{\Omega}_i = v_S^2\nabla^2\Omega_i \tag{2.17}$$

Esta equação corresponde à propagação de ondas de corte, ou ondas S. A velocidade de propagação das ondas S é dada por:

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{2.18}$$

Da análise do quociente entre as velocidades de propagação dos dois tipos de onda:

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{2 - 2\upsilon}{1 - 2\upsilon}} \tag{2.19}$$

e uma vez que $0<\nu<0.5$ qualquer que seja o material, é possível concluir que a velocidade de propagação das ondas P é sempre superior à velocidade de propagação das ondas S, justificando-se assim a distinção de nomes entre os dois tipos de ondas volúmicas, designadamente, ondas primárias e ondas secundárias.

2.2.2 Propagação unidireccional

Para efeitos de explicitação dos principais parâmetros que caracterizam a propagação de ondas, é seguidamente apresentada a situação conceptualmente mais simples da propagação unidireccional de ondas longitudinais.

Partindo do equilíbrio dinâmico de forças no interior de um elemento cilíndrico recto com secção transversal indeformável e seguindo um procedimento idêntico ao desenvolvido para a obtenção das equações de Navier referentes a meios tridimensionais, é fácil demonstrar que a equação de onda que rege o movimento unidimensional é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_P^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.20}$$

onde u representa o movimento das partículas, colinear com a direcção de propagação x e v_P a velocidade de propagação da onda ou simplesmente velocidade de fase.

A solução, harmónica no tempo e no espaço, para o movimento acima descrito é expressa através de:

$$u(x,t) = A \cdot e^{i(\omega t - kx)} = A \cdot e^{i\omega(t - \frac{x}{\lambda})} \tag{2.21}$$

onde A representa a amplitude da onda e o termo exponencial a sua fase ϕ. O termo k é designado por número de onda e relaciona-se com a frequência angular e com a velocidade de propagação por:

$$k = \frac{\omega}{v_P} \tag{2.22}$$

Para elucidar o motivo da designação velocidade de fase, associada à velocidade de propagação da onda, considerem-se primeiramente dois instantes:

$$t_0 \text{ e } t_1 = t_0 + \Delta t$$

e as duas localizações correspondentes:

$$x_0 \text{ e } x_1 = x_0 + \Delta x$$

associados ao avanço de uma frente de onda onde, por definição (num meio não dissipativo):

$$u(x_0, t_0) = u(x_1, t_1)$$

ou seja:

$$A \cdot e^{i(\omega t_0 - kx_0)} = A \cdot e^{i(\omega t_1 - kx_1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega t_0 - kx_0 = \omega\left(t_0 + \Delta t\right) - k\left(x_0 + \Delta x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

recorrendo à equação expressa em (2.22) chega-se finalmente a:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_P$$

de onde se conclui que a frente de onda se deslocou Δx no intervalo de tempo Δt, à velocidade v_P.

Considere-se seguidamente o movimento de dois pontos, em x_0 e x_1, que para o mesmo instante apresentam o mesmo deslocamento:

$$u(x_0, t) = u(x_1, t)$$

Desta forma,

$$A \cdot e^{i(\omega t - kx_0)} = A \cdot e^{i(\omega t - kx_1 + 2n\pi)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -kx_0 = -k\left(x_0 + \Delta x\right) + 2n\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \frac{2\pi}{k} \cdot n$$

o que significa que entre aqueles pontos decorreu a propagação de n ciclos.

A distância entre dois pontos com igual fase **em ciclos consecutivos** designa-se por comprimento de onda e é representada pela letra λ. A partir da expressão anterior obtém-se:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{2.23}$$

Eliminando k da expressão anterior através da definição dada em (2.22) obtém-se a equação que relaciona a velocidade de fase com a frequência e o comprimento de onda:

$$v_P = f \cdot \lambda \tag{2.24}$$

Em resumo, as principais características cinemáticas da propagação de ondas são definidas pelos parâmetros seguidamente apresentados:

Designação	Símbolo	Unidades S.I.
Frequência angular	ω	rad/s
Frequência	f	Hz
Número de onda	k	rad/m
Comprimento de onda	λ	m
Velocidade de propagação	v	m/s

Tabela 2.2 – Parâmetros de caracterização cinemática das ondas

2.3 Ondas de Rayleigh

A obtenção das equações de onda que regem e descrevem o movimento das partículas afectadas pela passagem de uma onda de Rayleigh é feita a partir da equação de onda genérica de Navier, (2.9), introduzindo nesta as condições de fronteira referentes à existência de uma superfície livre.
Em seguida, descreve-se a propagação de ondas de Rayleigh em meios semi-infinitos elásticos homogéneos, a condição de propagação tridimensional mais simples possível, com vista à identificação das características elementares e genéricas da propagação das ondas de Rayleigh em meios sólidos contínuos, e posteriormente, em 2.3.2, é introduzido o problema da propagação em meios elásticos heterogéneos, com particularização para o caso da heterogeneidade discreta por estratos, caso de maior interesse para o presente trabalho.

2.3.1 Propagação em meio semi-infinito elástico e homogéneo

Considere-se a propagação de uma onda plana na direcção x_1, com componentes do movimento segundo x_1 e x_3 independentes das componentes do movimento na direcção x_2, onde x_3 designa o eixo vertical com sentido positivo para o interior do semi-espaço, de acordo com a seguinte figura apresentada:

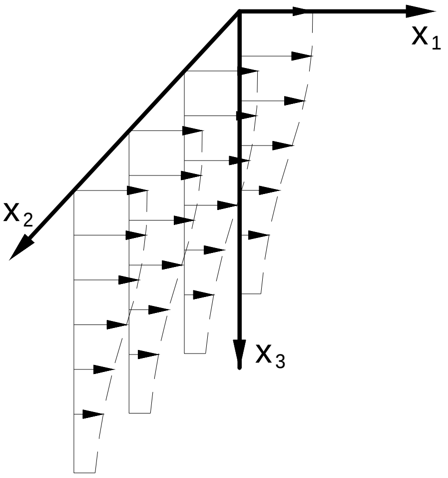


Figura 2.3 – Onda plana com componentes do movimento independentes da coordenada x_2

De acordo com o teorema de decomposição de Helmholtz, qualquer campo vectorial, como é o caso do campo do movimento das partículas criado pela passagem de uma onda, pode ser traduzido pela soma de um campo irrotacional ($\nabla\Phi$) com um campo isovolúmico ($\nabla\times\Psi$) através de:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi - \nabla\times\Psi \tag{2.25}$$

desde que sobre esse campo se verifique:

$$\begin{aligned} [\nabla\cdot\mathbf{u}]_\infty &= 0 \\ [\nabla\times\mathbf{u}]_\infty &= 0 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{u}$ designa o campo vectorial do movimento das partículas, que em coordenadas cartesianas é expresso por $\left(u_1(x_1,x_2,x_3),u_2(x_1,x_2,x_3),u_3(x_1,x_2,x_3)\right)$, Φ é uma função potencial escalar e Ψ é uma função potencial vectorial.

Se aplicarmos o produto interno com o operador ∇, definido por:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{2.26}$$

em ambos os lados da equação (2.25), obtém-se a seguinte equação:

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla^2\Phi \tag{2.27}$$

onde o termo do lado esquerdo não é mais do que a extensão volúmica, como definida na equação (2.11), ou seja, a equação (2.27) é idêntica a:

$$\bar{\varepsilon} = \nabla^2 \Phi \tag{2.28}$$

o que expressa a relação entre a função potencial Φ e a dilatação (irrotacional) do meio. Se, por outro lado, se efectuar o produto externo de ambos os lados da equação (2.25) com o operador ∇, obtém-se, após algumas simplificações, a seguinte equação:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla^2 \Psi \tag{2.29}$$

Atendendo à definição de rotação em torno de um eixo, expressa em (2.16), e admitindo movimento apenas nas direcções 1 e 3, a equação (2.29) transforma-se em:

$$2\Omega_2 = \nabla^2 \Psi_2 \tag{2.30}$$

o que, por sua vez, expressa a relação entre a função potencial Ψ_2 e a rotação equivolúmica em torno do eixo 2, Ω_2.

A equação vectorial (2.25) representa duas equações diferenciais escalares que relacionam o movimento em cada uma das direcções 1 e 3 com as funções potenciais Φ e Ψ:

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_3} \quad \text{e} \quad u_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \tag{2.31}$$

A sua consideração no desenvolvimento das equações (2.10) conduz às seguintes equações de onda em termos das funções potenciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= v_P^2 \nabla^2 \Phi \\ \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} &= v_S^2 \nabla^2 \Psi_2 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Assumindo a propagação harmónica de uma onda na direcção positiva de x_1 as soluções de (2.32) são do tipo:

$$\Phi = F(x_3) \cdot e^{i(\omega t - k x_1)} \tag{2.33}$$

$$\Psi_2 = G(x_3) \cdot e^{i(\omega t - kx_1)}$$

Note-se que ainda não foram introduzidas as condições de fronteira particulares da propagação de ondas de Rayleigh pelo que as equações indicadas em (2.33) representam a solução genérica de propagação de ondas planas segundo a direcção x_1.

As funções $F(x_3)$ e $G(x_3)$ traduzem a variação das amplitudes da componente dilatacional e rotacional da onda com a profundidade, e ω e k são respectivamente a frequência e o número de onda, conforme definidos em 2.2.2.

Dado que a amplitude das ondas de Rayleigh diminui rapidamente da superfície para o interior, é natural considerar uma solução exponencial negativa para $F(x_3)$ e $G(x_3)$, da forma:

$$F(x_3) = A_1 e^{-qx_3}$$
$$G(x_3) = A_2 e^{-sx_3} \tag{2.34}$$

Substituindo estas definições nas equações (2.33) obtêm-se as seguintes expressões para as funções potenciais Φ e Ψ:

$$\Phi = A_1 e^{-qx_3} \cdot e^{i(\omega t - k_R x_1)}$$
$$\Psi_2 = A_2 e^{-sx_3} \cdot e^{i(\omega t - k_R x_1)} \tag{2.35}$$

onde k_R designa o número de onda associado à propagação da onda de Rayleigh.

Desenvolvendo as equações de onda (2.32) e utilizando as definições atrás apresentadas determinam-se as expressões de cálculo das incógnitas exponenciais q e s. Por exemplo para a função Φ:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Phi$$

$$\nabla^2 \Phi = \left(-k_R^2 + q^2\right)\Phi$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = v_P^2 \nabla^2 \Phi \Leftrightarrow -\omega^2 = -v_P^2 k_R^2 + v_P^2 q^2$$

ou seja:

$$q^2 = k_R^2 - \frac{\omega^2}{v_P^2} \tag{2.36}$$

De igual forma é possível demonstrar que:

$$s^2 = k_R^2 - \frac{\omega^2}{v_S^2} \tag{2.37}$$

O cálculo da velocidade de propagação da onda de Rayleigh é feito a partir da imposição das condições de fronteira associadas à existência de uma superfície livre. Estas resultam do anulamento do vector tensão ao longo superfície livre, as quais equivalem a:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, x_2, 0) &= 0 \\ \sigma_{31}(x_1, x_2, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Introduzindo nestas equações as relações constitutivas (2.7), as relações de compatibilidade (2.6) e as relações entre o movimento e as funções potenciais determinadas em (2.31), obtém-se a seguinte equação característica:

$$K^6 - 8K^4 + \left(24 - 16\frac{1}{\alpha^2}\right)K^2 + 16\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) = 0 \tag{2.39}$$

onde:

$$K = \frac{v_R}{v_S}$$

$$\alpha = \frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}$$

representam as razões adimensionais entre v_R e v_S e entre v_P e v_S, sendo v_R a velocidade de fase das ondas de Rayleigh.

Por análise das equações anteriores verifica-se que a relação entre as velocidades dos distintos tipos de ondas depende exclusivamente do coeficiente de Poisson. Por outras palavras, a velocidade de propagação de ondas de Rayleigh, num semi-espaço elástico homogéneo isotrópico, não depende da frequência da onda.

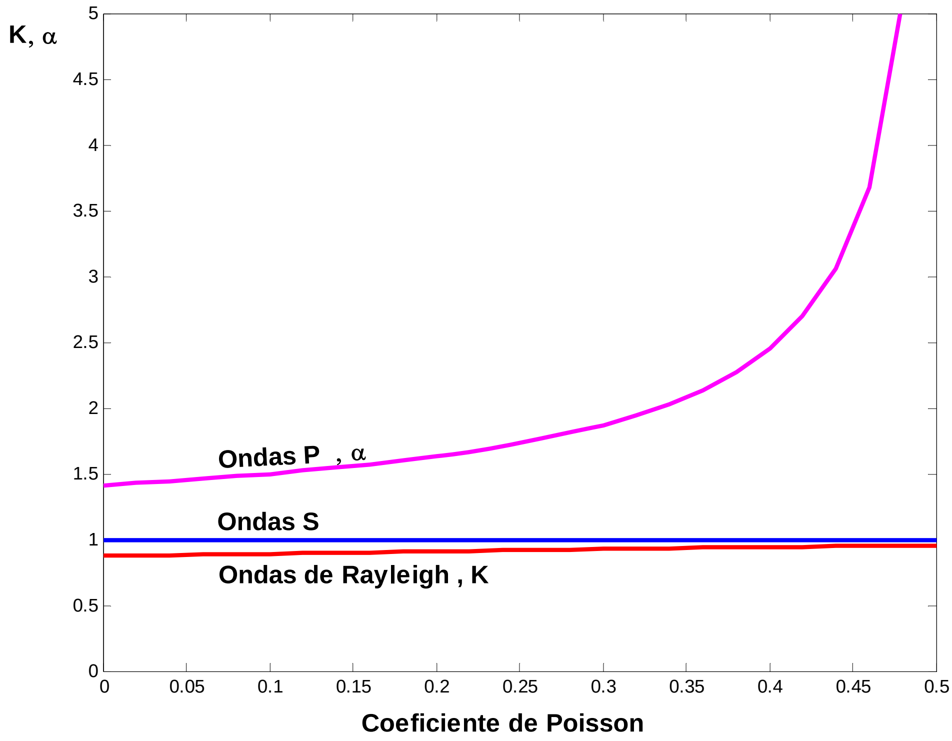


Figura 2.4 – Relação entre velocidades de propagação das ondas num semi-espaço elástico homogéneo

Pela Figura 2.4 é evidente que, nas condições enunciadas, a velocidade das ondas de Rayleigh é muito próxima mas inferior à velocidade das ondas S, sendo o domínio de variação dado por:

$$0.874 < \frac{v_R}{v_S} < 0.955 \tag{2.40}$$

O cálculo das expressões que caracterizam o campo do movimento das partículas afectadas pela passagem de uma onda de Rayleigh é feito por substituição nas equações (2.31) das expressões encontradas para as funções potenciais Φ e Ψ em (2.35), o que determina os seguintes resultados para o movimento na direcção x_1 (horizontal) e x_3 (vertical):

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 i\left(-k_R e^{-qx_3} + \frac{2qsk_R}{s^2+k_R^2} e^{-sx_3}\right)\cdot e^{i(\omega t - k_R x_1)} \\ u_3 &= A_1\left(\frac{2qk_R^2}{s^2+k_R^2} e^{-sx_3} - qe^{-qx_3}\right)\cdot e^{i(\omega t - k_R x_1)} \end{aligned} \tag{2.41}$$

A figura seguinte representa a variação em profundidade das amplitudes dos deslocamentos horizontais e verticais, para alguns valores do coeficientes de Poisson. Optou-se, arbitrariamente, por normalizar o campo de amplitudes com valores unitários à superfície.

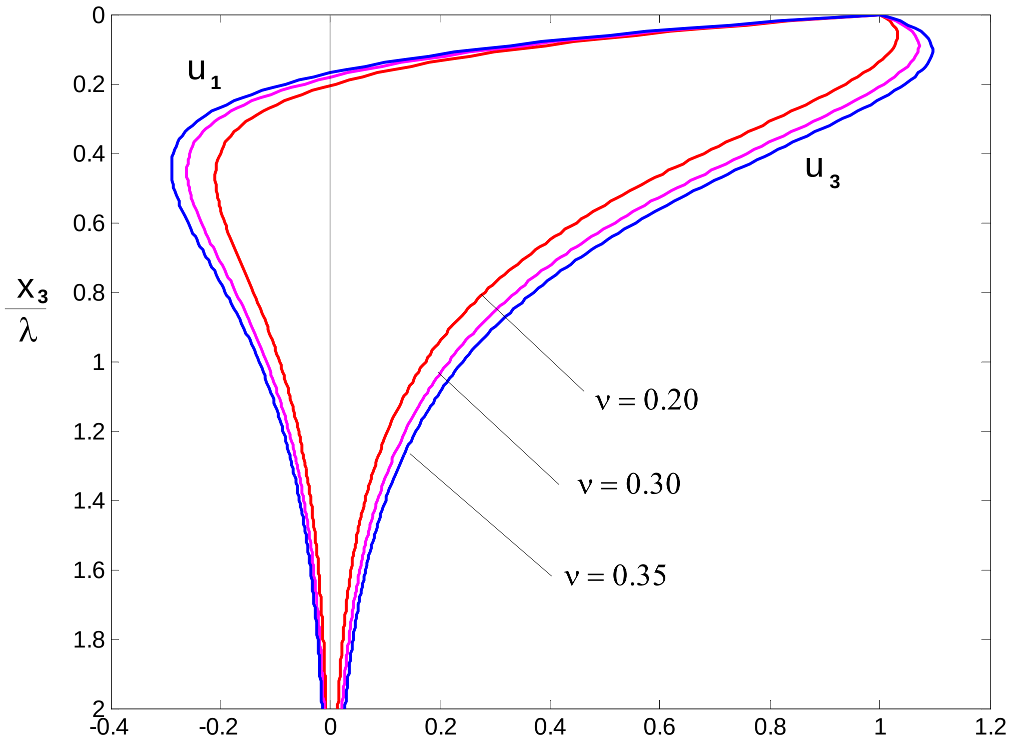


Figura 2.5 – Deslocamentos horizontais e verticais característicos das ondas de Rayleigh

Pelo que atrás foi exposto, pode-se então afirmar que o aparecimento de ondas de Rayleigh resulta da interferência construtiva entre ondas volúmicas causada pela existência de uma superfície livre, ao longo da qual as tensões são nulas e pela imposição de evanescência progressiva e completa do campo de deslocamentos em profundidade.

Por análise das expressões para o campo de deslocamentos $\mathbf{u}$ apresentadas em (2.41), verifica-se que a diferença de fase entre as duas componentes do movimento é constante e igual a $\pi/2$ e que a componente vertical tem amplitude sempre igual ou superior à da componente horizontal, o que significa que o movimento característico associado às partículas afectadas pela passagem de uma onda de Rayleigh é um movimento elíptico, com os seus eixos principais ortogonais ao referencial (x_1, x_3) e com maior amplitude na direcção x_3. O sentido de rotação à superfície do semi-espaço é retrógrado, em relação ao sentido de propagação da onda, invertendo-se este sentido de rotação a uma profundidade $x_3 \approx 0.2\lambda$ (cf. Figura 2.5).

Dada a atenuação exponencial das amplitudes das componentes de deslocamento, a passagem da onda de Rayleigh afecta apenas uma zona restrita junto à superfície, e como tal, as suas propriedades de propagação não são grandemente influenciadas por eventuais estratos com diferentes características mecânicas que possam existir a uma profundidade superior a 2λ.

Como já foi referido, considerando uma fonte de energia mecânica colocada à superfície do semi-espaço, as ondas volúmicas afastam-se do seu ponto de origem através de um campo de deslocamentos com frente de onda de forma semi-esférica e as ondas de Rayleigh através de um campo de deslocamentos com frente de onda de forma cilíndrica.

Com a distância à origem r, o volume abrangido e a área de frente de onda aumentam, logo a densidade de energia por unidade de área de frente de onda diminui e, em associação, os deslocamentos associados à passagem da onda também diminuem. Existe portanto uma dissipação de energia dependente exclusivamente da coordenada geométrica r que, por tal facto, se designa de dissipação geométrica.

Por exemplo para o caso da propagação de ondas volúmicas, dado que a energia por unidade de área de frente de onda é inversamente proporcional ao quadrado da distância r:

$$dE : \frac{1}{r^2}$$

e que a energia é proporcional ao quadrado dos deslocamentos, resulta que os deslocamentos na frente de onda atenuam-se com a distância à origem seguindo uma lei de atenuação inversamente proporcional a r:

$$u : \frac{1}{r}$$

No caso das ondas de Rayleigh, dada a sua forma de frente de onda cilíndrica, a lei de atenuação geométrica dos deslocamentos passa a ser:

$$u : \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Tal significa que a dissipação geométrica dos deslocamentos é menor no caso das ondas de Rayleigh comparativamente com as ondas volúmicas, ou seja, à medida que a frente de onda se afasta da origem, a importância relativa da onda de Rayleigh aumenta face às ondas volúmicas.

Quando o material envolvido tem, ele próprio, características de dissipação de energia, existe, cumulativamente à dissipação geométrica mencionada, a dissipação material, abordada adiante em 2.4.

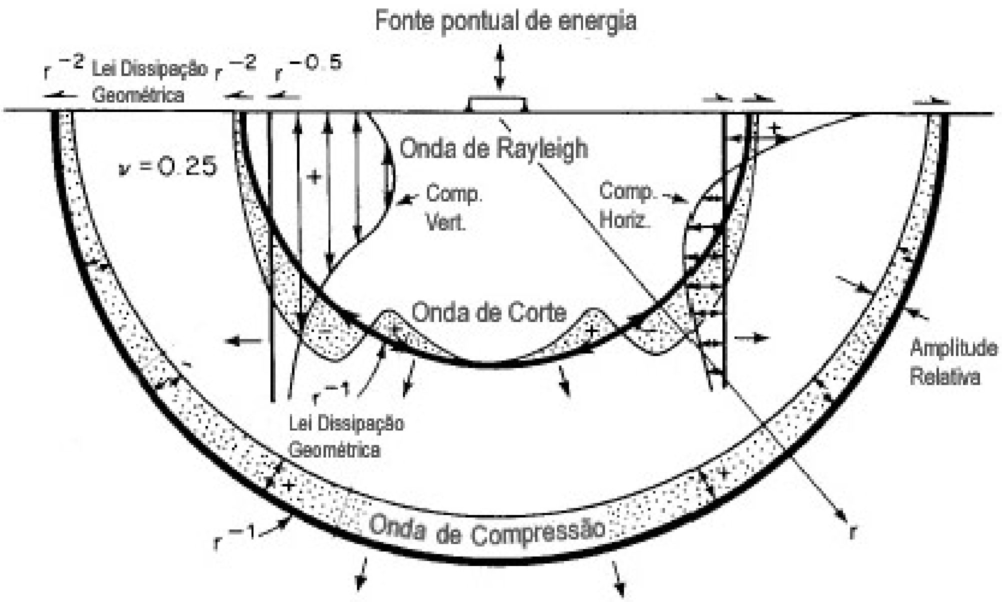


Figura 2.6 – Campos gerados por uma fonte de energia pontual à superfície [Woods, 1968]

2.3.2 Propagação em meios semi-infinitos elásticos e heterogéneos

No caso de meios heterogéneos e anisotrópicos, em que as propriedades mecânicas do material dependem da coordenada espacial e da direcção em causa, a complexidade da formulação matemática associada ao fenómeno de propagação de ondas aumenta significativamente e pode inclusive não ter solução, correspondendo à situação de não haver propagação.

Para o estudo das principais características da propagação de ondas de Rayleigh em meios heterogéneos e identificação das principais situações do caso da propagação em meios homogéneos, é suficiente a consideração de uma heterogeneidade exclusivamente vertical, ou seja, em que os parâmetros de Lamé e a massa volúmica são funções apenas da direcção vertical: $\rho(x_3)$, $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$, mantendo-se a hipótese de isotropia do material. Estas simplificações permitem, de uma forma idêntica à realizada para meios homogéneos, encontrar as equivalentes equações de Navier para a propagação de ondas em meios elásticos, isotrópicos e horizontalmente homogéneos [Lai, 1998]:

$$\rho\ddot{u} = (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot u + \mu\nabla^2 u + e_3\frac{d\lambda}{dx_3}\nabla\cdot u + \frac{d\mu}{dx_3}\left(e_3\times\nabla\times u + 2\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \tag{2.42}$$

em que e_3 é o vector unitário com a direcção x_3.

No estudo do problema homogéneo, de vibração livre sem forças aplicadas ao sistema, o campo de movimentos harmónico pode ser descrito através das seguintes expressões [Aki e Richards, 1980]:

$$\begin{aligned} u_1 &= r_1(x_3,k,\omega)e^{i(\omega t - kx_1)} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= i\cdot r_2(x_3,k,\omega)e^{i(\omega t - kx_1)} \end{aligned} \tag{2.43}$$

nas quais a direcção x_1 designa a direcção horizontal de propagação da onda e a direcção x_3 a direcção vertical.

As equações do movimento expressas em (2.43) reflectem algumas das conclusões já referidas relativamente à propagação de ondas de Rayleigh, nomeadamente que o campo de movimento associado à passagem de ondas de Rayleigh em meio elástico é caracterizado por movimentos elípticos, com o eixo menor paralelo à superfície livre, em que a componente vertical está desfasada 90º em relação à componente horizontal, e que a componente do movimento horizontal perpendicular ao plano de propagação (direcção 2) é independente das restantes direcções ortogonais, pelo que a consideração de uma onda plana bi-dimensional não introduz qualquer perda de generalidade.

Considerando agora a seguinte definição do campo de tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= r_3(x_3,k,\omega)e^{i(\omega t - kx_1)} \\ \sigma_{33} &= i\cdot r_4(x_3,k,\omega)e^{i(\omega t - kx_1)} \end{aligned} \tag{2.44}$$

e procedendo à introdução das equações (2.43) em (2.42), é possível transformar a representação matemática da propagação num problema linear diferencial de valores e vectores próprios escrito matricialmente através de:

$$\begin{bmatrix} r_{1,3} \\ r_{2,3} \\ r_{3,3} \\ r_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k & \mu^{-1} & 0 \\ \dfrac{\lambda k}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & (\lambda+2\mu)^{-1} \\ k^2\xi_1-\rho\omega^2 & 0 & -\mu_{,3}\mu^{-1} & -\dfrac{\lambda k}{\lambda+2\mu} \\ (\lambda_{,3}-\xi_2\lambda)k & -\rho\omega^2 & k & -\xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

$$\xi_1 = 4\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu};\xi_2 = \frac{(\lambda+2\mu)_{,3}}{\lambda+2\mu}$$

As respectivas condições de fronteira são o anulamento do vector tensão à superfície do meio atravessado e o evanescimento das tensões e dos deslocamentos no infinito:

$$\begin{gathered} \sigma_{13}=0;\sigma_{33}=0 \text{ em } x_3=0 \\ \sigma_{13}\to 0;\sigma_{33}\to 0;u_1\to 0;u_3\to 0 \text{ quando } x_3\to\infty \end{gathered} \tag{2.46}$$

Dadas as definições escritas em (2.43) e (2.44), estas expressões equivalem, por sua vez, a:

$$\begin{gathered} r_3=0;r_4=0 \text{ em } x_3=0 \\ (r_1,r_2,r_3,r_4)\to 0 \text{ quando } x_3\to\infty \end{gathered} \tag{2.47}$$

No caso de meios estratificados, em que a heterogeneidade vertical se caracteriza também por descontinuidades das propriedades mecânicas, é ainda necessário introduzir as condições de fronteira relativas à continuidade de deslocamentos e de equilíbrio de tensões em cada interface de estratos contíguos, expressa por:

$$\begin{gathered} u_i\left(x_1,x_3^+\right)=u_i\left(x_1,x_3^-\right);\ i=1,3 \\ \sigma_{i3}\left(x_1,x_3^+\right)=\sigma_{i3}\left(x_1,x_3^-\right);\ i=1,3 \end{gathered} \tag{2.48}$$

onde o sinal + e – diferencia os valores de deslocamentos ou tensões respeitantes ao estrato adjacente inferior ou adjacente superior, respectivamente.

Para uma dada frequência, ω, somente existem soluções não triviais do problema homogéneo para determinados valores de k. Os números de onda assim calculados representam os valores próprios do problema e as funções de deslocamento r_1 e r_2 e de tensão r_3 e r_4 os vectores próprios a eles associados.

A representação matemática da equação característica de Rayleigh que permite calcular os valores próprios, k_j, em função da frequência e das propriedades do meio, apenas pode ser feita de uma forma implícita [Lai, 1998], correspondente à equação característica:

$$F_R\left[\rho(x_3),\lambda(x_3),\mu(x_3),\omega,k_j\right]=0 \tag{2.49}$$

A dependência da solução desta equação relativamente à frequência ω significa que também a velocidade de fase das ondas de Rayleigh dependerá da frequência em causa.

Enquanto no caso de meios homogéneos a velocidade de fase das ondas de Rayleigh é independente da frequência, e por isso se diz que o campo de ondas gerado é não dispersivo, em meio heterogéneos, ondas de diferente frequência propagam-se a velocidade diferente e como tal, neste caso, o campo de ondas gerado é dispersivo, designação escolhida por analogia ao fenómeno da dispersão da luz branca num prisma de cristal.

Por ser devida à heterogeneidade do meio, designa-se esta dispersão por dispersão geométrica [Foti, 2000].

Para cada frequência ω a resolução do problema homogéneo de valores de fronteira corresponde ao cálculo do par $\left(k_j, r_i\left(x_3,k_j,\omega\right)\right)$ que caracteriza cada um dos modos de propagação de Rayleigh.

Em problemas não homogéneos, as ondas de Rayleigh são geradas por uma excitação forçada à superfície ou no interior do semi-espaço. Dado que qualquer padrão de excitação mecânica verificando condições de aplicabilidade adequadas pode ser decomposto numa soma de funções harmónicas pela transformação de Fourier, a solução para o campo de movimentos e de tensões resultante é obtida através de um processo de sobreposição modal, analogamente aos problemas de dinâmica estrutural. Deste modo, a resolução do problema homogéneo constitui um passo determinante na resolução do correspondente problema de propagação forçada.

2.3.2.1 Heterogeneidade por estratos. Métodos de resolução

Para a resolução explícita da equação característica, associada ao cálculo dos valores e vectores próprios, é necessário conhecer a lei de variação vertical das propriedades do semi-espaço. Dada a complexidade matemática do problema e a necessidade de conceber métodos resolutivos fiáveis e facilmente implementáveis, o semi-espaço é habitualmente discretizado em estratos horizontais homogéneos, como apresentado na seguinte figura:

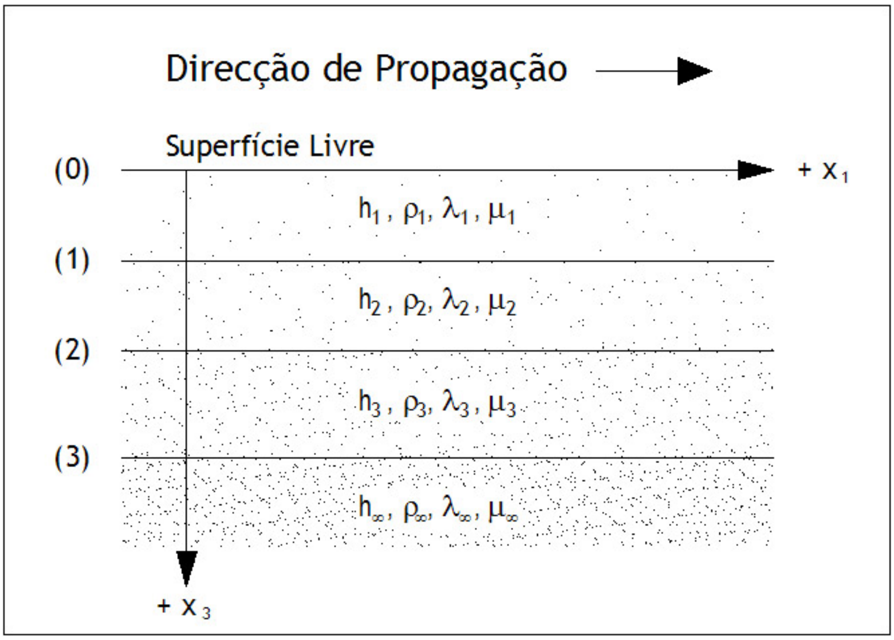


Figura 2.7 –Discretização vertical do semi-espaço em estratos horizontais com propriedades constantes no seu interior

Nesta Figura o estrato identificado com os parâmetros h_∞, ρ_∞, λ_∞, μ_∞ assinala a existência de um semi-espaço subjacente infinito homogéneo.

A definição geométrica e mecânica do semi-espaço fica completa se forem conhecidas a espessura, a massa volúmica e as constantes de Lamé de cada um dos estratos existentes. Esta discretização vertical implica uma perda de generalidade da formulação decorrente, mas permite que a construção do problema global seja realizada por um processo de assemblagem ou de concatenação, a partir de matrizes referentes a cada estrato homogéneo, sendo que, em termos práticos, a resolução do problema da propagação de ondas em meios heterogéneos é alcançada recorrendo apenas às expressões matemáticas que governam a propagação de ondas em meios homogéneos, que neste caso são os estratos.

O método mais antigo, e talvez o mais conhecido, para a resolução do problema enunciado é o método inicialmente proposto por Thomson (1950) e posteriormente modificado por Haskell (1953). Neste método recorre-se à formulação matricial para uma camada, com base nas equações exactas que governam os campos de deslocamento e de tensão, definição de uma matriz global de transmissão por compatibilidade de deslocamento e tensão em sucessivos interfaces e imposição das condições de fronteira. As expressões finais da equação de dispersão são assim formadas pela combinação linear de funções transcendentais complexas, cuja resolução apenas é possível por via numérica, nomeadamente recorrendo a métodos de busca de zeros de funções. A escolha dos métodos numéricos utilizados é, portanto, de vital importância para a fiabilidade da solução, dado o comportamento altamente não linear e oscilatório da equação de dispersão, especialmente na zona das altas frequências.

Por sua vez, o método das matrizes de rigidez proposto por Kausel e Roesset (1981) parte do método das matrizes de transferência de Haskell-Thomson e modifica-o por forma a representar o equilíbrio do sistema na forma clássica da dinâmica estrutural. A assemblagem da matriz de rigidez global e a solução das equações são assim formalmente análogas à solução dos problemas de dinâmica estrutural no domínio da frequência.

Os capítulos 3 e 4 dedicam-se à descrição e apresentação de resultados obtidos por um e outro método.

2.3.2.2 Dispersão geométrica. Curva de dispersão

O conhecimento da dispersão das ondas de Rayleigh em meios heterogéneos possibilita a caracterização geotécnica do subsolo por análise da propagação de ondas de Rayleigh.

Conforme foi dito acerca da propagação das ondas de Rayleigh em meios homogéneos, a profundidade de penetração das ondas no semi-espaço é da ordem de grandeza de um comprimento de onda. Ondas com diferente frequência têm, de acordo com a expressão (2.24), diferentes comprimentos de onda e, consequentemente, afectarão diferentes profundidades.

De acordo com o exemplo ilustrado na Figura 2.8, uma onda com menor comprimento de onda – de frequência mais alta – será exclusivamente influenciada pelas características mecânicas do estrato superficial, ao passo que uma onda com maior comprimento de onda – de frequência mais baixa – terá as suas características de propagação, nomeadamente a sua velocidade de fase, também influenciadas pelas propriedades dos estratos mais profundos. Esta é a justificação física para o fenómeno da dispersão geométrica das ondas de Rayleigh.

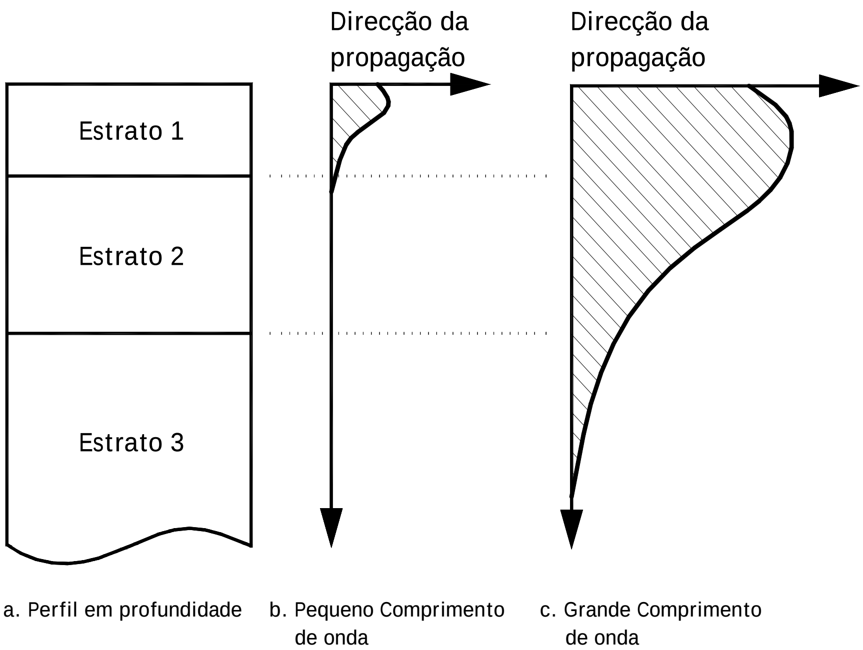


Figura 2.8 – Dispersão geométrica de meios estratificados [Foti, 2000]

Se o perfil de rigidez for crescente em profundidade, como correntemente se verifica, diz-se que o perfil é normalmente dispersivo, o que significa, pelos motivos atrás indicados, que ondas de menor frequência propagar-se-ão com velocidades mais altas e ondas de maior frequência com velocidades mais baixas.

Por este motivo é habitual observar-se a chegada em primeiro lugar das componentes de baixa frequência das ondas de Rayleigh geradas por uma ocorrência sísmica seguidas pelas componentes de alta frequência, por ser este o perfil corrente de variação de rigidez em profundidade na crusta terrestre.

Ao invés, um perfil em profundidade em que estratos de menor rigidez existam sob estratos mais rígidos designa-se de perfil inversamente dispersivo, para o qual já não é possível estabelecer uma regra monotónica simples entre frequências de propagação e velocidades de fase de ondas de Rayleigh.

A representação gráfica da variação da velocidade de fase com a frequência, ou, identicamente, com o comprimento de onda, designa-se de curva de dispersão.

A curva de dispersão construída a partir das soluções da equação característica apresentada em (2.49) está associada à propagação de ondas de Rayleigh em regime livre, com os diversos modos de propagação identificados pela existência de linhas iso-modais.

A identificação do perfil de rigidez do subsolo com base em ensaios dinâmicos superficiais, tirando partido da característica de dispersão das ondas de Rayleigh, baseia-se na construção da curva de dispersão experimental do local.

Para evidenciar a relação entre a forma da curva de dispersão e o perfil de rigidez do semi-espaço, a Figura 2.9 representa simplificadamente as curvas de dispersão típicas de meios normalmente dispersivos e inversamente dispersivos, as quais podem ser comparadas, na mesma figura, com a relação $v_R(\lambda)$ válida para o semi-espaço homogéneo.

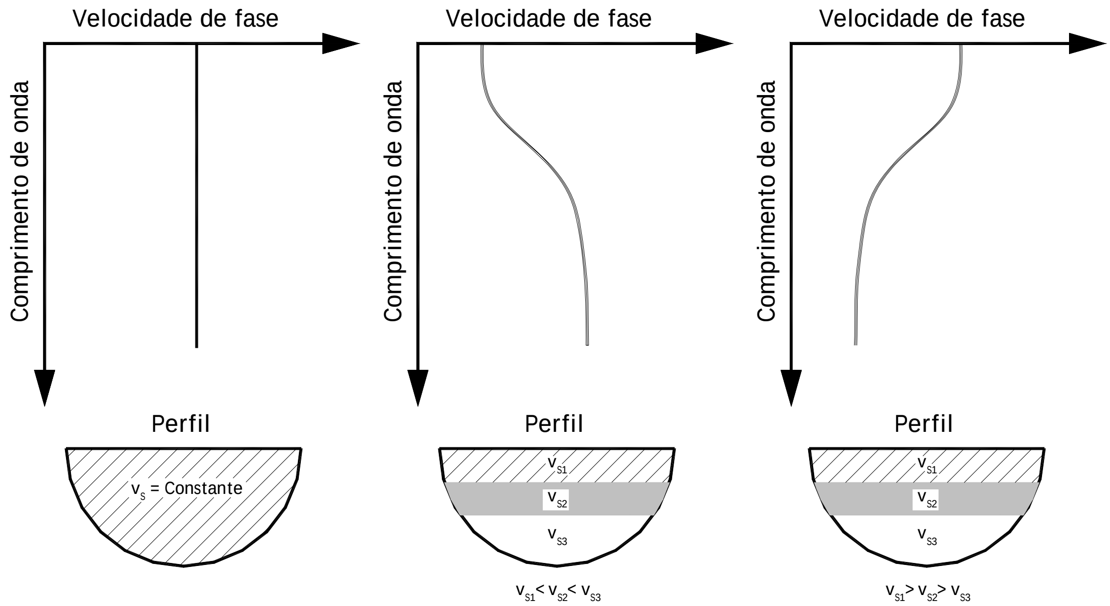


Figura 2.9 – Lei $v_R(\lambda)$ em meio homogéneo e exemplos de curvas de dispersão típicas de meios normalmente dispersivos e inversamente dispersivos [Foti, 2000]

O formato apresentado na Figura 2.9 para a representação das curvas de dispersão em (V_R, λ) fornece uma ideia imediata sobre a variação da rigidez do meio em profundidade tendo em conta que maiores comprimentos de onda afectam maiores profundidades e que maiores velocidades de fase são características de meios mais rígidos.

Este facto possibilita uma via tradicional para a resolução simplificada do problema inverso correspondente à determinação dos parâmetros geotécnicos requeridos com base nos resultados obtidos de um ensaio de vibração superficial dinâmica. A partir da curva de dispersão determinada experimentalmente, o perfil de velocidades de ondas de corte com a profundidade (a velocidade das ondas de corte relaciona-se com a rigidez de corte do meio através de (2.18)) obtém-se considerando que a profundidade interessada maioritariamente por uma onda é da ordem de $1/3$ a $1/2$ do seu comprimento de onda e que a relação entre ondas de corte e ondas de Rayleigh é constante e dependente do coeficiente de Poisson estimado para o meio, através de uma relação equivalente a (2.40).

A determinação experimental da curva de dispersão completa, com a identificação da contribuição de cada um dos modos de propagação no campo de deslocamentos total associado à propagação em regime forçado, requer a utilização de um elevado número de receptores de sinal o que, consequentemente, complica a execução do ensaio e gera uma grande quantidade de informação, difícil de trabalhar e armazenar. Por este motivo, os ensaios correntes de construção experimental da curva de dispersão limitam-se à determinação da curva de dispersão aparente, para o que, na sua forma mais simples, é suficiente um emissor de vibrações e dois receptores de sinal. A curva de dispersão aparente corresponde a uma única série (ω, k) que reflecte a forma como a energia pontualmente introduzida no meio se afasta da origem, que, conforme já foi referido, resulta de uma sobreposição ponderada de modos de propagação.

A sobreposição da curva de dispersão aparente com as curvas teóricas de dispersão obtidas da resolução do problema homogéneo correspondentes aos diversos modos de propagação (cf. Figura 2.10), revela que existem modos de propagação dominantes associados a cada gama de frequências.

Em perfis normalmente dispersivos o primeiro modo de propagação é o modo dominante em praticamente toda a gama de frequências [Tokimatsu, *et. al.*, 1992] e apenas neste caso o método de inversão acima mencionado se revela adequado, uma vez que implicitamente apenas considera este modo de propagação.

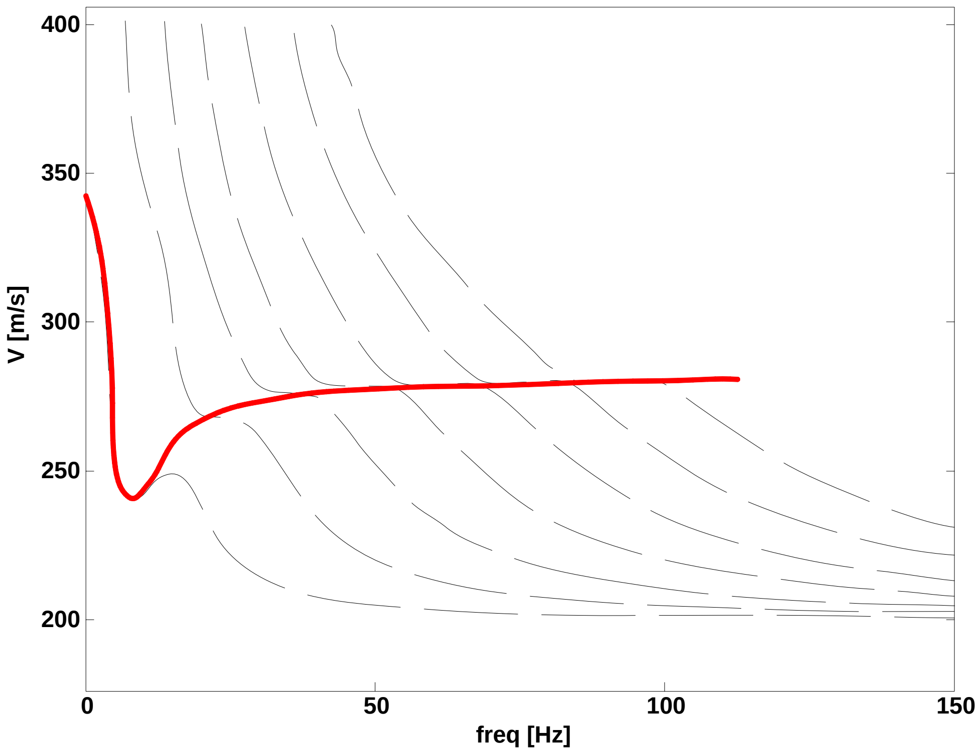


Figura 2.10 – Exemplo de uma curva de dispersão aparente

2.3.2.3 *Velocidade aparente de fase. Velocidade de grupo*

As velocidades $v(\omega)$ associadas à curva de dispersão aparente (cf. Figura 2.10) designam-se de velocidades aparentes ou efectivas de fase, e representam a velocidade de propagação de pontos de igual fase num regime de vibração forçada em meios heterogéneos dispersivos.

Considerando a excitação pontual vertical à superfície com natureza harmónica $F_3 e^{i\omega t}$, representando F_3 a amplitude da função na direcção x_3, o campo de deslocamentos pode ser definido através de [Lai, 1998]:

$$u_\beta(x_1, x_3, \omega) = F_3 G_\beta(x_1, x_3, \omega) e^{i[\omega t - \psi_\beta(x_1, x_3, \omega)]} \tag{2.50}$$

onde β representa as direcções 1 (radial) ou 3 (vertical), G_β a função de afastamento geométrico de Rayleigh e ψ_β uma função de fase composta.

As expressões analíticas destas funções envolvem essencialmente somatórios modais e um factor de atenuação geométrica, necessariamente mais complexo que o factor $\frac{1}{\sqrt{x_1}}$

referido no caso da propagação em meios homogéneos (adopta-se aqui por simplicidade a equivalência entre variáveis: $x_1 \equiv r$).

A determinação da expressão de cálculo da velocidade efectiva de fase é realizada a partir da seguinte equação que representa a condição de igualdade de fase em posições genéricas característica da frente de onda:

$$\omega t - \psi_\beta \left(x_1, x_3, \omega \right) = c \tag{2.51}$$

Derivando (2.51) em relação ao tempo, obtém-se a expressão implícita de cálculo da velocidade efectiva de fase das ondas de Rayleigh:

$$\omega - \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} = 0 \Leftrightarrow \hat{V}_\beta \left(x_1, x_3, \omega \right) = \frac{\omega}{\left[\psi_\beta \left(x_1, x_3, \omega \right) \right]_{,x_1}} \tag{2.52}$$

onde $\hat{V}_\beta$ representa a velocidade de fase efectiva, definida por $\hat{V}_\beta = \dfrac{dx_1}{dt}$.

De acordo com a expressão (2.52), a velocidade efectiva de fase é uma quantidade local que depende das coordenadas $\left(x_1, x_3 \right)$ e uma quantidade vectorial significando que diferentes componentes do movimento irão, em geral, propagar-se a diferentes velocidades de fase.

Um outro parâmetro cinemático de caracterização da propagação de ondas de Rayleigh é a designada velocidade de grupo U. Quando um pulso de energia actua pontualmente à superfície de um meio heterogéneo, liberta-se a partir deste um pulso de ondas de Rayleigh que, dada a heterogeneidade do meio e o fenómeno de dispersão associado, será formado por uma soma de ondas com diferentes frequências e diferentes velocidades de propagação. No entanto, existirá uma envolvente das amplitudes do movimento associada à passagem deste pulso de ondas com uma velocidade de propagação, determinada pela composição espectral da série de ondas que transporta, que é a velocidade de grupo atrás mencionada.

Recorrendo ao exemplo apresentado na Figura 2.11, observa-se que a envolvente ao pulso de ondas, que funciona como uma janela em movimento dentro da qual ocorrem os movimentos associados à propagação da onda, se desloca a uma velocidade U, dita velocidade de grupo. As várias componentes espectrais desta onda, por se propagarem com diferentes velocidades de fase, genericamente V, terão uma velocidade relativa de propagação maior ou menor relativamente à velocidade de grupo U, o que significará que estas componentes poderão aparecer na frente de onda e desaparecer na cauda do pulso de onda (caso exemplificado na Figura 2.11) e vice-versa.

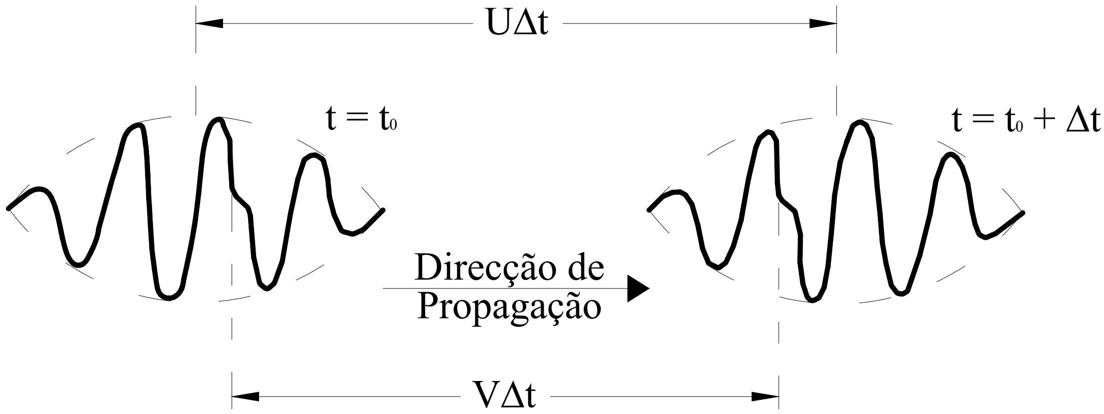


Figura 2.11 – Velocidade de grupo (U) e de fase (V) [Foti, 2000]

A velocidade de grupo é calculada através da expressão:

$$U = \frac{d\omega}{dk} = V + k\frac{dV}{dk} = V - \lambda\frac{dV}{d\lambda} \tag{2.53}$$

2.4 Propriedades dinâmicas dos solos

2.4.1 Introdução

Uma vez caracterizados os principais aspectos relacionados com a teoria de propagação de ondas, em particular das ondas de Rayleigh, em meios contínuos homogéneos ou heterogéneos com comportamento elástico linear, descreve-se seguidamente o comportamento mecânico dos solos sob acções de carácter cíclico e de alguns dos correspondentes modelos matemáticos constitutivos.

O comportamento do solo quando sujeito a uma qualquer acção de carácter cíclico ou monotónico, depende de diversos factores, uns de natureza intrínseca outros de origem externa.

O efeito causado pelos designados factores de natureza intrínseca, como o são, por exemplo, as características das partículas constituintes ou o seu grau de adensamento, não será aqui analisado por sair fora do âmbito do presente trabalho.

Pretende-se assim seguir uma clássica abordagem fenomenológica do problema, descrevendo-se exclusivamente os mecanismos de causa-efeito que se observam, sem entrar no domínio da micromecânica onde residem as razões intrínsecas que justificam o comportamento observável experimentalmente.

2.4.2 Comportamento dos solos. Evidência experimental

Os principais factores e variáveis de origem externa que influenciam o tipo de comportamento mecânico observável nos solos são a amplitude do carregamento aplicado, o padrão de carregamento, a taxa de variação e a duração.

Entre estes, a amplitude da tensão ou deformação aplicadas durante a execução de um ensaio é a variável que mais afecta a resposta cíclica dos solos, sendo identificáveis experimentalmente três padrões de comportamento consoante o nível de distorção cíclica γ_c atingido.

Para valores de γ_c inferiores a um limiar cíclico de distorção linear γ_{LE} o comportamento do solo é linear mas não elástico. Este é o chamado **domínio das muito pequenas deformações** onde γ_{LE} é tipicamente inferior a 10^{-3}% em areias e a 10^{-2}% em argilas normalmente consolidadas [Lo Presti, 1987]. A Figura 2.12 representa um ciclo completo de tensão-deformação neste domínio de comportamento ($\gamma_c < \gamma_{LE}$) onde se constata a existência de um ciclo de histerese por ocorrer dissipação de energia.

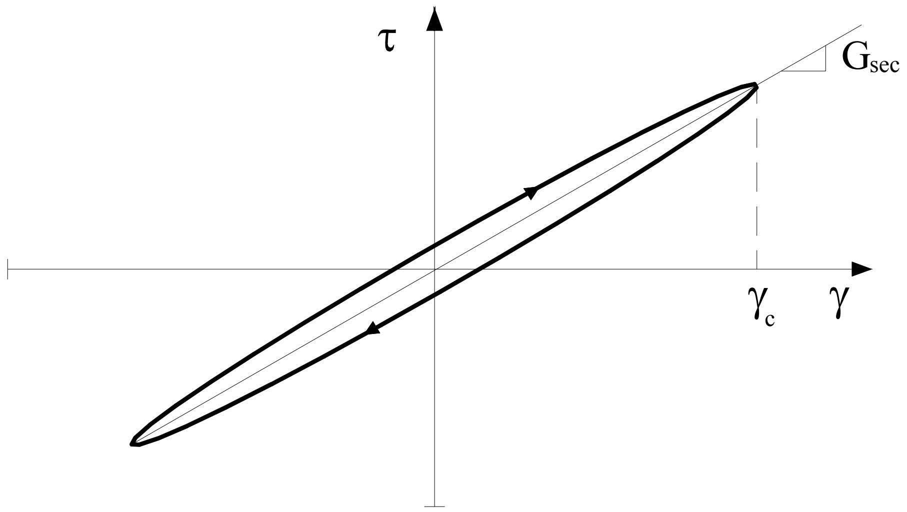


Figura 2.12 – Ciclo completo de tensão-deformação no domínio das muito pequenas deformações

Nesta região de comportamento não se verificam reduções de rigidez com o aumento de tensão ou distorção – o módulo de distorção secante G_{sec} é aproximadamente igual ao módulo de distorção máximo G_{max} – nem alterações da forma do ciclo de histerese com o aumento do número de ciclos. O coeficiente de amortecimento histerético ξ é bastante pequeno e o seu valor é independente de γ_c :

$$\xi = \frac{1}{8\pi}\frac{\Delta W}{W} \tag{2.54}$$

Nesta equação ΔW representa a energia dissipada pelo material durante um ciclo, dada pela área interna do ciclo de histerese, e W a energia <u>média</u> armazenada durante um ciclo completo [Lai, 1998].

Para valores de distorção γ_c compreendidos entre γ_{LE} e um limiar volumétrico de deformação γ_{LV} o solo passa a apresentar uma relação claramente não linear entre tensão e distorção, mas não ocorre variação de volume em condições drenadas ou o desenvolvimento de pressão intersticial em condições de drenagem condicionada. Este é o designado **domínio das pequenas deformações**.

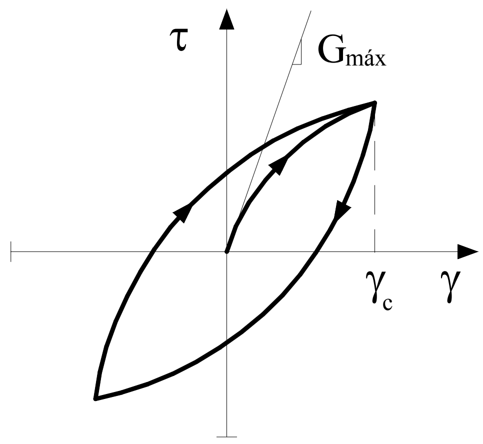


Figura 2.13 – Ciclo completo de tensão-deformação no domínio das pequenas deformações [Bilé Serra, 1998]

Embora o comportamento seja não-linear, as propriedades do solo não variam em função do número de ciclos aplicados, se as amplitudes de deformação ou tensão permanecerem constantes.

O valor de γ_{LV} é da ordem de 10^{-2}% em areias e a 10^{-1}% em argilas normalmente consolidadas [Vucetic e Dobry, 1991].

Para valores de γ_c superiores a γ_{LV} entra-se no chamado **domínio das grandes deformações** onde passa a ocorrer interacção entre a deformação de corte e a deformação volumétrica – efeito de dilatância. Para além do comportamento inelástico e fortemente não linear, o desarranjo estrutural dos solos sujeitos a estas amplitudes de deformação provoca uma degradação das suas propriedades com a repetição continuada de ciclos de amplitude constante de tensão ou deformação, como se ilustra na seguinte série de ciclos de tensão-deformação de um ensaio a tensão controlada:

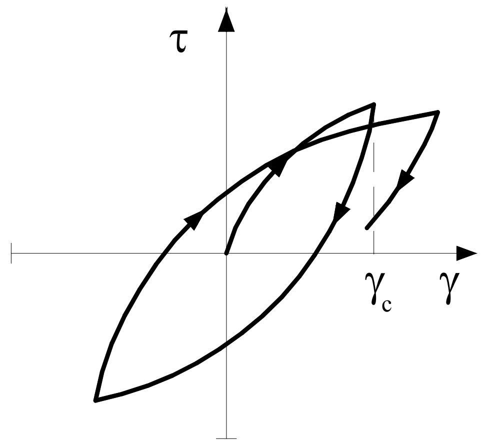


Figura 2.14 – Série de ciclos completos de tensão-deformação no domínio das grandes deformações

A degradação de rigidez de corte e o aumento da área envolvida num ciclo de histerese com o aumento de γ_c justificam, respectivamente, as seguintes trajectórias de desenvolvimento de G_{sec}/G_{max} e de $\Delta W/W$ em função da distorção máxima atingida γ_c durante um ensaio de corte cíclico:

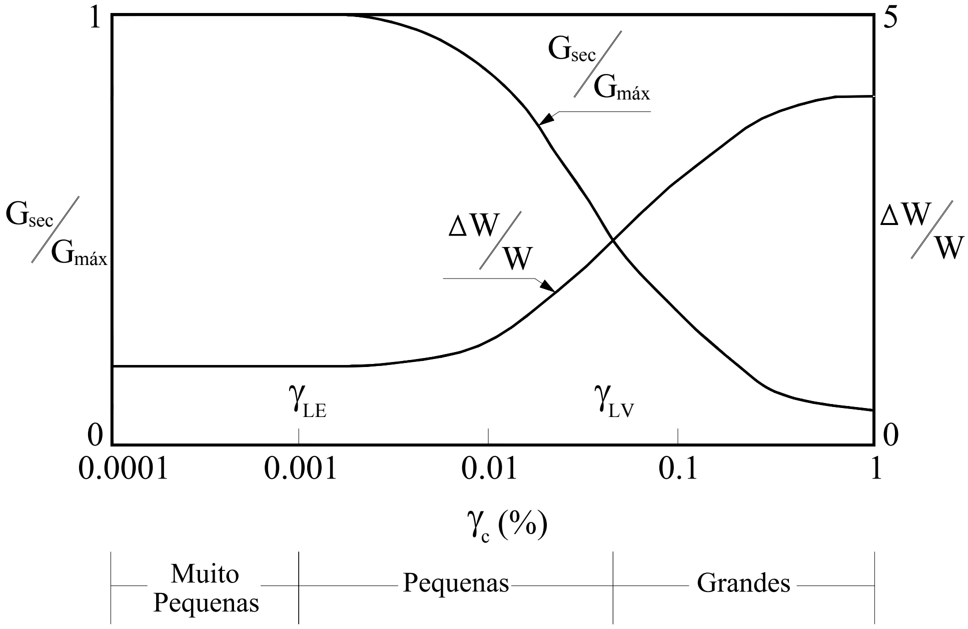


Figura 2.15 – Domínios de comportamento cíclico dos solos [Bilé Serra, 1998]

A Tabela 2.3 sintetiza as principais distinções entre os vários domínios de comportamento dos solos:

Amplitude de deformação γ_c	$\gamma_c < \gamma_{LE}$	$\gamma_{LE} < \gamma_c < \gamma_{LV}$	$\gamma_c > \gamma_{LV}$
Linearidade	Linear	Não linear	Não linear
Comportamento	Elástico	Elastoplástico	Elastoplástico
Dilatância	Inexistente	Incipiente	Activa
Ciclos não drenados	Estáveis	Estáveis	Instáveis
Tipo de não linearidade	-	Material	Material e Geométrica

Tabela 2.3 – Distinções entre comportamentos cíclicos do solo [Bilé Serra, 1998]

Os ensaios de determinação experimental das propriedades dinâmicas do solo podem ser realizados em laboratório ou *in situ*. Os primeiros apresentam as vantagens de realização de ensaio em condições controladas, nomeadamente no que respeita às condições de fronteira e às trajectórias impostas. Os segundos são particularmente valorizados por fornecerem parâmetros independentes de factores de escala, serem aplicáveis a qualquer tipo de solos e, comparativamente com os ensaios laboratoriais, não alterarem as características naturais do terreno.

Aos vários tipos de ensaios estão associados intervalos específicos de operacionalidade em termos da amplitude de distorção cíclica γ induzida à amostra ensaiada. A seguinte figura indica algumas destas correspondências, inserindo-se também a gama de deformações tipicamente induzida pelos sismos para efeitos de comparação:

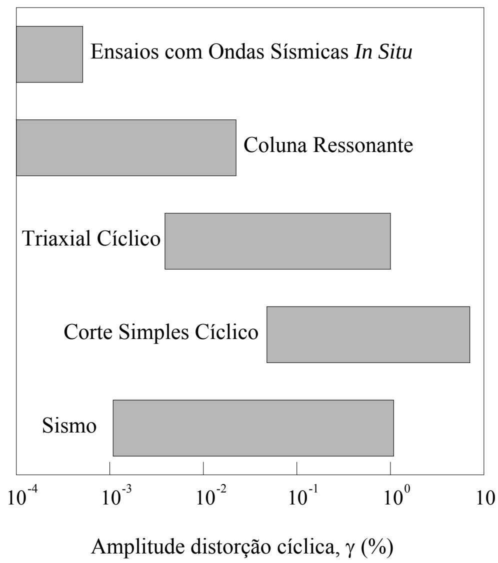


Figura 2.16 – Intervalos de amplitude de distorção cíclica γ permitidos em diferentes tipos de ensaios

Os ensaios de natureza sísmica para caracterização geotécnica dos solos funcionam no domínio das muito pequenas deformações e como tal os parâmetros que fornecem são aqueles que caracterizam o solo neste domínio de comportamento, ou seja, o módulo de distorção máximo $G_{máx}$ e o coeficiente de amortecimento mínimo ξ_{min} da Figura 2.15.

2.4.3 Modelo constitutivo histerético linear

Para modelar o comportamento do solo no domínio das muito pequenas deformações, ou se despreza a característica de dissipação de energia que o solo exibe mesmo nesta gama de amplitudes de distorção cíclica e se adopta um modelo constitutivo elástico linear, como expresso em (2.5), ou, caso contrário, é necessário considerar um modelo histerético linear que contabilize estes efeitos intrínsecos do comportamento do material.

Na teoria da visco-elasticidade linear a relação instantânea entre o tensor das tensões σ_{ij} e o tensor das deformações ε_{ij} deixa de ser proporcional como na teoria elástica linear, passando o estado actual de tensões a ser uma função de toda a história de deformações. O seguinte funcional linear expressa a dependência mencionada [Christensen, 1971] (onde a convenção da soma é válida para índices repetidos) :

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} G_{ijkl}(t-\tau)\frac{d\varepsilon_{kl}(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{2.55}$$

onde G_{ijkl} designa um tensor de funções de quarta ordem designado por tensor de funções de relaxação. No caso de um material isotrópico, linear, visco-elástico, o tensor G_{ijkl} fica definido por apenas duas componentes independentes, neste caso, a função de relaxação de corte $G_S(t)$ e a função de relaxação volumétrica $G_V(t)$. A substituição destas funções na expressão (2.55) conduz às seguintes expressões desacopladas em termos de deformação de corte e deformação volumétrica:

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= \int_{-\infty}^{t} 2G_S(t-\tau)\frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau}d\tau \\ \sigma_{kk}(t) &= \int_{-\infty}^{t} 3G_V(t-\tau)\frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau}d\tau \end{aligned} \tag{2.56}$$

onde $s_{ij}(t) = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ corresponde à componente deviatórica do tensor das tensões e $e_{ij}(t) = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$ à componente deviatórica do tensor das deformações.

Uma análise inversa poderia ser identicamente realizada a partir da expressão:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} J_{ijkl}(t-\tau)\frac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{2.57}$$

onde o tensor de quarta ordem J_{ijkl} é designado por tensor de funções de fluência, que nas mesmas condições formuladas anteriormente fica definido por somente duas componentes independentes – a função de fluência de corte $J_S(t)$ e a função de fluência volumétrica $J_V(t)$. A seguinte figura representa um exemplo de formas características de funções de relaxação e de fluência associadas ao comportamento dinâmico dos solos:

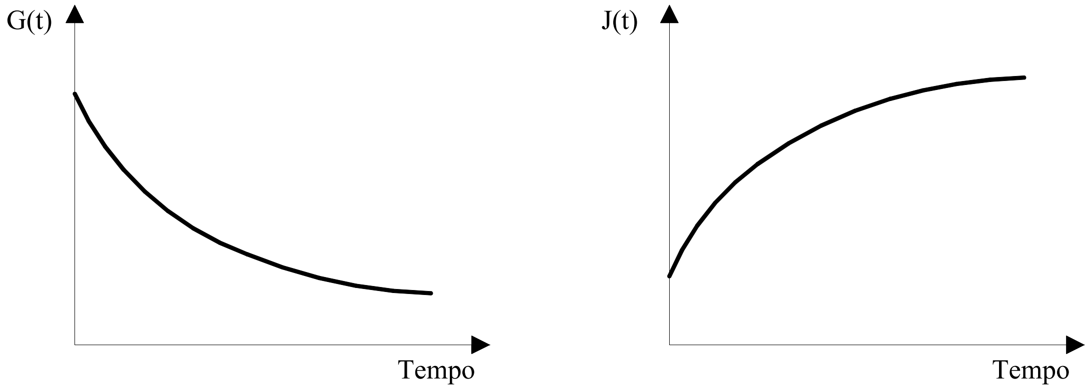


Figura 2.17 – Funções típicas de relaxação $G(t)$ e de fluência $J(t)$

Quando a deformação ou a tensão imposta é uma função harmónica no tempo então as equações constitutivas visco-elásticas do material simplificam-se consideravelmente, passando a ser expressas por relações algébricas idênticas às apresentadas na teoria linear elástica, mas com constantes de Lamé complexas em vez das constantes reais que definem o modelo elástico (ditas constantes de Lamé).

Supondo, por exemplo, que a deformação é definida através de $\varepsilon_{kl}(t) = \varepsilon_{0kl} e^{i\omega t}$, onde ε_{0kl} representa a amplitude da função harmónica de deformação, então a equação (2.55) simplifica-se para:

$$\sigma_{ij}(t) = G^*_{ijkl}(\omega)\varepsilon_{0kl} e^{i\omega t} \tag{2.58}$$

onde $G^*_{ijkl}(\omega)$ é designado de tensor módulo complexo e está relacionado com o tensor de funções de relaxação $G_{ijkl}(t)$ através de:

$$\begin{aligned} G_{(1)ijkl}(\omega) &= G_{(e)ijkl} + \omega \cdot \int_0^\infty G_{ijkl}(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau \\ G_{(2)ijkl}(\omega) &= \omega \cdot \int_0^\infty G_{ijkl}(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.59}$$

onde $G_{(1)ijkl}(\omega)$ e $G_{(2)ijkl}(\omega)$ representam as componentes real e imaginária do tensor módulo complexo:

$$G^*_{ijkl}(\omega) = G_{(1)ijkl}(\omega) + i \cdot G_{(2)ijkl}(\omega) \tag{2.60}$$

e a parcela $G_{(e)ijkl} = G_{ijkl}(t \to \infty)$ a resposta em equilíbrio.

O facto do tensor módulo complexo ser uma função da frequência e as suas componentes, real e complexa, serem inter-dependentes, prova uma das características conhecidas dos materiais visco-elásticos que é a sua característica intrínseca de dispersão. A designada **dispersão material** resulta de a velocidade de fase de propagação em meio visco-elástico depender da frequência de propagação.
Se o material for isotrópico então as expressões (2.56) transformam-se em:

$$s_{ij}(t) = 2G_S^*(\omega)e_{0ij}e^{i\omega t}$$
$$\sigma_{kk}(t) = 3G_V^*(\omega)\varepsilon_{0kk}e^{i\omega t} \tag{2.61}$$

em que $G_S^*(\omega)$ e $G_V^*(\omega)$ são as duas componentes complexas independentes do tensor módulo complexo $G_{ijkl}^*(\omega)$ designadas de módulo complexo de corte e módulo complexo de deformação volumétrica, respectivamente.
Os parâmetros que caracterizam o comportamento mecânico de um material isotrópico visco-elástico linear são assim as funções de relaxação $G_S(t)$ e $G_V(t)$ no domínio do tempo, ou os módulos complexos $G_S^*(\omega)$ e $G_V^*(\omega)$ no domínio da frequência. Estes últimos permitem formular as equações constitutivas em termos de simples expressões algébricas, análogas às apresentadas na teoria linear elástica.
Assumindo que qualquer excitação imposta, do tipo sísmico ou provocada experimentalmente, pode ser decomponível numa soma de funções harmónicas utilizando a transformação de Fourier, é possível aplicar o princípio da correspondência elástico-viscoelástico [Christensen, 1971] válido apenas para condições de fronteira invariantes no tempo, como é o caso. De acordo com este princípio a solução de um problema de valores de fronteira num meio visco-elástico pode ser obtida da correspondente solução obtida a partir das equações definidas para um meio elástico, substituindo as constantes elásticas pelos parâmetros complexos que caracterizam o comportamento visco-elástico do material.
Como exemplo, as soluções das equações do movimento que definem a propagação em meios infinitos elásticos homogéneos, presentes em (2.13) e (2.17), correspondentes à propagação de ondas longitudinais e de corte, respectivamente, podem assim ser

utilizadas directamente para a determinação das equivalentes soluções em meios visco-elásticos, conduzindo às seguintes duas equações:

$$\ddot{u}_{i,i} = \left(v_P^*\right)^2 \nabla^2 u_{i,i} \tag{2.62}$$

$$\left(\ddot{u}_{i,j} - \ddot{u}_{j,i}\right) = \left(v_S^*\right)^2 \nabla^2 \left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \tag{2.63}$$

As velocidades de fase complexas v_P^* e v_S^* de ondas P e de ondas S, respectivamente, são calculadas através de [Lai, 1998]:

$$\begin{gathered} v_P^*(\omega) = \sqrt{\frac{G_V^*(\omega) + 4/3\, G_S^*}{\rho}} = \sqrt{\frac{G_P^*(\omega)}{\rho}} \\ v_S^*(\omega) = \sqrt{\frac{G_S^*(\omega)}{\rho}} \end{gathered} \tag{2.64}$$

onde está implícita a definição de um módulo complexo associado à propagação de ondas P em meios infinitos dado por:

$$G_P^*(\omega) = G_V^*(\omega) + 4/3\, G_S^* \tag{2.65}$$

A expressão geral da equação do movimento da propagação harmónica uni-dimensional de uma onda $\gamma = P, S$ é:

$$u(x,t) = Ae^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{v_\gamma^*} x\right)} \tag{2.66}$$

onde o termo ω / v_γ^* é o número de onda complexo associado à onda do tipo γ (S ou P).

A equação anterior pode ser reescrita em:

$$u(x,t) = Ae^{-\alpha_\gamma x} e^{i\left(\omega t - k_\gamma x\right)} \tag{2.67}$$

que comparada com a correspondente equação (2.21) relativa à propagação em meios lineares elásticos evidencia o carácter dissipativo associado à propagação em meios visco-elásticos, pela existência do factor $e^{-\alpha_\gamma x}$ de decaimento da amplitude do movimento à medida que a onda se afasta da origem, designando-se α_γ por coeficiente de atenuação.

O coeficiente de amortecimento histerético, definido em (2.54), pode ser determinado se forem conhecidos os módulos complexos de corte e de deformação volumétrica do material.

Calculando a quantidade de energia dissipada durante um ciclo harmónico de carregamento através de:

$$\Delta W_\gamma^{dissip}(\omega) = \pi \cdot G_{(2)\gamma} \cdot \left|\varepsilon_\gamma\right|^2 \tag{2.68}$$

e a quantidade de energia média armazenada durante um ciclo através de:

$$W_\gamma^{med}(\omega) = G_{(1)\gamma} \cdot \left|\varepsilon_\gamma\right|^2 / 4 \tag{2.69}$$

o coeficiente de amortecimento histerético associado à propagação de ondas do tipo γ (S ou P) é determinado por:

$$\xi_\gamma(\omega) = \frac{G_{(2)\gamma}}{2G_{(1)\gamma}} \tag{2.70}$$

3 Método de Haskell-Thomson

3.1 Introdução

O método de Haskell-Thomson, já referido em 2.3.2.1, é um método matricial para construção e resolução da equação de dispersão e correspondente cálculo da curva de dispersão e dos modos de propagação. A formulação matemática foi desenvolvida para um meio elástico isotrópico, com heterogeneidade vertical discreta por estratos, como representado na Figura 2.7, composto por n estratos horizontais homogéneos sobrejacentes a um semi-espaço.

Considera-se a propagação de ondas de Rayleigh planas o que não implica perda de generalidade dado que a solução relativa à propagação tridimensional a partir de uma fonte pontual de energia pode ser determinada por combinação das soluções de ondas planas [Haskell, 1953].

São definidas as matrizes de transferência das componentes do movimento e do campo de tensões entre as interfaces superiores e inferiores de cada estrato, a partir das equações que regem a propagação de ondas em meios homogéneos, e, por continuidade destas componentes em interfaces de estratos contíguos, é calculada a matriz de transferência global do sistema, que relaciona as componentes de movimento e do campo de tensões à superfície com os parâmetros que definem a propagação no semi-espaço infinito inferior.

A imposição das condições de fronteira transforma a resolução da equação de dispersão num problema de valores e vectores próprios, correspondendo estes últimos aos modos de propagação de deslocamentos e de tensões.

3.2 Formulação por matrizes de transferência

A partir das equações de onda definidas para meios homogéneos, válidas no interior de cada estrato, expressas em (2.13) e (2.17), referentes, respectivamente, à propagação irrotacional e à propagação isovolúmica, definem-se as seguintes soluções harmónicas complexas para a extensão volumétrica $\bar{\varepsilon}$ e para a rotação em torno do eixo 2, Ω_2 (adiante representada simplificadamente por Ω), para um estrato genérico m:

$$\bar{\varepsilon}_m(x_1, x_3, \omega) = e^{i(\omega t - kx_1)}\left(A'_m e^{-ik\alpha_m x_3} + A''_m e^{ik\alpha_m x_3}\right) \tag{3.1}$$

$$\Omega_m(x_1, x_3, \omega) = e^{i(\omega t - kx_1)}\left(B'_m e^{-ik\beta_m x_3} + B''_m e^{ik\beta_m x_3}\right) \tag{3.2}$$

que representam a propagação de uma onda no plano (x_1, x_3), com velocidade de fase v e frequência angular ω. Os termos A'_m, A''_m, B'_m e B''_m são as constantes incógnitas do problema de propagação, e α_m, β_m têm a seguinte definição:

$$\alpha_m = -i\sqrt{1 - \left(v/v_{pm}\right)^2} \tag{3.3}$$

$$\beta_m = -i\sqrt{1 - \left(v/v_{sm}\right)^2} \tag{3.4}$$

Nesta equação v_{pm} e v_{sm} representam as velocidades de propagação das ondas P e S do estrato m, definidas anteriormente em (2.14) e (2.18).

De notar que para $v/v_{pm} < 1$, α_m é um número complexo e A'_m e A''_m representam a propagação de uma onda na direcção x_1 com amplitudes decrescentes ou crescentes, respectivamente, em profundidade. Para $v/v_{pm} > 1$ as equações expressas em (3.1) passam a representar a propagação de ondas no plano definido pelos eixos (x_1, x_3), que, dada a sua direcção de propagação não paralela à linha de superfície, não são ondas de superfície.

As mesmas observações poderão ser formuladas relativamente à propagação da onda isovolúmica, representada pelos termos B'_m e B''_m.

A combinação das equações de onda atrás referidas com as relações de compatibilidade entre deslocamentos e extensões conduz às seguintes expressões para as componentes do campo dos deslocamentos:

$$u_1 = -\left(\frac{v_{pm}}{\omega}\right)^2 \frac{\partial \bar{\varepsilon}_m}{\partial x_1} - 2\left(\frac{v_{sm}}{\omega}\right)^2 \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_3} \tag{3.5}$$

$$u_3 = -\left(\frac{v_{pm}}{\omega}\right)^2 \frac{\partial \bar{\varepsilon}_m}{\partial x_3} + 2\left(\frac{v_{sm}}{\omega}\right)^2 \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_1} \tag{3.6}$$

Por sua vez, partindo das relações constitutivas da elasticidade linear e utilizando as equações (3.5) e (3.6) é possível determinar as seguintes expressões para as componentes do campo de tensões em função da extensão volúmica $\bar{\varepsilon}$ e da rotação em torno do eixo 2, Ω_2 :

$$\sigma_{33} = \rho_m \left[v_{pm}^2 \bar{\varepsilon}_m + 2 v_{sm}^2 \left(\left(\frac{v_{pm}}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_m}{\partial x_1^2} + 2\left(\frac{v_{sm}}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \right] \tag{3.7}$$

$$\sigma_{13} = 2\rho_m v_{sm}^2 \left[-\left(\frac{v_{pm}}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}_m}{\partial x_1 \partial x_3} + \left(\frac{v_{sm}}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial x_3^2} \right) \right] \tag{3.8}$$

Um dos conjuntos de condições de fronteira do problema, expresso nas equações (2.48), dita que em interfaces de estratos contíguos deverá haver continuidade no campo de deslocamentos e tensões.

Dado que a garantia de continuidade de deslocamentos fica assegurada se as correspondentes componentes de velocidade, $\dot{u}_1$ e $\dot{u}_3$, o forem e que a velocidade de fase v é a mesma em todos os estratos, o método de Haskell-Thomson recorre às quantidades adimensionais $\dot{u}_1/v$ e $\dot{u}_3/v$ para imposição dessa continuidade.

Substituindo as soluções harmónicas complexas para a extensão volúmica $\bar{\varepsilon}$ e para a rotação Ω, dadas em (3.1) e (3.2), nas equações das componentes dos deslocamentos e das tensões (3.5) a (3.8), eliminando destas a parcela exponencial dependente da coordenada x_1 e aplicando a fórmula de Euler às exponenciais, encontram-se as seguintes equações para as componentes adimensionais $\dot{u}_1/v$ e para as componentes de tensão σ_{33}, σ_{13} em função das incógnitas constantes A'_m, A''_m, B'_m e B''_m para um estrato genérico m:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{u}_1}{v} &= -\left(\frac{v_{pm}}{v}\right)^2 \left[\left(A'_m + A''_m\right)\cos\left(k\alpha_m x_3\right) - i\left(A'_m - A''_m\right)\sin\left(k\alpha_m x_3\right)\right] - \\ &-\gamma_m \beta_m \left[\left(B'_m - B''_m\right)\cos\left(k\beta_m x_3\right) - i\left(B'_m + B''_m\right)\sin\left(k\beta_m x_3\right)\right]\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{u}_3}{v} &= -\left(\frac{v_{pm}}{v}\right)^2 \alpha_m \left[-i\left(A'_m + A''_m\right)\sin\left(k\alpha_m x_3\right) + \left(A'_m - A''_m\right)\cos\left(k\alpha_m x_3\right)\right] + \\ &+\gamma_m \left[-i\left(B'_m - B''_m\right)\sin\left(k\beta_m x_3\right) + \left(B'_m + B''_m\right)\cos\left(k\beta_m x_3\right)\right]\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= -\rho_m v_{pm}^2 \left(\gamma_m - 1\right)\left[\left(A'_m + A''_m\right)\cos\left(k\alpha_m x_3\right) - i\left(A'_m - A''_m\right)\sin\left(k\alpha_m x_3\right)\right] - \\ &-\rho_m v^2 \gamma_m^2 \beta_m \left[\left(B'_m - B''_m\right)\cos\left(k\beta_m x_3\right) - i\left(B'_m + B''_m\right)\sin\left(k\beta_m x_3\right)\right]\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \rho_m v_{pm}^2 \gamma_m \alpha_m \left[-i\left(A'_m + A''_m\right)\sin\left(k\alpha_m x_3\right) + \left(A'_m - A''_m\right)\cos\left(k\alpha_m x_3\right)\right] - \\ &-\rho_m v^2 \gamma_m \left(\gamma_m - 1\right)\left[-i\left(B'_m - B''_m\right)\sin\left(k\beta_m x_3\right) + \left(B'_m + B''_m\right)\cos\left(k\beta_m x_3\right)\right]\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde:

$$\gamma_m = 2\left(\frac{v_{sm}}{v}\right)^2 \tag{3.13}$$

As equações acima apresentadas são válidas no interior de cada estrato m, devendo, necessariamente, respeitar o princípio de continuidade entre estratos já enunciado.

Colocando a origem da coordenada local x_3 na interface superior do estrato m, conforme representado na seguinte figura:

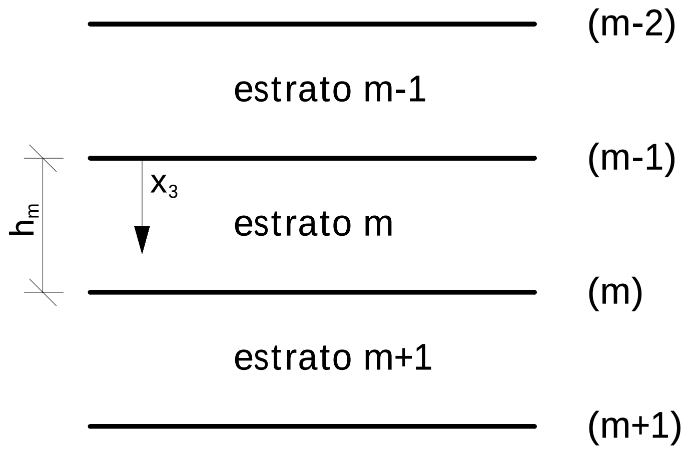


Figura 3.1 – Estrato genérico m e suas interfaces superior e inferior

As componentes adimensionais $\dot{u}_i/v$ e as componentes do campo de tensões na interface (m-1) obtêm-se substituindo nas equações anteriores $x_3 = 0$, o que, passando para uma representação em forma matricial, resulta em:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\dot{u}_{1;(m-1)}}{v} \\ \dfrac{\dot{u}_{3;(m-1)}}{v} \\ \sigma_{33;(m-1)} \\ \sigma_{13;(m-1)} \end{bmatrix} = E_m \begin{bmatrix} A'_m + A''_m \\ A'_m - A''_m \\ B'_m - B''_m \\ B'_m + B''_m \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

onde:

$$E_m = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{v_{pm}}{v}\right)^2 & 0 & -\gamma_m\beta_m & 0 \\ 0 & -\left(\dfrac{v_{pm}}{v}\right)^2 \alpha_m & 0 & \gamma_m \\ -\rho_m v_{pm}^2 \left(\gamma_m - 1\right) & 0 & -\rho_m v^2 \gamma_m^2 \beta_m & 0 \\ 0 & \rho_m v_{pm}^2 \gamma_m \alpha_m & 0 & -\rho_m v^2 \gamma_m \left(\gamma_m - 1\right) \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Realizando a mesma operação, mas para a interface inferior do estrato, designada por interface (m), calculam-se igualmente as componentes adimensionais $\dot{u}_i/v$ e as componentes do campo de tensões nesta interface igualando x_3 à espessura do estrato h_m.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\dot{u}_{1;(m)}}{v} \\ \dfrac{\dot{u}_{3;(m)}}{v} \\ \sigma_{33;(m)} \\ \sigma_{13;(m)} \end{bmatrix} = D_m \begin{bmatrix} A'_m + A''_m \\ A'_m - A''_m \\ B'_m - B''_m \\ B'_m + B''_m \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

onde:

$D_m =$

$$\begin{bmatrix} -\left(\dfrac{v_{pm}}{v}\right)^2 \cos P_m & i\left(\dfrac{v_{pm}}{v}\right)^2 \sin P_m & -\gamma_m\beta_m \cos Q_m & i\gamma_m\beta_m \sin Q_m \\ i\left(\dfrac{v_{pm}}{v}\right)^2 \alpha_m \sin P_m & -\left(\dfrac{v_{pm}}{v}\right)^2 \alpha_m \cos P_m & -i\gamma_m \sin Q_m & \gamma_m \cos Q_m \\ -\rho_m v_{pm}^2 \left(\gamma_m - 1\right) \cos P_m & i\rho_m v_{pm}^2 \left(\gamma_m - 1\right) \sin P_m & -\rho_m v^2 \gamma_m^2 \beta_m \cos Q_m & i\rho_m v^2 \gamma_m^2 \beta_m \sin Q_m \\ -i\rho_m v_{pm}^2 \gamma_m \alpha_m \sin P_m & \rho_m v_{pm}^2 \gamma_m \alpha_m \cos P_m & i\rho_m v^2 \gamma_m \left(\gamma_m - 1\right) \sin Q_m & -\rho_m v^2 \gamma_m \left(\gamma_m - 1\right) \cos Q_m \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

com $P_m = k\alpha_m h_m$ e $Q_m = k\beta_m h_m$.

A partir das equações (3.14) e (3.16) é possível determinar uma relação matricial linear entre os elementos do vector $\left(\dot{u}_{1;(m-1)}/v \quad \dot{u}_{3;(m-1)}/v \quad \sigma_{33;(m-1)} \quad \sigma_{13;(m-1)}\right)$ com o correspondente vector referente à interface inferior $\left(\dot{u}_{1;(m)}/v \quad \dot{u}_{3;(m)}/v \quad \sigma_{33;(m)} \quad \sigma_{13;(m)}\right)$ por meio de:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\dot{u}_{1;(m)}}{v} \\ \dfrac{\dot{u}_{3;(m)}}{v} \\ \sigma_{33;(m)} \\ \sigma_{13;(m)} \end{bmatrix} = D_m E_m^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\dot{u}_{1;(m-1)}}{v} \\ \dfrac{\dot{u}_{3;(m-1)}}{v} \\ \sigma_{33;(m-1)} \\ \sigma_{13;(m-1)} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

A matriz $a_m = D_m E_m^{-1}$ é assim uma matriz de transferência entre as interfaces superior e inferior de um dado estrato m, no que se refere aos campos de deslocamentos e de tensões. Definindo uma matriz a_{m-1} referente a um estrato superior adjacente ao estrato m, conforme representado na Figura 3.1, e relembrando o requisito de continuidade de $\dot{u}_1/v$, σ_{33} e σ_{13} em cada interface, demonstra-se que:

$$\begin{aligned} &\left(\dot{u}_{1;(m)}/v \quad \dot{u}_{3;(m)}/v \quad \sigma_{33;(m)} \quad \sigma_{13;(m)}\right) = \\ &= a_m a_{m-1} \left(\dot{u}_{1;(m-2)}/v \quad \dot{u}_{3;(m-2)}/v \quad \sigma_{33;(m-2)} \quad \sigma_{13;(m-2)}\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

A equação anterior ilustra o princípio que permite a concatenação do sistema global numa única matriz, essência do método de Haskell-Thomson, que é realizada por repetição estrato a estrato da equação (3.19). Para um meio formado por n estratos, em que ao semi-espaço é atribuído o número de ordem n, tem-se:

$$\begin{aligned}&\left(\dot{u}_{1;(n-1)}/v \quad \dot{u}_{3;(n-1)}/v \quad \sigma_{33;(n-1)} \quad \sigma_{13;(n-1)}\right)=\\&=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1\left(\dot{u}_{1;(0)}/v \quad \dot{u}_{3;(0)}/v \quad \sigma_{33;(0)} \quad \sigma_{13;(0)}\right)\end{aligned} \tag{3.20}$$

Por aplicação nesta equação da inversa da equação (3.14) para o estrato n, calcula-se a matriz de transferência global J do método de Haskell-Thomson que relaciona as componentes $\dot{u}_1/v$ e de tensão à superfície do meio com as constantes que caracterizam a propagação de ondas no semi-espaço, através de:

$$\begin{aligned}&\left(A_n^{'}+A_n^{''} \quad A_n^{'}-A_n^{''} \quad B_n^{'}-B_n^{''} \quad B_n^{'}+B_n^{''}\right)=\\&=E_n^{-1}a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1\left(\dot{u}_{1;(0)}/v \quad \dot{u}_{3;(0)}/v \quad \sigma_{33;(0)} \quad \sigma_{13;(0)}\right)=\\&=J\left(\dot{u}_{1;(0)}/v \quad \dot{u}_{3;(0)}/v \quad \sigma_{33;(0)} \quad \sigma_{13;(0)}\right)\end{aligned} \tag{3.21}$$

As equações até aqui apresentadas podem ser consideradas genéricas para qualquer tipo de propagação de ondas, podendo ser utilizadas para a modelação tanto de ondas de Rayleigh como de ondas volúmicas a atravessar o meio considerado [Haskell, 1953].
A particularização para a propagação específica de ondas de Rayleigh é feita introduzindo na expressão (3.21) as condições de fronteira que definem este tipo de ondas, ou seja, a inexistência de tensões à superfície, $\sigma_{33;(0)}=\sigma_{13;(0)}=0$, e a inexistência de fontes no infinito, $A_n^{''}=B_n^{''}=0$, conduzindo à seguinte reformulação do problema de propagação:

$$\left(A_n^{'} \quad A_n^{'} \quad B_n^{'} \quad B_n^{'}\right)=J\left(\dot{u}_{1;(0)}/v \quad \dot{u}_{3;(0)}/v \quad 0 \quad 0\right) \tag{3.22}$$

Eliminando as constantes $A_n^{'}$ e $B_n^{'}$ da expressão anterior, encontra-se a desejada equação característica de Rayleigh ou, simplificadamente, equação de dispersão do método de Haskell-Thomson que pode ser formulada por:

$$J'\begin{bmatrix}\dot{u}_{1;(0)}\\ \dot{u}_{3;(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Nesta equação a matriz J' é calculada a partir da anterior matriz J através da seguinte transformação:

$$J' = \begin{bmatrix} J_{11} - J_{21} & J_{12} - J_{22} \\ J_{31} - J_{41} & J_{32} - J_{42} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

A equação de dispersão (3.23) representa um problema de valores e vectores próprios cuja resolução requer a procura dos valores que anulam o determinante da matriz J'. Sendo conhecidas as propriedades elásticas e a espessura dos estratos que formam o meio em estudo, as incógnitas do problema enunciado reduzem-se à velocidade de fase das ondas de Rayleigh v e ao número de onda k.

Dada a elevada complexidade e a não linearidade das componentes da matriz J', o cálculo das soluções (v, k) é somente possível através de um método numérico de pesquisa de zeros de funções, sendo recomendável, por razões de eficiência computacional, fixar os valores da velocidade de fase v e procurar os correspondentes valores de k que formam as soluções da equação de dispersão.

No domínio das altas frequências aumenta a dificuldade na determinação numérica das soluções (v, k), reflectindo-se este facto na qualidade das curvas de dispersão calculadas por via deste método, como o demonstram os resultados apresentados em 3.4.

Conforme já mencionado em 2.3.2, para uma dada velocidade de fase v poderão ser encontradas uma ou mais soluções de número de onda k que satisfazem a equação característica de Rayleigh, correspondentes aos vários modos de propagação de ondas de Rayleigh em meios estratificados.

Conhecidas as soluções (v, k_j) da equação de dispersão, o cálculo das componentes modais do campo de velocidades à superfície do meio é realizado através da equação:

$$\frac{\dot{u}_{1.(0)}}{\dot{u}_{3.(0)}} = \frac{J_{22} - J_{12}}{J_{11} - J_{21}} \tag{3.25}$$

obtida por desenvolvimento da equação (3.23).

O cálculo dos campos de deslocamento e de tensão correspondentes aos modos de propagação requer, primeiramente, a determinação das constantes $A_m^{'}$, $A_m^{''}$, $B_m^{'}$ e $B_m^{''}$

para cada estrato m, realizada por aplicação da expressão (3.21), substituindo nesta o índice n que designa o último estrato (semi-espaço), pelo índice m.

Os referidos campos modais de propagação são então determinados através das expressões (3.9) a (3.12), por substituição discreta da coordenada x_3.

3.3 Programa ht

Para ilustrar a aplicação do método acima descrito foi desenvolvida uma ferramenta computacional elaborada no programa MATLAB, para o cálculo da curva de dispersão e dos modos de propagação associados a um meio definidos pelo utilizador. As limitações e domínios de aplicabilidade da ferramenta são aqueles já referidos na descrição do método de Haskell-Thomson, ou seja, meios heterogéneos compostos por n estratos horizontais homogéneos isotrópicos elásticos-lineares.

A escolha do programa MATLAB deveu-se ao facto de se tratar de um programa optimizado para operações matriciais, de existirem diversas ferramentas/algoritmos já desenvolvidas e prontas a incorporar nas novas ferramentas a desenvolver, de se tratar de uma linguagem com elevada capacidade de síntese e de permitir a alocação dinâmica de memória.

Os dados a fornecer para a execução do programa são as propriedades dos n estratos existentes, dadas por:

ρ	v_P	v_S	h	(estrato 1)
ρ	v_P	v_S	h	(estrato 2)
(…)	(…)	(…)	(…)	(…)
ρ	v_P	v_S	-	meio infinito

Tratando-se de um método de pesquisa numérica de zeros de uma função (determinante da matriz J') que depende de duas variáveis (v,k), é necessário fixar uma das variáveis, neste caso a velocidade de fase v, e encontrar as soluções, k_j, que respeitam a equação característica do problema. O intervalo de variabilidade das velocidades de fase v a considerar na análise é limitado por $\left[0.93\times v_{S;min} \quad 1.00\times v_{S;max}\right]$, onde

$v_{S;min}$ e $v_{S;max}$ representam, respectivamente, valores mínimo e máximo das velocidades de ondas S, v_S, presentes no meio.

Para pesquisa numérica dos valores de k_j pretendidos foi utilizado um dos algoritmos disponíveis na biblioteca do programa MATLAB, denominado *fzero*, destinado à pesquisa de zeros de funções, tendo-se realizado sobre este pequenas adaptações como, por exemplo, a limitação do domínio de procura de soluções a números reais positivos.

Determinada a curva de dispersão, o programa *ht* permite ainda o cálculo e visualização dos modos de propagação associados a frequências definidas pelo utilizador.

3.4 Curva de dispersão e modos de propagação. Exemplos

Serão seguidamente calculadas as curvas de dispersão e os correspondentes modos de propagação de três casos distintos de meios elásticos com heterogeneidade discreta por estratos, utilizando a ferramenta computacional acima descrita.

Procurar-se-á igualmente focar e analisar os aspectos de maior relevo das curvas de dispersão e dos modos de propagação calculados, com vista à confirmação numérica de algumas das constatações teóricas formuladas no capítulo 2.

Os três casos em estudo são um perfil normalmente dispersivo, com rigidez crescente em profundidade, um perfil inversamente dispersivo correspondente à existência de um estrato mole entre dois estratos rijos e um outro perfil inversamente dispersivo em que é estudado o efeito da existência de um estrato rijo entre dois estratos moles.

3.4.1 Perfil normalmente dispersivo

Um perfil com rigidez crescente em profundidade corresponde à situação característica e maioritária dos perfis reais observados. Nesse sentido estudar-se-á seguidamente um perfil desta natureza, composto por dois estratos elásticos homogéneos, conforme descrito na seguinte tabela:

ρ [t/m^3]	v_P [m/s]	v_S [m/s]	h_m [m]
1.8	540	300	20
1.9	900	500	∞

Tabela 3.1 – Características do perfil normalmente dispersivo

A resolução da equação de dispersão do método de Haskell-Thomson, formada para o perfil em estudo, permitiu determinar as curvas de dispersão apresentadas na Figura 3.2 e na Figura 3.3. Tal como já foi referido, este é um método numérico discreto cujas soluções da equação de dispersão são obtidas por um processo de procura de zeros iterativo. Por este motivo as curvas apresentadas encontram-se definidas por pontos, em vez de linhas contínuas, onde, no entanto, é geralmente possível identificar e separar os diversos modos de propagação aí representados.

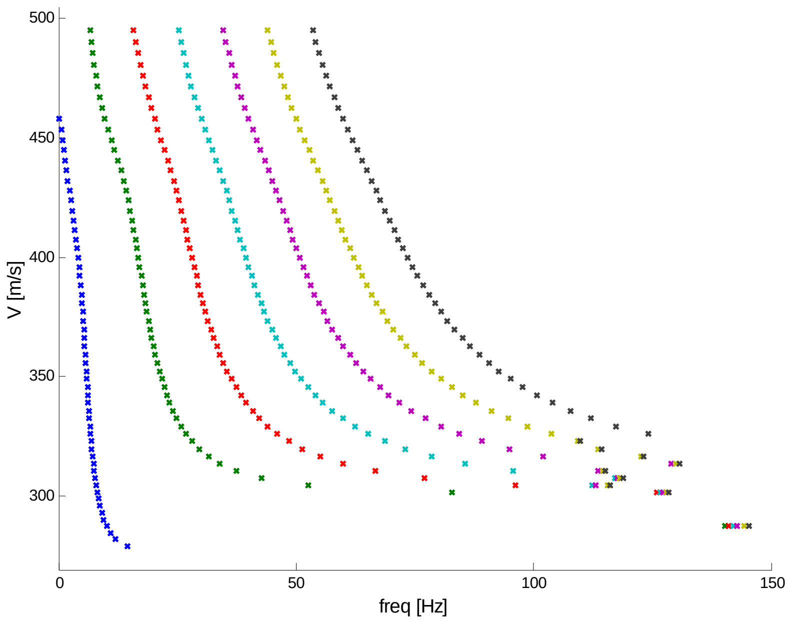


Figura 3.2 – Curva de dispersão perfil normalmente dispersivo (f,v)

A primeira curva de dispersão representada na Figura 3.2 mostra a velocidade de fase associada a cada modo de propagação na gama de frequências normalmente considerada em análises de caracterização geotécnica. Aqui é possível observar que para baixas frequências existe apenas o modo de propagação fundamental, o que se justifica pelo facto de baixas frequências estarem associadas a elevados comprimentos de onda, pelo que as ondas de Rayleigh são dominantemente influenciadas pelo estrato semi-infinito. À medida que a frequência aumenta a influência do estrato superficial vai aumentando, uma vez que o comprimento de onda diminui, e surgem outros modos de propagação. Conforme já referido em 3.2, para $v > 500 m/s$, velocidade das ondas S do estrato mais rígido, as soluções correspondem a ondas não evanescentes em profundidade, não representando, como tal, ondas de superfície.

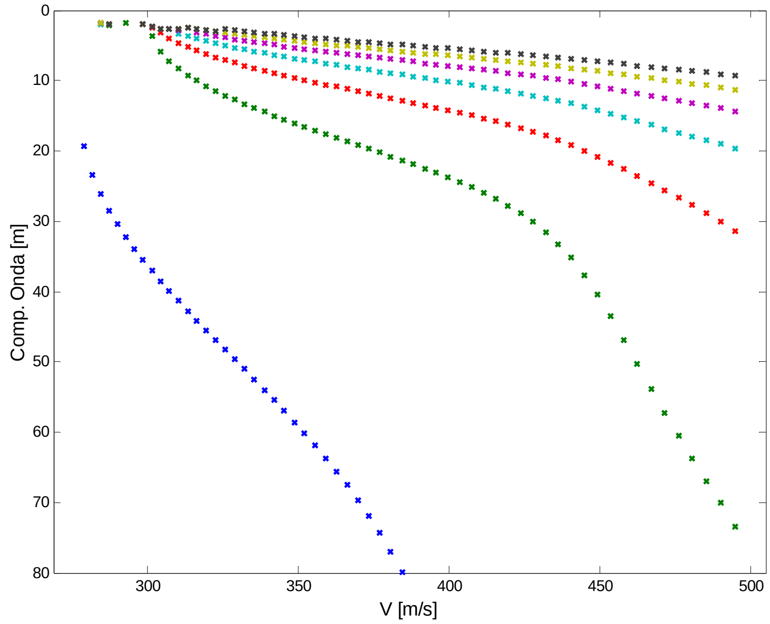


Figura 3.3 – Curva de dispersão perfil normalmente dispersivo (v,λ)

O formato da curva de dispersão apresentado na Figura 3.3 procura estabelecer um paralelismo qualitativo entre a forma das curvas de dispersão e o perfil de rigidez do meio afectado. Como já foi referido, a maiores comprimentos de onda correspondem maiores profundidades afectadas e a maiores velocidades de fase estão associados meios mais rígidos. Por este motivo é expectável que em perfis normalmente dispersivos as curvas de dispersão sigam o padrão evidenciado na Figura 3.3 onde a velocidade de fase, independente do modo em causa, cresça monotonicamente com o comprimento de onda.

Uma vez calculados os valores próprios da equação de dispersão e seguindo a metodologia descrita em 3.2, determinam-se as quatro componentes dos campos modais de propagação que expressam a variação das características das ondas de Rayleigh com a profundidade, referentes à propagação em regime livre do problema homogéneo em estudo.

A Figura 3.4 representa os dois primeiros, e únicos, modos de propagação para uma frequência de 10Hz e a Figura 3.5 os três primeiros modos de propagação calculados para uma frequência de 50Hz.

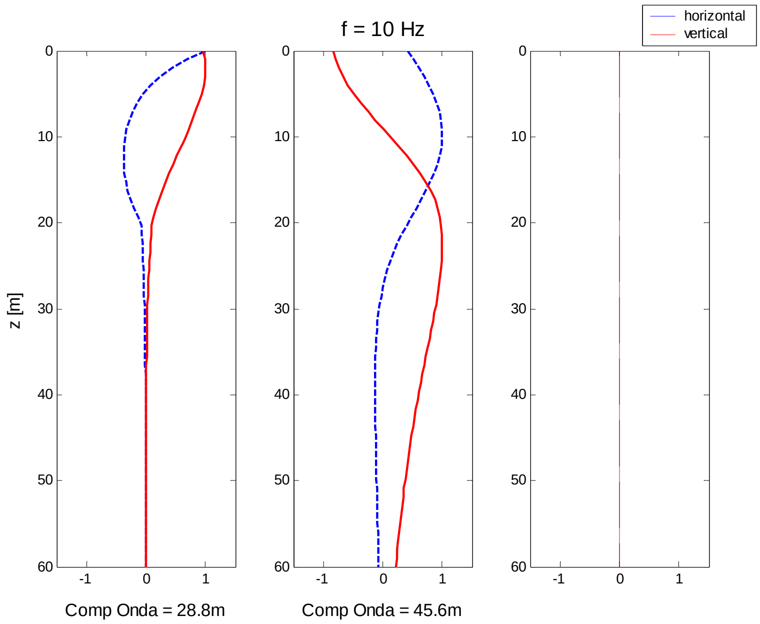


Figura 3.4 – Modos de propagação – perfil normalmente dispersivo – f = 10Hz

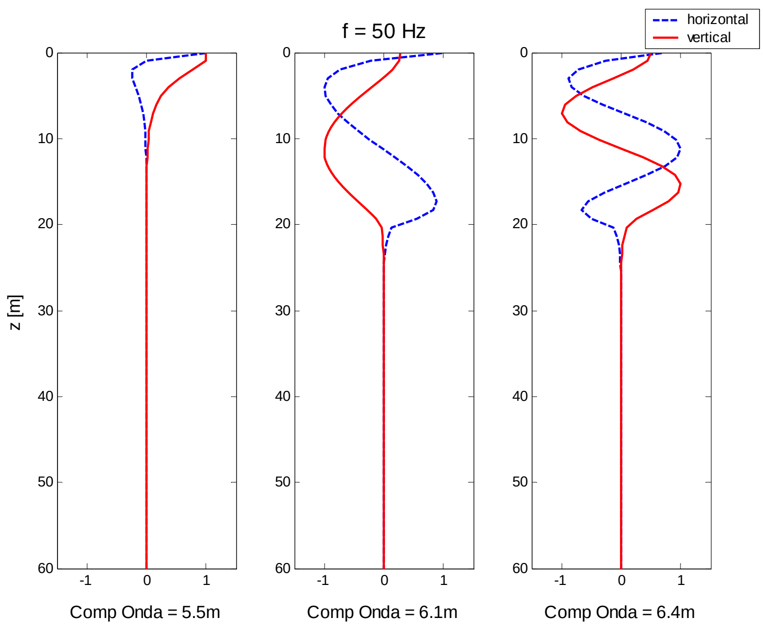


Figura 3.5 – Modos de propagação – perfil normalmente dispersivo – f = 50Hz

Os modos de propagação apresentados como exemplo, normalizados para valor máximo unitário, evidenciam a dependência, atrás referida, da profundidade afectada pelas ondas de Rayleigh relativamente à frequência.

Outra constatação interessante é que modos mais elevados afectam, igualmente, maiores profundidades, por corresponderem a modos com maior comprimento de onda.

Ainda, o modo de propagação fundamental apresenta, nomeadamente para elevadas frequências, uma forma muito semelhante à do modo de propagação típico de meios homogéneos (ver Figura 2.5), visto que com o aumento da frequência e a diminuição da zona envolvida pela passagem de ondas de Rayleigh, a influência da mudança brusca de propriedades elásticas a uma determinada profundidade, característica dos meios heterogéneos por estratos, deixa de se fazer sentir ao nível do primeiro modo de propagação, que fica assim exclusivamente determinado pelas propriedades elásticas do estrato superficial, tudo se passando como se de um semi-espaço homogéneo infinito se tratasse. A velocidade de fase das ondas de Rayleigh para este modo de propagação pode assim ser determinada pela expressão (2.39), definida para meios homogéneos, independente da frequência, que para $\nu = 0.3$ e uma velocidade das ondas S do estrato superficial de 300m/s resulta em:

$$v\ ;\ \ 0.92 \cdot v_{S.(1)} = 276 m/s \tag{3.26}$$

que corresponde à velocidade de fase indicada na Figura 3.5 para este modo de propagação ($v = \lambda \cdot f$).

Assim se justifica que em meios normalmente dispersivos o primeiro modo de propagação seja o modo dominante em toda a gama de frequências e que a partir de uma certa frequência este modo apresente uma assíntota horizontal na curva de dispersão, dado que a velocidade de propagação deixa de ser uma função da frequência (ver correspondente curva de dispersão calculada pelo método dos estratos finos).

A figura seguinte representa as configurações das tensões normal e de corte associadas aos três primeiros modos de propagação para a frequência de 50Hz, normalizadas para valor máximo unitário, com padrões de comportamento semelhantes aos evidenciados pelos modos de propagação em deslocamentos.

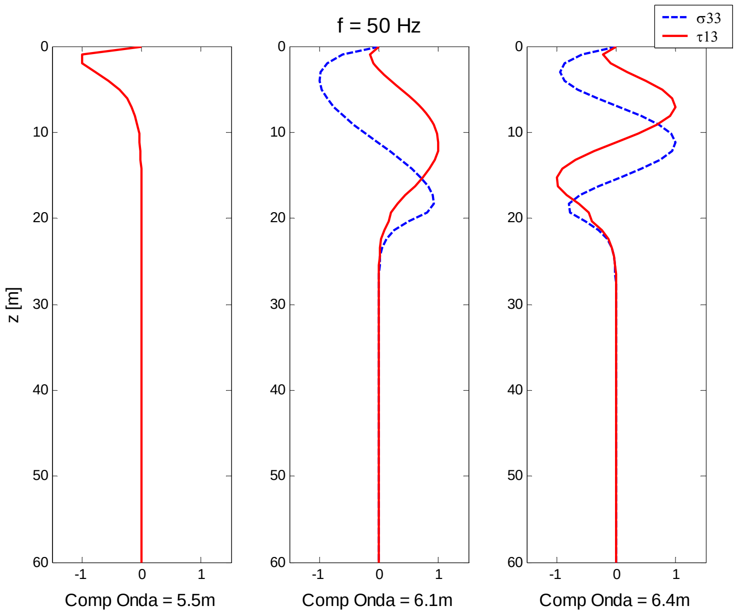


Figura 3.6 – Modos de propagação de tensões – perfil normalmente dispersivo – f = 50Hz

3.4.2 Perfil inversamente dispersivo – tipo 1

O primeiro tipo de perfil inversamente dispersivo apresentado como exemplo corresponde à existência de dois estratos com rigidez decrescente em profundidade assentes sobre um espaço semi-infinito mais rígido. com características descritas na tabela abaixo apresentada. Apesar de não representar a situação mais frequente, é no entanto comum existirem estratos com características de rigidez inferiores sob estratos mais rígidos. Um caso típico corresponde à existência de uma zona superficial consolidada para efeitos de construção em locais de características pobres no que respeita à capacidade de suporte. Como outro exemplo, embora com menores espessuras, refere-se a fundação de uma via rodoviária.

ρ [t/m^3]	v_P [m/s]	v_S [m/s]	h_m [m]
1.8	630	350	10
1.8	450	250	10
1.9	720	400	∞

Tabela 3.2 – Características do perfil inversamente dispersivo – tipo 1

Observando as curvas de dispersão determinadas para este caso, constata-se que a velocidade de fase deixa de ser uma função monotonicamente decrescente com a frequência (Figura 3.7), ou crescente com o comprimento de onda (Figura 3.8), sendo este o traço mais evidente que diferencia as curvas de dispersão de perfis normalmente dispersivos com as curvas de dispersão de perfis inversamente dispersivos.

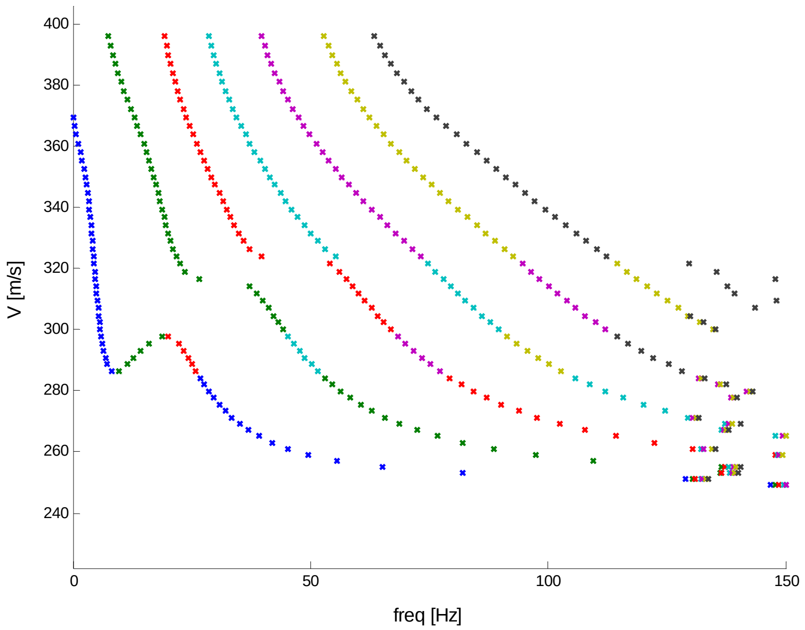


Figura 3.7 – Curva de dispersão perfil inversamente dispersivo tipo 1 (f,v)

Em problemas de propagação forçada, num perfil normalmente dispersivo, o modo de propagação fundamental é sempre o modo de propagação dominante. Em perfis inversamente dispersivos, pelo contrário, tal acontece apenas para baixas frequências, surgindo a influência de modos de maior ordem para frequências mais altas. A curva de dispersão aparente ou efectiva, definida em 2.3.2.3, reflecte o fenómeno atrás enunciado e em perfis inversamente dispersivos do tipo agora analisado apresenta um comportamento idêntico ao representado na Figura 2.10. Será assim de esperar que a curva de dispersão aparente para o perfil em análise apresente uma assíntota horizontal para uma velocidade de fase exclusivamente relacionada com as características elásticas do estrato superficial, pelas mesmas razões atrás enunciadas, ou seja, uma assíntota para $v = 322 m/s$. Pelo facto, já enunciado, de se terem determinado as soluções, valores próprios, do problema homogéneo fixando os valores da velocidade, a existência desta assíntota horizontal não é evidente nas curvas de dispersão teóricas calculadas para a propagação em regime livre (ver Figura 4.6).

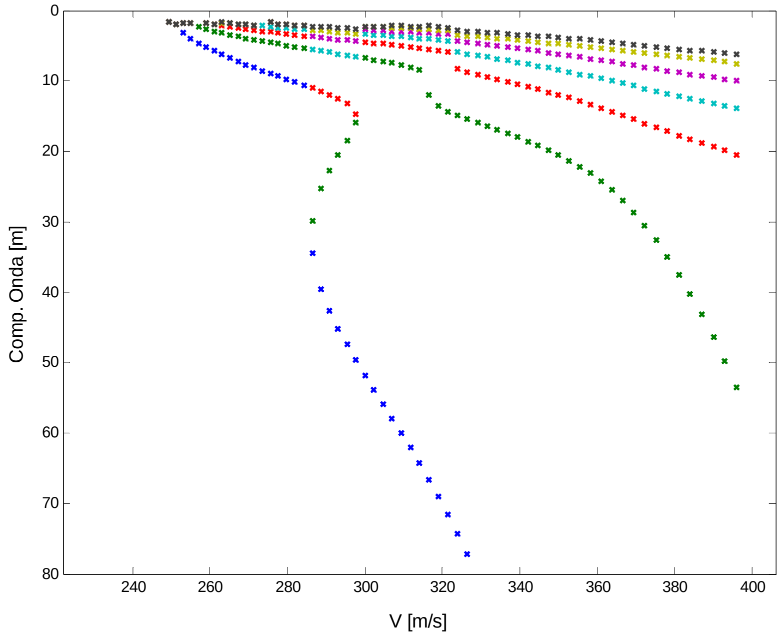


Figura 3.8 – Curva de dispersão perfil inversamente dispersivo tipo 1 (v,λ)

Os deslocamentos associados aos dois primeiros modos de propagação para uma frequência de 10 Hz encontram-se representados na Figura 3.9 e os associados aos três primeiros modos de propagação para uma frequência de 50 Hz na Figura 3.10.

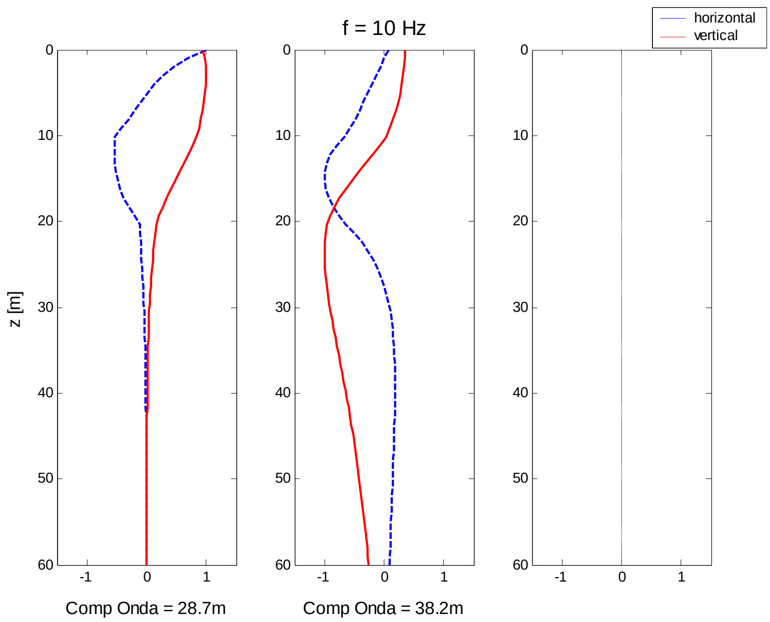


Figura 3.9 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo tipo 1 – f = 10Hz

A principal diferença relativamente ao caso do perfil normalmente dispersivo atrás apresentado encontra-se nos primeiros modos calculados para uma frequência de 50Hz.

Estes modos afectam quase em exclusivo o estrato intermédio menos rígido, tendo componentes praticamente nulas à superfície.

Este é o motivo porque a curva de dispersão aparente ou efectiva, determinada experimentalmente, ou numericamente, com leituras de deslocamentos à superfície do meio afectado, não reflecte a existência destes modos de propagação, determinando que, à superfície, estes modos não sejam dominantes. O terceiro modo de propagação, a que corresponde uma velocidade de fase aproximada de 325m/s, encontra-se sobre a assíntota horizontal atrás referida e é como tal expectável que tenha componentes do movimento não nulas à superfície.

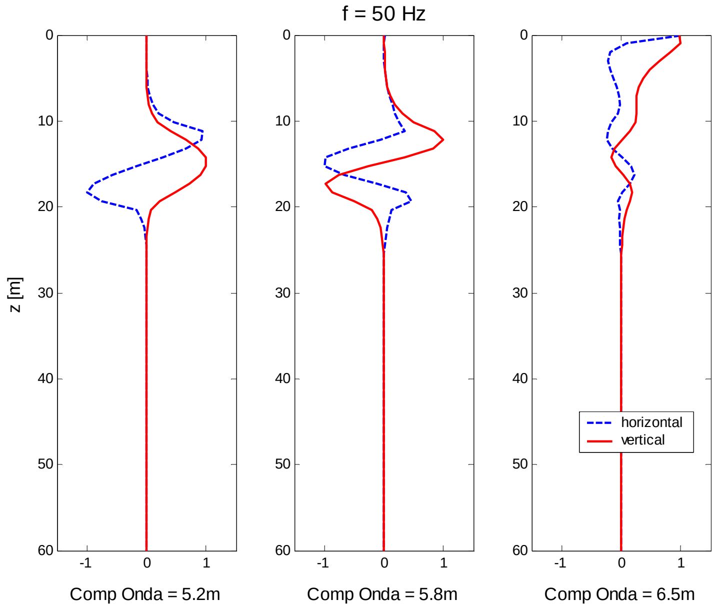


Figura 3.10 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo tipo 1 – f = 50Hz

3.4.3 Perfil inversamente dispersivo – tipo 2

O último caso apresentado como exemplo corresponde à situação de existência de um estrato mais rijo entre dois estratos moles, que por não apresentar um perfil de rigidez sempre crescente em profundidade, recebe novamente a designação genérica de perfil inversamente dispersivo.

ρ [ton/m³]	v_P [m/s]	v_S [m/s]	h_m [m]
1.8	500	280	5
1.8	720	400	10
1.8	500	280	5
1.9	720	400	∞

Tabela 3.3 – Características do perfil inversamente dispersivo – tipo 2

A curva de dispersão calculada através do método de Haskell-Thomson revela um comportamento global intermédio dos dois casos atrás abordados, não sendo detectável uma inversão clara da tendência sempre decrescente da velocidade de fase com a frequência, como no exemplo anterior, nem um comportamento tão uniforme e ausente de variações bruscas como no caso apresentado no perfil normalmente dispersivo.

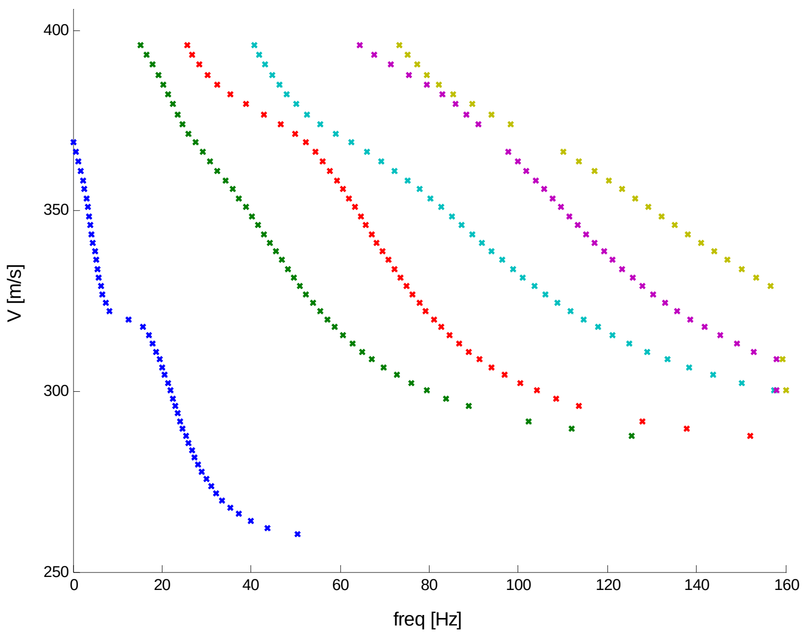


Figura 3.11 – Curva de dispersão perfil inversamente dispersivo tipo 1 (f,v)

Os três primeiros modos de propagação, agora para as frequências de 25Hz e 50Hz, encontram-se representados nas figuras seguintes:

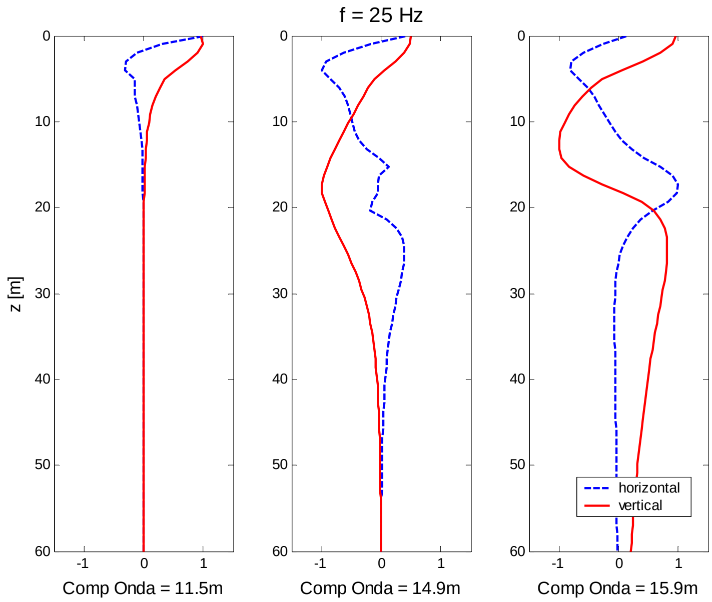


Figura 3.12 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo – tipo 2 – f = 25Hz

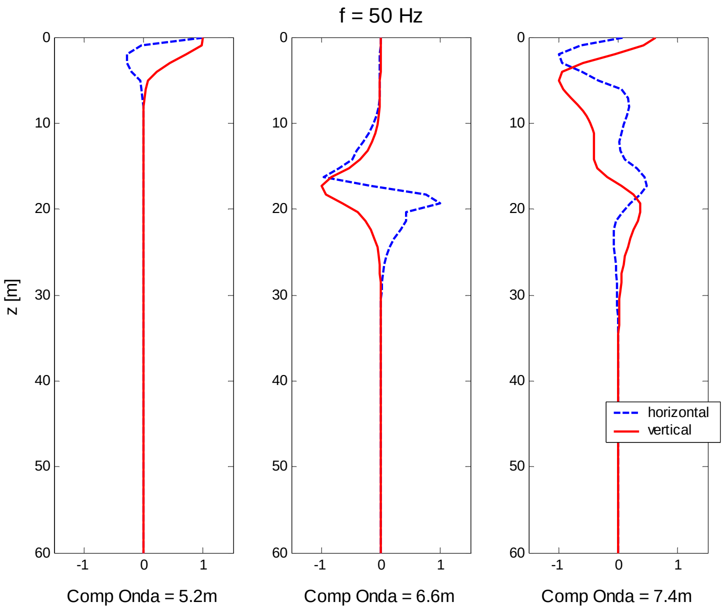


Figura 3.13 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo – tipo 2 – f = 50Hz

4 Método dos Estratos Finos

4.1 Introdução

O método dos estratos finos, [Kausel e Roesset, 1981] e [Kausel e Peek, 1982], deriva do método de Haskell-Thomson anteriormente apresentado, transformando as matrizes de transferência características desse método em matrizes de rigidez, conceptualmente idênticas às matrizes de rigidez da análise estrutural.

Esta mudança de forma na formulação matricial do problema, não consistindo em si um aumento de generalidade ou de precisão matemática relativamente ao método anterior, apresenta algumas vantagens dado que (1) as matrizes de rigidez são simétricas, (2) envolvem menos operações no seu processo de construção e em posteriores análises do que as matrizes de transferência, (3) possibilitam mais facilmente a introdução de excitações dinâmicas simultâneas a vários níveis, etc.) [Kausel e Roesset, 1981].

No caso em que as espessuras dos estratos são pequenas quando comparadas com os comprimentos de onda envolvidos na análise, é possível linearizar as equações transcendentais que definem os campos de deslocamentos na direcção vertical e passar para um problema de valores e vectores próprios algébrico, cujas soluções podem ser obtidas através de uma das técnicas consagradas para este tipo de problemas.

O método dos estratos finos resume-se assim à subdivisão de cada estrato num número adequado de estratos finos, à definição da matriz de rigidez, algébrica para cada estrato fino, no domínio do número de onda e da frequência, à assemblagem da matriz de rigidez global e, no caso da resolução do problema homogéneo, ao cálculo dos valores e vectores próprios do correspondente problema algébrico.

4.2 Formulação por matrizes de rigidez

Considerando um estrato elástico homogéneo genérico e com espessura conhecida, a formulação anteriormente apresentada mostrou ser possível determinar uma relação algébrica linear entre os deslocamentos e tensões (harmónicos) no limite superior do estrato com os correspondentes deslocamentos e tensões no seu limite inferior. Designando por H a matriz de transferência assim definida, a relação acima mencionada pode ser expressa por:

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ S_1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

na qual U_j representa o vector dos deslocamentos na interface j dependente exclusivamente da coordenada vertical e S_j o correspondente vector das tensões.

O equilíbrio do sistema isolado composto pelo estrato e as suas interfaces superior e inferior, conforme representado na Figura 4.1, é garantido se for aplicado um carregamento exterior $P_1 = S_1$ e $P_2 = -S_2$, transformando a anterior relação em:

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ -P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

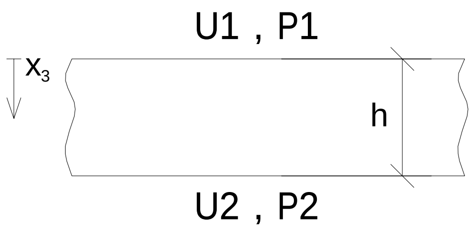


Figura 4.1 – Forças exteriores e deslocamentos presentes num estrato isolado

O sistema de equações expresso em (4.2), através de simples operações de álgebra matricial, pode ser transformado em:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{12}^{-1}H_{11} & H_{12}^{-1} \\ H_{22}H_{12}^{-1}H_{11} - H_{21} & -H_{22}H_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

ou simplesmente:

$$P = KU \tag{4.4}$$

em que K é a matriz de rigidez do estrato isolado e P o vector de forças aplicadas, sendo esta a clássica representação de equilíbrio da análise estrutural. Pode ser demonstrado que K é uma matriz simétrica [Kausel e Roesset, 1981].

Dado que a matriz de transferência de Haskell-Thomson é idêntica caso se considere um sistema de coordenadas cartesianas ou cilíndricas, as expressões até aqui apresentadas podem ser consideradas genéricas independentemente do referencial em uso.

No referencial cartesiano, definido na Figura 2.7, os vectores de deslocamentos U_j e de tensões S_j, para o caso de uma onda plana, são definidos por:

$$\overline{U}_j = \begin{bmatrix} u_{1;j} \\ i \cdot u_{3;j} \end{bmatrix} \text{ e } \overline{S}_j = \begin{bmatrix} \sigma_{13;j} \\ i \cdot \sigma_{33;j} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

onde o índice j se relaciona com a interface em causa e a barra por cima de U e S designa componentes dependentes exclusivamente da coordenada vertical: $\overline{U} = U(x_3)$ e $\overline{S} = S(x_3)$.

Conhecido o vector de forças aplicadas P, o cálculo do campo completo de deslocamentos pressupõe primeiro a resolução do sistema (4.4) para determinação das componentes de $\overline{U}$ e posteriormente a multiplicação do vector $\overline{U}$ pela função de variação espacial e temporal harmónica $e^{i(\omega t - kx_1)}$, ou seja:

$$U(x_1, x_3, t) = \overline{U}(x_3) \cdot e^{i(\omega t - kx_1)} \tag{4.6}$$

No caso em que a espessura do estrato é pequena quando comparada com os comprimentos de onda em análise, ou em que se divide o estrato em n estratos finos para que tal se verifique, é possível linearizar o campo de movimentos, expresso através de funções transcendentais em (3.9) e (3.10) [Lysmer e Waas, 1972].

Kausel e Peek (1982) sugerem, baseados em estudos paramétricos de convergência, que se limitem as espessuras dos estratos de modo a que estas não sejam superiores a ¼ do menor comprimento de onda em análise, ou seja:

$$h' < \frac{\lambda_{mín}}{4} \Leftrightarrow h' < \frac{v_S}{4f_{máx}} \Leftrightarrow \frac{H}{N} < \frac{v_S}{4f_{máx}} \tag{4.7}$$

onde h' designa a espessura do estrato fino, $f_{máx}$ a máxima frequência a considerar na análise e H a espessura do estrato homogéneo a subdividir em N estratos finos.

Este procedimento permite que o cálculo da matriz de rigidez de um dado estrato m se processe através de uma expressão matricial algébrica no domínio do número de onda e da frequência, através de [Kausel e Roesset, 1981]:

$$K_m = A_m k^2 + B_m k + G_m - \omega^2 M_m \tag{4.8}$$

onde as matrizes A_m, B_m, G_m e M_m são matrizes que dependem apenas das propriedades materiais do estrato m. Para o caso em estudo da propagação de uma onda plana, estas matrizes são definidas por:

$$A_m = \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 2(\lambda+2G) & 0 & \lambda+2G & 0 \\ 0 & 2G & 0 & G \\ \lambda+2G & 0 & 2(\lambda+2G) & 0 \\ 0 & G & 0 & 2G \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

$$B_m = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \lambda-G & 0 & -(\lambda+G) \\ \lambda-G & 0 & \lambda+G & 0 \\ 0 & \lambda+G & 0 & -(\lambda-G) \\ -(\lambda+G) & 0 & -(\lambda-G) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$G_m = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} G & 0 & -G & 0 \\ 0 & \lambda+2G & 0 & -(\lambda+2G) \\ -G & 0 & G & 0 \\ 0 & -(\lambda+2G) & 0 & \lambda+2G \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$M_m = \frac{\rho h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

A matriz de rigidez global obtém-se por um processo de espalhamento topológico (assemblagem) em função das adjacências entre estratos, como é próprio do método dos elementos finitos.

Tomando como exemplo o caso de um meio formado por três estratos sobrepostos a um semi-espaço infinito, a matriz de rigidez global seria:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{1} & K_{12}^{1} & & \\ K_{21}^{1} & K_{22}^{1} + K_{11}^{2} & K_{12}^{2} & \\ & K_{21}^{2} & K_{22}^{2} + K_{11}^{3} & K_{12}^{3} \\ & & K_{21}^{3} & K_{22}^{4} + K^{4} \end{bmatrix}$$

onde K_{ij}^{m} representa uma sub-matriz [2×2] da matriz de rigidez do estrato m.

A aplicação do método dos estratos finos obriga à existência, sob um número arbitrário de estratos, de um semi-espaço rígido com deslocamentos nulos, por ser impossível linearizar o campo de deslocamentos de um semi-espaço elástico. Como alternativa Kausel (1981) sugere uma formulação híbrida correspondente à utilização das expressões do campo de deslocamentos exactas, apenas para o semi-espaço elástico. A matriz de rigidez do semi-espaço ficaria assim definida por:

$$K = 2kG\left[\frac{1-s^2}{2(1-2rs)}\begin{Bmatrix} r & 1 \\ 1 & s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}\right] \tag{4.13}$$

onde os parâmetros r e s têm definições semelhantes aos parâmetros α e β do método de Haskell-Thomson:

$$r = \sqrt{1-\left(\frac{v}{v_p}\right)^2} \tag{4.14}$$

$$s = \sqrt{1-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \tag{4.15}$$

Seguindo esta via, a matriz de rigidez global do sistema deixaria de poder ser determinada através da equação algébrica em k e ω apresentada em (4.8), pelo que não será aqui continuada.

A modelação do semi-espaço elástico pode ser concretizada, alternativamente, discretizando a zona superior do semi-espaço, em contacto com as restantes camadas, num número suficiente de estratos finos, até que a amplitude das ondas reflectidas pela superfície rígida seja de tal forma pequena que não tenha influência nas características globais de propagação das ondas de Rayleigh.

4.3 Programa rig

Á semelhança do que foi realizado para o método de Haskell-Thomson, foi desenvolvida uma nova ferramenta computacional, igualmente com recurso ao MATLAB, para o calculo analítico da curva de dispersão e dos modos de propagação associados a um meio definidos pelo utilizador, aplicando agora o método acima descrito.

Os passos do programa podem ser assim resumidos:

- Subdivisão de cada estrato num número suficiente de estratos finos por aplicação da expressão (4.7);
- Calculo das matrizes algébricas A_m, B_m, G_m, M_m para cada estrato fino a partir das expressões (4.9) a (4.12);
- Assemblagem das matrizes globais A, B, G, M;
- Calculo de uma nova matriz $C = G - \omega^2 M$ (o calculo é feito frequência a frequência);
- Reordenação das linhas e colunas da matrizes globais por graus de liberdade em vez de por interface e calculo de novas matrizes $\tilde{A}$ e $\tilde{C}$ [Kausel e Peek, 1982], tal que:

$$K\phi_j = 0 \Leftrightarrow \tilde{K} Z_j = 0 \Leftrightarrow \left(\tilde{A} k_j^2 + \tilde{C}\right) Z_j = 0 \qquad (4.16)$$

onde K é a matriz de rigidez global do sistema, ϕ_j é o vector próprio referente ao modo j e Z_j é uma matriz definida por:

$$Z_j = \begin{bmatrix} \phi_{x_1;j} \\ k_j \cdot \phi_{x_3;j} \end{bmatrix} \qquad (4.17)$$

- Calculo dos valores e vectores próprios associados à expressão (4.14) por meio de um algoritmo, *eig*, pré-existente no programa MATLAB;

4.4 Exemplos

Serão seguidamente calculadas as curvas de dispersão e os correspondentes modos de propagação dos três casos distintos de meios elásticos com heterogeneidade discreta por estratos descritos em 3.4. Pretende-se, desta forma, efectivar as ferramentas computacionais geradas, por comparação entre resultados obtidos, e apontar vantagens e desvantagens de um e outro método.

4.4.1 Perfil normalmente dispersivo

As curvas de dispersão calculadas para o perfil normalmente dispersivo descrito em 3.4.1, aplicando o método dos estratos finos, encontram-se seguidamente representadas.

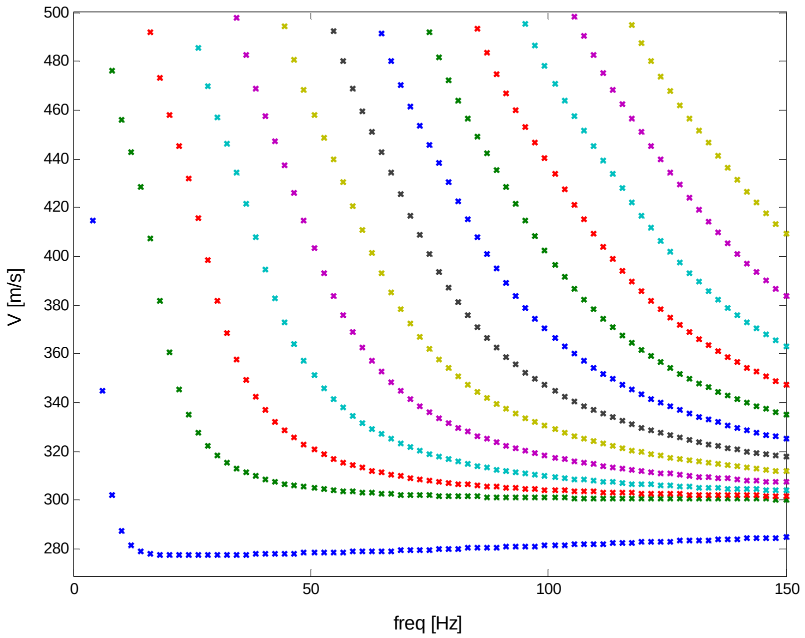


Figura 4.2 – Curva de dispersão perfil normalmente dispersivo (f,v)

Conforme foi referido, a formulação matemática subjacente no método de Haskell-Thomson, favorece que se fixem as velocidades de fase e se procurem, por um processo numérico iterativo, os correspondentes números de onda que anulem a equação de dispersão respectiva. É por este motivo que as linhas aproximadamente horizontais típicas das curvas de dispersão correspondentes a modos de propagação com velocidade de fase constante independente da frequência não surgem bem representadas nas curvas de dispersão determinadas através desse método, ocasionando, em particular para altas frequências, uma má definição e falhas notórias na determinação das soluções do problema homogéneo.

No método dos estratos finos a definição do comportamento das curvas é genericamente melhor, como é evidente nas curvas de dispersão apresentadas na Figura 4.2 e na Figura 4.3, excepto em troços onde a frequência seja aproximadamente constante, como ocorre para o primeiro modo de propagação na zona das baixas frequências. Relembrando, para o método dos estratos finos a equação de dispersão é montada por assemblagem da matriz de rigidez global do sistema, e as soluções do problema homogéneo são obtidas através do cálculo dos valores próprios dessa matriz, que, neste caso, são calculados através de um algoritmo disponível no programa MATLAB. As curvas de dispersão são assim, por defeito, determinadas para todos os modos existentes, fixando-se apenas a gama de frequências a analisar, ao contrário do anterior método onde se predefinem o número de modos a pesquisar e todos os intervalos das grandezas a considerar.

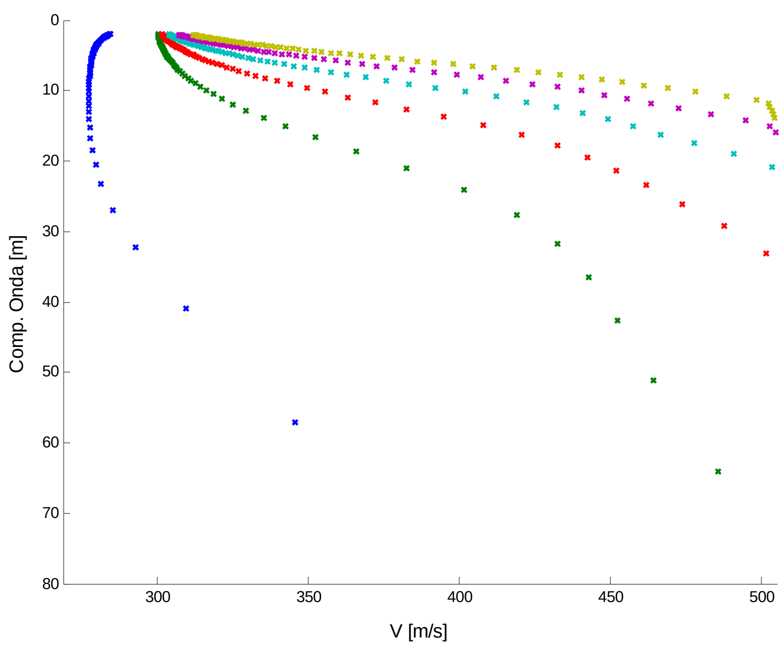


Figura 4.3 – Curva de dispersão perfil normalmente dispersivo (v,λ)

A execução computacional do programa concebido para a aplicação do método dos estratos finos revelou-se, porém, bastante mais lenta do que a execução do programa anteriormente concebido, dado que, dependendo da frequência máxima considerada (ver equação (4.7)), a dimensão da matriz de rigidez dinâmica global do sistema é, normalmente, elevada e o tempo necessário para o cálculo dos seus valores e vectores próprios também.

Finamente, constata-se que as curvas de dispersão aqui calculadas por aplicação do método dos estratos finos são bastante idênticas às correspondentes curvas apresentadas em 3.4.1, o mesmo se passando para os modos de propagação à frente apresentados.

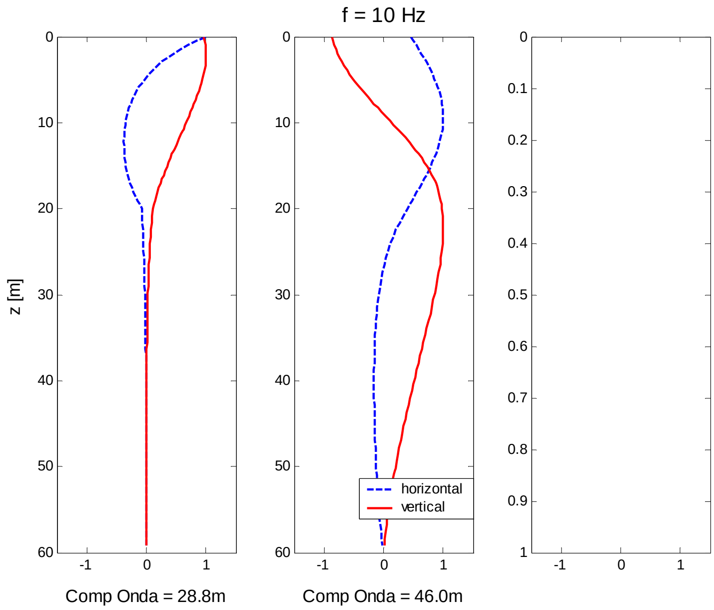


Figura 4.4 – Modos de propagação de deslocamentos – perfil normalmente dispersivo – f = 10Hz

Por comparação dos comprimentos de onda associados a cada modo de propagação calculados por um e outro método verifica-se, também quantitativamente, que as soluções da equação de dispersão são aproximadamente iguais.

Apesar da linearização do campo de deslocamentos subjacente à aplicação do método dos estratos finos, a forma dos modos de propagação é praticamente coincidente com a forma dos modos calculados através do método de Haskell-Thomson, definidos a partir das equações transcendentais definidas em 3.2.

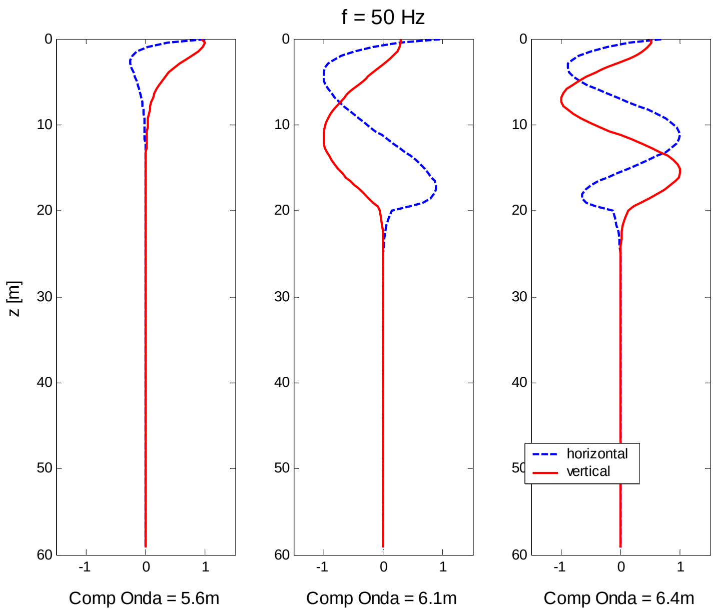


Figura 4.5 – Modos de propagação de deslocamentos – perfil normalmente dispersivo – f = 50Hz

4.4.2 Perfil inversamente dispersivo – tipo 1

Segue-se agora a apresentação e análise das curvas de dispersão e modos de propagação determinados para o perfil inversamente dispersivo, descrito e estudado em 3.4.2 através do método de Haskell-Thomson, correspondente à existência de dois estratos com rigidez decrescente em profundidade, assentes sobre um semi-espaço elástico.

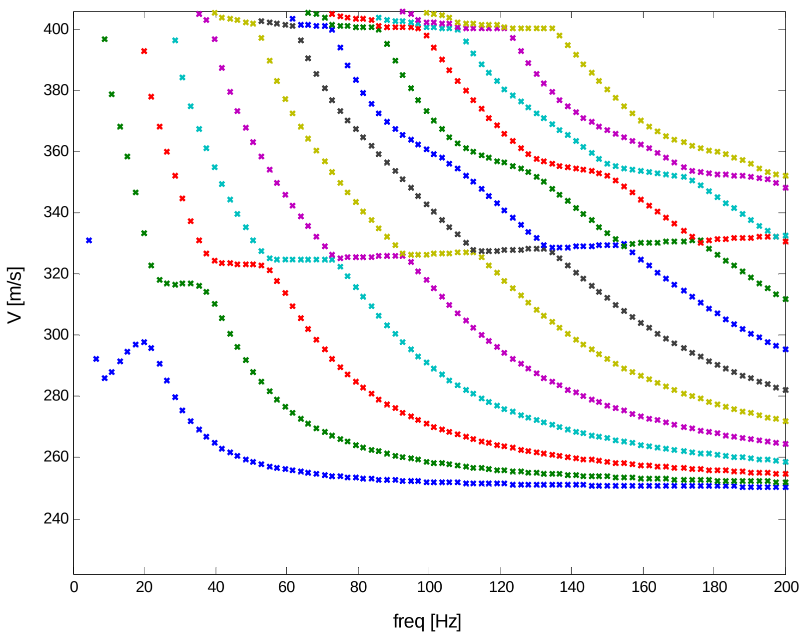


Figura 4.6 – Curva de dispersão perfil inversamente dispersivo – tipo 1 – (f,v)

Novamente, constata-se que a aplicação computacional baseada no método dos estratos finos permite uma melhor definição das curvas de dispersão calculadas, sem limitações numéricas no domínio das altas-frequências, como o anterior método.

No entanto, a principal diferença da curva de dispersão representada Figura 4.6 com a sua equivalente curva do método de Haskell-Thopmson representada na Figura 3.7 é a evidência da trajectória da curva de dispersão aparente ou efectiva, correspondente à linha aproximadamente horizontal com velocidades de fase exclusivamente relacionadas com as características elásticas do estrato superficial, conforme já mencionado em 3.4.2. Constata-se ainda que os primeiros modos de propagação, à medida que a frequência aumenta, tendem para formatos modais com velocidade de fase constante, independente da frequência.

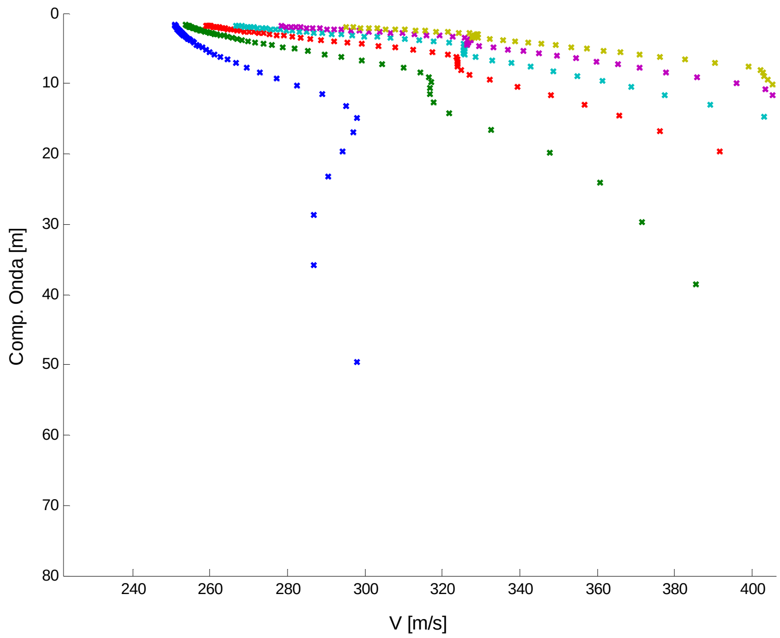


Figura 4.7 – Curva de dispersão perfil inversamente dispersivo – tipo 1 – (f,v)

Os três primeiros modos de propagação foram também calculados para as frequências de 10 e 50 Hz. Pode observar-se a quase coincidência de formas modais dos equivalentes modos determinados através de um e outro método.

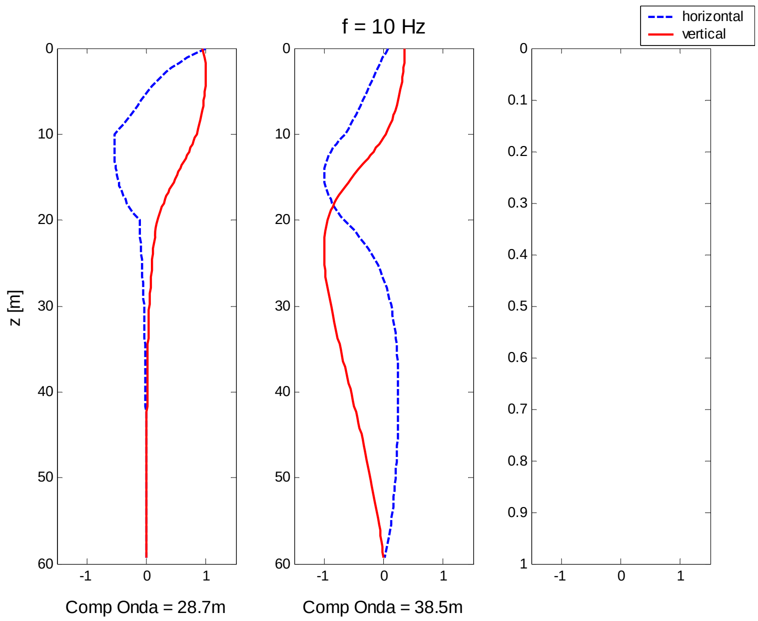


Figura 4.8 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo – tipo 1 – f = 10Hz

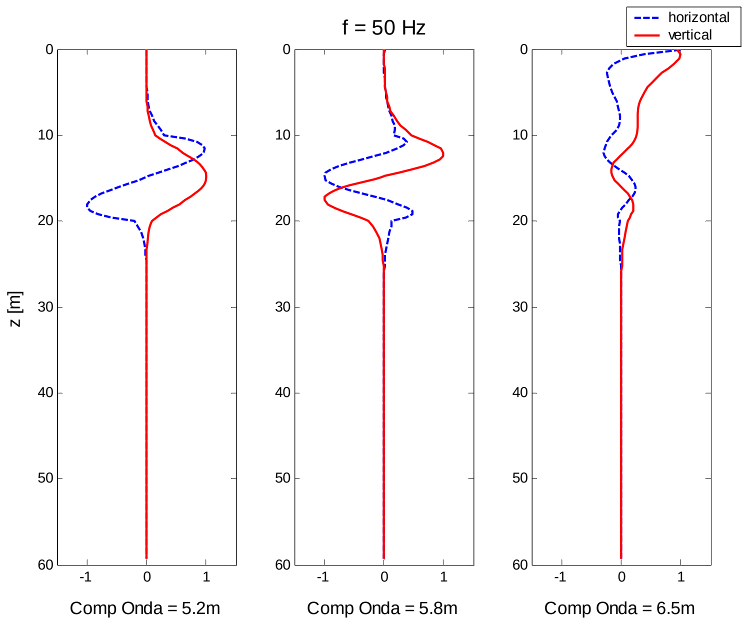


Figura 4.9 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo – tipo 1 – f = 50Hz

Adicionalmente, representam-se de seguida três outros modos de propagação calculados para frequências de 100Hz e 145Hz. Em ambos o modo de propagação representado no gráfico central é o modo situado sobre a curva de dispersão aparente atrás mencionada e os modos nas figuras laterais correspondem aos seus modos adjacentes (ver Figura 4.6).

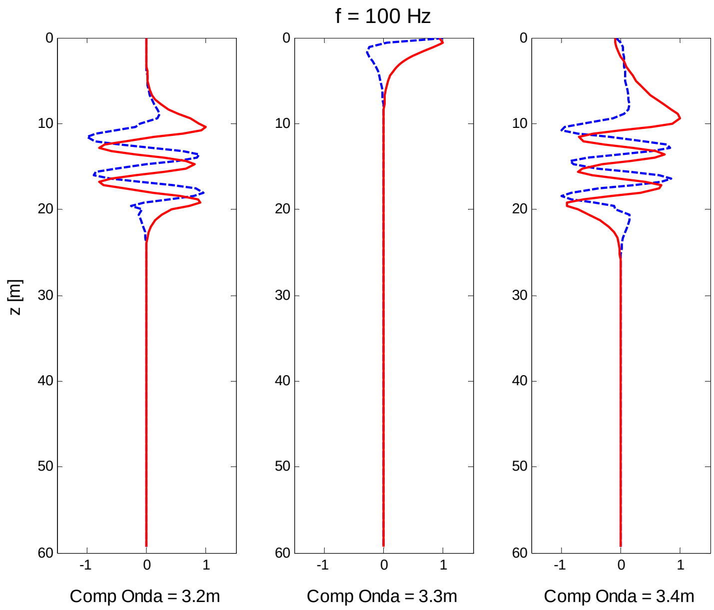


Figura 4.10 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo – tipo 1 – f = 100Hz

Verifica-se que o modo de propagação situado sobre a curva teórica de dispersão aparente tem uma forma semelhante ao modo de propagação típico de meios homogéneos, com amplitudes máximas à superfície e decaimento rápido em profundidade. Evidencia-se de novo que, à superfície do meio afectado pela propagação, a velocidade de fase da curva de dispersão aparente é próxima da do modo central representado.

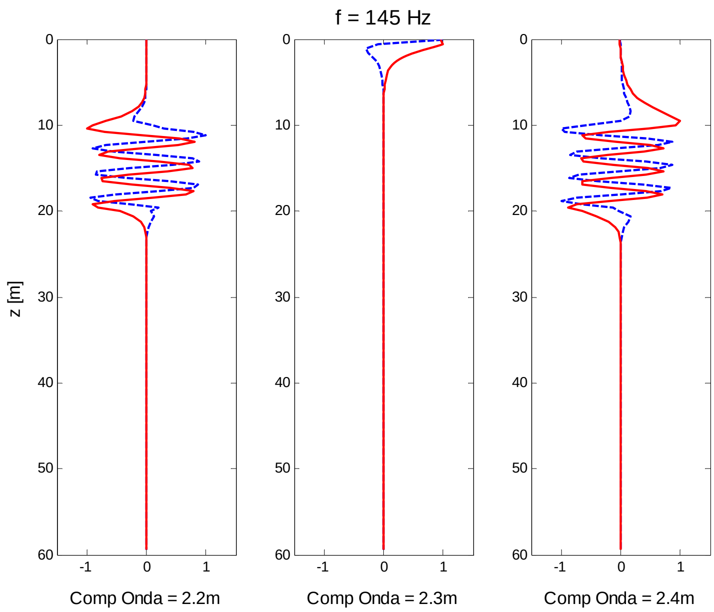


Figura 4.11 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo – tipo 1 – f = 145Hz

4.4.3 Perfil inversamente dispersivo – tipo 2

Por último apresentam-se os resultados determinados para o perfil inversamente dispersivo descrito em 3.4.3, a simular uma sequência de estratos mole-rijo-mole sobre um semi-espaço infinito.

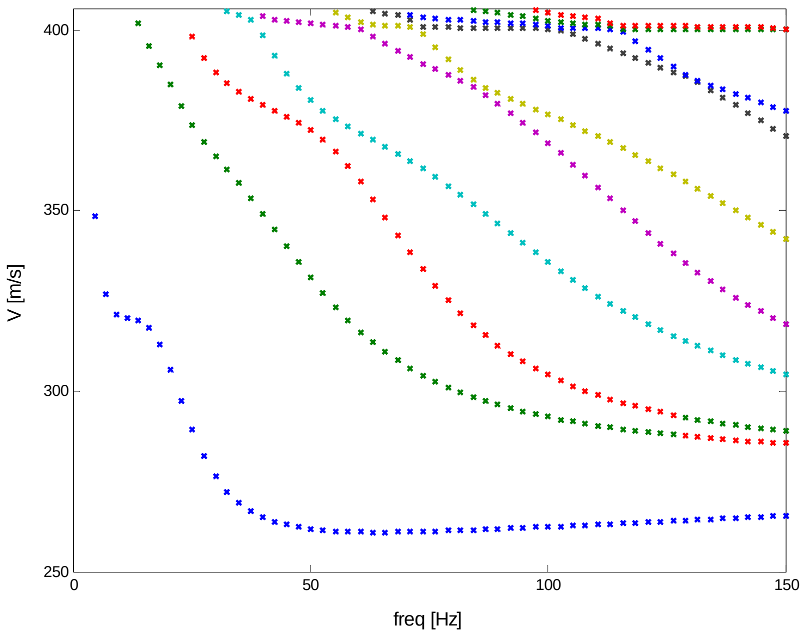


Figura 4.12 – Curva de dispersão perfil inversamente dispersivo – tipo 2 – (f,v)

Uma vez mais se constata a coerência dos resultados obtidos a partir de um e outro método, não apenas por comparação de formas e amplitudes relativas mas também por comparação numérica entre os números de onda determinados para cada modo representado.

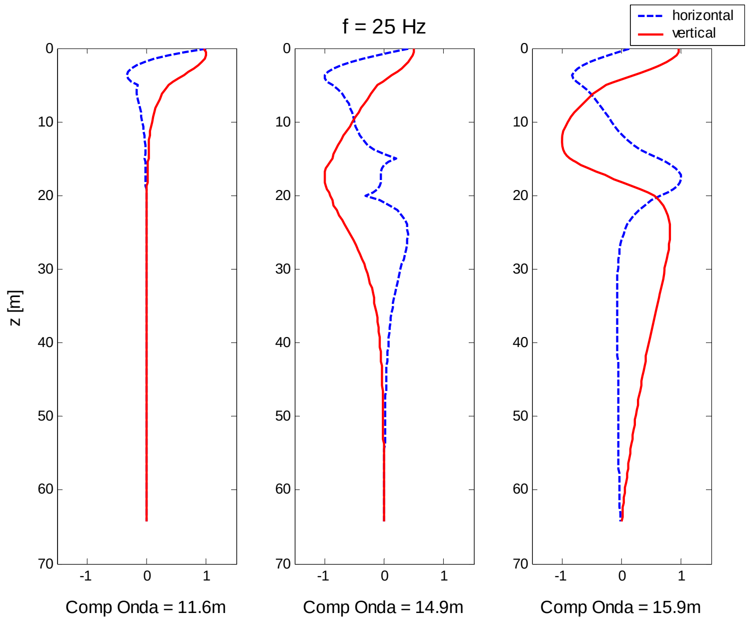


Figura 4.13 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo – tipo 2 – f = 25Hz

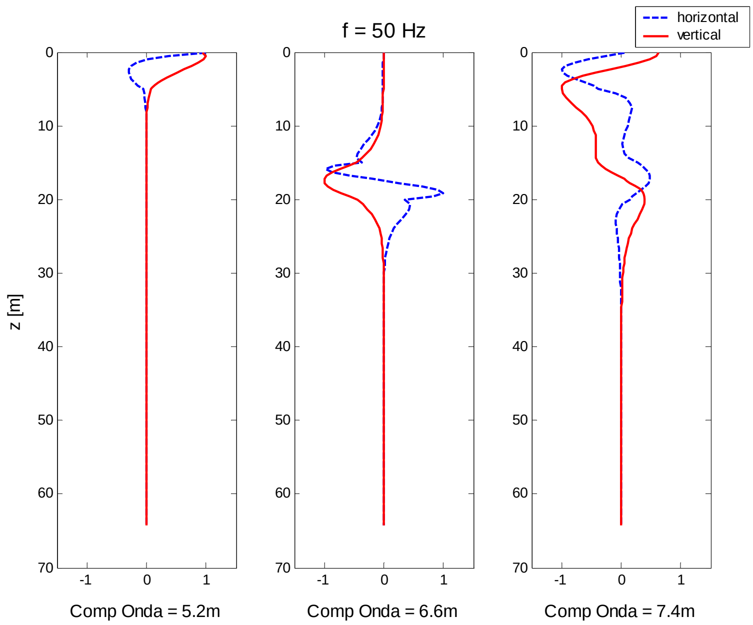


Figura 4.14 – Modos de propagação – perfil inversamente dispersivo – tipo 2 – f = 50Hz

5 Modelação da excitação dinâmica superficial do subsolo

5.1 Introdução

No presente capítulo calculam-se as curvas aparentes de dispersão, definição dada em 2.3.2.3, para os três perfis geotécnicos analisados anteriormente. A partir destes resultados, interessará relacioná-los com os resultados expectáveis de ensaios de excitação superficial dinâmica e definir recomendações presumíveis para a optimização da configuração geométrica desses ensaios.

5.2 Velocidade aparente de fase em meio elástico

Nos capítulos anteriores constatou-se que na propagação de ondas de superfície de Rayleigh poderão estar presentes diversos modos de propagação com diferentes velocidades de fase v_j. Se existir uma fonte harmónica de energia com uma dada frequência ω, o campo de ondas superficiais total resultará da contribuição ponderada de cada modo de propagação resultante do problema de valores e vectores próprios atrás enunciado. A velocidade de fase deste campo de ondas de frequência constante, dita velocidade aparente ou efectiva de fase, $\hat{V}(x_1, x_3, \omega)$, será principalmente determinada pela velocidade de fase dos modos de propagação dominantes.
Definindo uma expressão analítica para o campo de movimentos total, idêntica a (2.50), a velocidade de fase aparente poderá ser calculada por aplicação da expressão (2.52).
[Aki e Richards, 1980] demonstraram que o campo de ondas de Rayleigh, gerado por uma fonte harmónica de energia actuando perpendicularmente à superfície do semi-espaço isotrópico, elástico e heterogéneo por camadas, a propagar-se com uma frente de

onda cilíndrica, pode ser aproximado pela seguinte sobreposição de $M(\omega)$ modos de propagação de Rayleigh:

$$u_\beta\left(x_1, x_3, \omega\right) = \sum_{j=1}^{M}\left[A_\beta\left(x_1, x_3, \omega\right)\right]_j \cdot e^{i\left(\omega t - k_j x_1 + \varphi_\beta\right)} \tag{5.1}$$

Nesta expressão o índice β designa a direcção do movimento, 1 ou 3, $k_j(\omega)$ o número de onda do modo j, $\left[A_\beta\left(x_1, x_3, \omega\right)\right]_j$ a amplitudes do movimento de Rayleigh associadas à direcção β e ao modo j e φ_β um ângulo de fase definido por:

$$\begin{cases} \varphi_\beta = -\dfrac{\pi}{4}, \text{ se } \beta = 1 \\ \varphi_\beta = \dfrac{\pi}{4}, \text{ se } \beta = 3 \end{cases} \tag{5.2}$$

A expressão (5.1) encontra-se expressa em coordenadas cilíndricas, vulgarmente identificadas pelo terno $\left(r, \theta, z\right)$, de acordo com a seguinte figura:

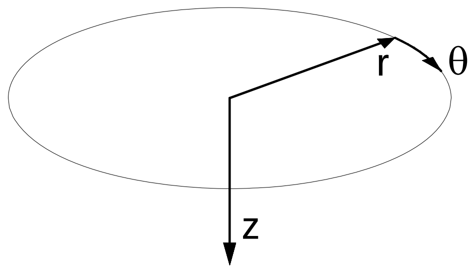


Figura 5.1 – Referencial cilíndrico

No presente texto adopta-se a equivalência $x_1 \equiv r$ e $x_3 \equiv z$. Constata-se em (5.1) que a expressão do movimento $u_\beta\left(x_1, x_3, \omega\right)$ é independente de θ.

As amplitudes do movimento de Rayleigh associadas a cada modo de propagação para uma excitação vertical harmónica definida por $F_3 \cdot e^{i\omega t}$, localizada em $x_1 = 0$ e $x_3 = z_0$ (z_0 representa aqui um valor numérico arbitrário não negativo), são definidas pelas seguintes expressões [Aki e Richards, 1980]:

$$\left[A_\beta\left(x_1, x_3, \omega\right)\right]_j = \begin{bmatrix} A_1\left(x_1, x_3, \omega\right) \\ A_3\left(x_1, x_3, \omega\right) \end{bmatrix}_j = F_3 \cdot \frac{r_2\left(z_0, k_j, \omega\right)}{4 v_j U_j I_j \sqrt{2\pi x_1 k_j}} \cdot \begin{bmatrix} r_1\left(x_3, k_j, \omega\right) \\ r_2\left(x_3, k_j, \omega\right) \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

onde $r_1\left(x_3,k_j,\omega\right)$ e $r_2\left(x_3,k_j,\omega\right)$ são as coordenadas dos vectores próprios (*c.f.* equação (2.43)), v_j e U_j as velocidades de fase e de grupo relativas ao modo j e I_j o primeiro integral de energia de Rayleigh definido por [Aki e Richards, 1980]:

$$I_j\left(x_3,k_j,\omega\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\rho(x_3)\left[r_1^2\left(x_3,k_j,\omega\right)+r_2^2\left(x_3,k_j,\omega\right)\right]dx_3 \tag{5.4}$$

A expressão analítica do movimento das partículas pode ser determinada considerando exclusivamente a parte real ou imaginária da equação (5.1) [Azevedo, 1996]. Escolhendo a última obtém-se [Lai, 1998]:

$$\operatorname{Im}\left(u_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right)=\sum_{j=1}^{M}\left\{\left[C_\beta\right]_j\cdot\sin\left(\omega t\right)-\left[D_\beta\right]_j\cdot\cos\left(\omega t\right)\right\} \tag{5.5}$$

onde $\left[C_\beta\right]_j=\left[A_\beta\right]_j\cdot\cos\left(k_jx_1-\varphi_\beta\right)$ e $\left[D_\beta\right]_j=\left[A_\beta\right]_j\cdot\sin\left(k_jx_1-\varphi_\beta\right)$.

Unificando as duas funções trigonométricas $\sin\left(\omega t\right)$ e $\cos\left(\omega t\right)$ numa única função seno por recurso à expressão da soma do seno de dois ângulos, encontra-se a expressão pretendida para o movimento das partículas resultante da passagem de um campo de ondas de superfície de Rayleigh provocado pela introdução de energia pontual harmónica:

$$\operatorname{Im}\left(u_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right)=U_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\cdot\sin\left(\omega t-\psi_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right) \tag{5.6}$$

com:

$$U_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left[A_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right]_i\cdot\left[A_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right]_j\cdot\cos\left(x_1\left(k_i-k_j\right)\right)} \tag{5.7}$$

e

$$\psi_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)=\tan^{-1}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{M}\left[A_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right]_i\cdot\sin\left(k_ix_1-\varphi_\beta\right)}{\sum_{j=1}^{M}\left[A_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right]_j\cdot\cos\left(k_jx_1-\varphi_\beta\right)}\right\} \tag{5.8}$$

Finalmente, a expressão da velocidade aparente de fase determina-se substituindo em (2.52) a função $\left[\psi_\beta\right]_{,x_1}$, calculada a partir de (5.8). Após alguns cálculos intermédios chega-se a [Lai, 1998]:

$$\hat{V}_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)=\frac{2\omega\cdot\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{M}\left[A_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right]_i\left[A_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right]_j\cdot\cos\left(x_1\left(k_i-k_j\right)\right)}{\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{M}\left[A_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right]_i\left[A_\beta\left(x_1,x_3,\omega\right)\right]_j\left(k_i+k_j\right)\cdot\cos\left(x_1\left(k_i-k_j\right)\right)} \tag{5.9}$$

A expressão anterior demonstra, como já foi afirmado em 2.3.2.3, que a velocidade de fase aparente é uma quantidade local, pois depende da posição onde é avaliada, e que possui uma natureza vectorial dado que, localmente, a velocidade de fase aparente associada ao movimento vertical das partículas pode ser diferente da velocidade de fase aparente associada ao movimento horizontal das partículas. Ainda, verifica-se que o problema de propagação forçada imposta por uma aplicação harmónica pontual de energia, traduzido aqui pelo cálculo da velocidade de fase aparente, fica totalmente determinado pelas soluções, valores e vectores próprios $\left(k_j(\omega), r_1\left(x_3,k_j,\omega\right), r_2\left(x_3,k_j,\omega\right)\right)$, do problema homogéneo, focado nos anteriores capítulos.

As velocidades de fase aparentes calculadas a uma profundidade constante z, $\hat{V}_\beta\left(x_1,z,\omega\right)$, formam uma superfície de dispersão aparente como se ilustra na figura seguinte.

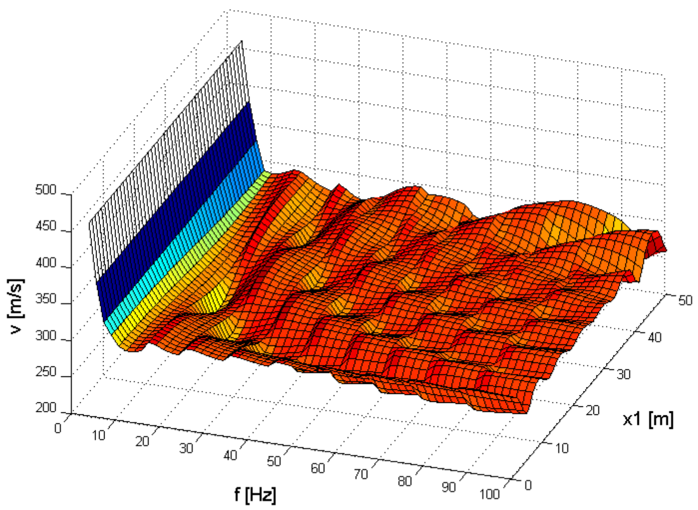


Figura 5.2 – Superfície de dispersão aparente

As expressões atrás apresentadas para o campo de movimentos associado à propagação originada por uma fonte pontual harmónica de energia não contemplam a formação e existência de ondas volúmicas tipo S e P. Este tipo de ondas, que avançam ao longo do semi-espaço através de uma frente de onda esférica e não cilíndrica como as ondas de superfície, têm, conforme já referido em 2.3.1, uma dissipação geométrica naturalmente superior às ondas de superfície e por isso a sua importância relativa decresce exponencialmente com a distância à origem do campo de movimentos. A participação deste tipo de ondas no campo de movimentos total será assim significativa somente numa zona próxima do ponto de aplicação da energia. Segundo Tokimatsu (1995) e outros autores esta influência relevante das ondas volúmicas no campo de movimentos total limita-se a distâncias à origem até $\lambda/2$ (onde λ representa o comprimento de onda das ondas de Rayleigh) no caso de perfis normalmente dispersivos. No caso de perfis inversamente dispersivos, onde a rigidez varia irregularmente com a profundidade, pode chegar a 2λ.

Relativamente ao tipo de ondas de superfície modeladas em (5.1), também não se contempla a propagação de onda Love, limitando-se a análise à propagação de ondas de Rayleigh, por serem estas, dentro das ondas de superfície, as principais responsáveis pelos movimentos verticais medidos correntemente nos ensaios sísmicos de superfície.

Dada a heterogeneidade geométrica exclusivamente vertical do semi-espaço, a isotropia do material e atendendo ao facto de se pretenderem determinar curvas de dispersão aparentes à superfície do semi-espaço afectado, por serem aquelas estimadas num ensaio sísmico de superfície, a dimensão geométrica dos problemas seguidamente formulados é unitária.

5.2.1 Programa *rig_efect*. Resultados

A formulação teórica atrás apresentada foi efectivada num programa desenvolvido em MATLAB designado *rig_efect*. Os dados de entrada do programa são as características geométricas e materiais do semi-espaço, organizados como descrito em 3.3, a frequência máxima a considerar nos cálculos, o número de pontos de discretização em frequência e as coordenadas x_1 para cálculo de $\hat{V}_\beta(x_1, 0, \omega)$.

O primeiro bloco resolutivo do programa efectua o cálculo dos valores e vectores próprios $\left(k_j(\omega), r_1(x_3, k_j, \omega), r_2(x_3, k_j, \omega)\right)$ utilizando o método dos estratos finos descrito no capítulo 4. Deste conjunto de soluções são eliminadas aquelas, por definição, não correspondentes à propagação de ondas de superfície, ou seja, aquelas com $v_j > v_{máx}$, sendo $v_{máx}$ a maior velocidade de propagação de ondas S presente nos estratos do semi-espaço. A velocidade de fase horizontal v_j é calculada por aplicação directa da expressão (2.22). A velocidade de grupo U_j, definida em (2.53), é determinada por derivação numérica das séries $\left(\omega, k_j\right)$ calculadas anteriormente utilizando-se para o efeito a ferramenta específica do MATLAB *gradient*. O primeiro integral de energia de Rayleigh I_j, definido em (5.4), é determinado por integração numérica das funções r_1 e r_2, utilizando-se, por sua vez, a ferramenta *trapz* que realiza o cálculo integral numérico através do método dos trapézios.

Finalmente, para cada distância à origem definida pelo utilizador, determinam-se as velocidades de fase aparentes associadas a cada frequência ω, por aplicação da expressão (5.9), através de uma sequência de ciclos *for* encaixados e desenham-se as correspondentes curvas de dispersão efectivas.

5.2.1.1 Perfil Normalmente Dispersivo

De seguida apresentam-se os resultados obtidos por aplicação do programa *rig_efect* atrás descrito considerando o perfil normalmente dispersivo descrito em 3.4.1. Conforme referido, os resultados são curvas de dispersão efectivas calculadas para diferentes distâncias à origem do movimento, designadas com a letra D.

As curvas de dispersão efectivas serão representadas por meio de séries de círculos, sendo a série vermelha associada à componente vertical do movimento e a série azul associada à componente horizontal do movimento.

Justapostas a estas, representam-se igualmente as curvas de dispersão modais resultantes da resolução do problema homogéneo, por meio de séries de pontos desenhados com cruzes, para assim possibilitar a identificação dos modos de propagação dominantes à superfície do semi-espaço, associados às frequências consideradas na análise.

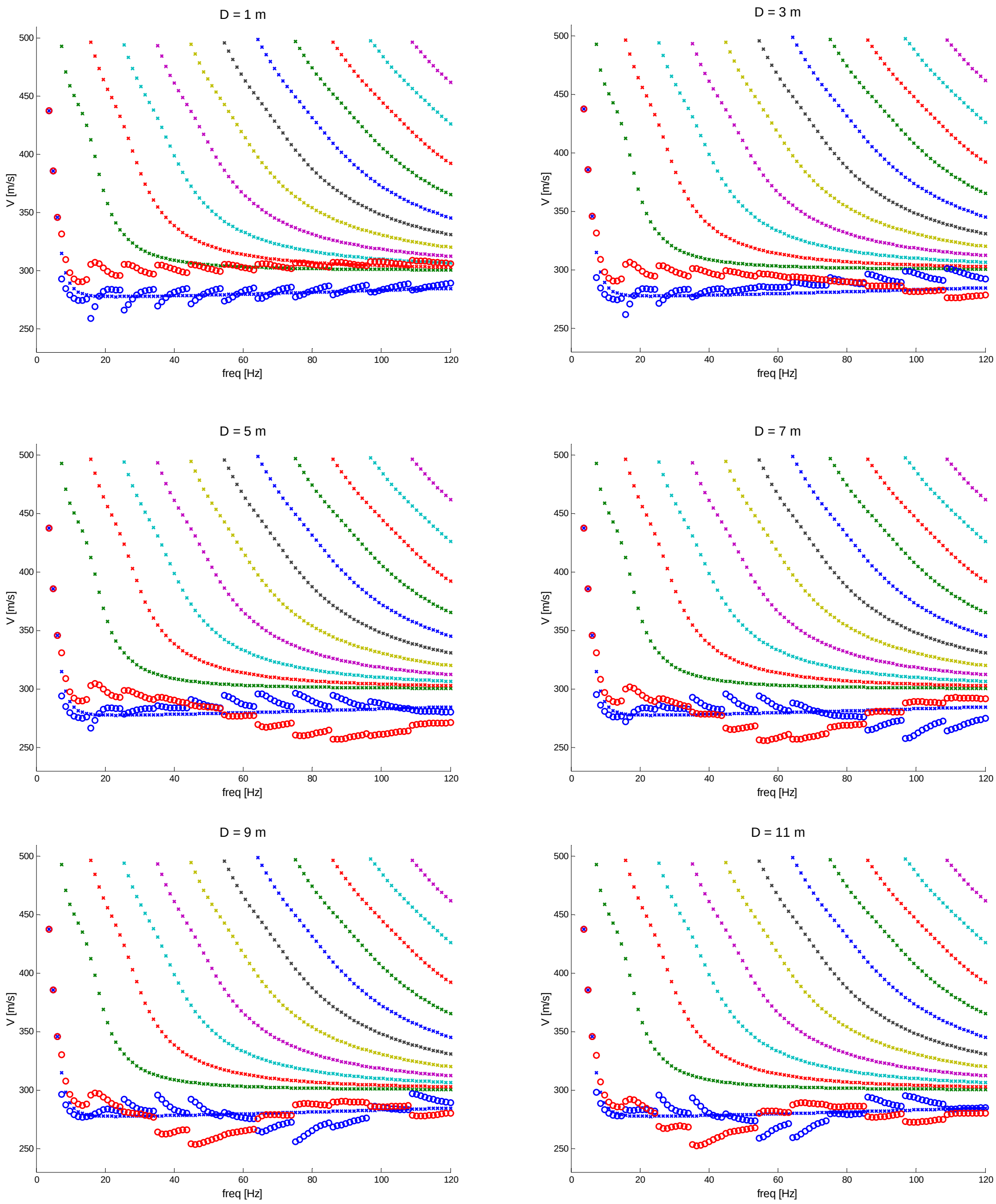


Figura 5.3 – Curvas de dispersão aparentes para perfil normalmente dispersivo às distâncias 1, 3, 5, 7, 9 e 11m da origem

Nas curvas de dispersão acima representadas verifica-se, como esperado, que o modo dominante no fenómeno de propagação de ondas de Rayleigh em perfis normalmente dispersivos é o primeiro modo de propagação, ou, identicamente, aquele com velocidade de fase mais baixa. No entanto, constata-se que a velocidade de fase aparente depende significativamente da distância à origem considerada e que as duas componentes da velocidade podem, localmente, diferir consideravelmente uma da outra, apesar da isotropia assumida para o meio de propagação.

Estes efeitos devem-se à contribuição de modos mais elevados, em particular quando a estes modos estão associadas velocidades de fase muito superiores à velocidade de fase do primeiro modo de propagação. Estes modos de propagação, representados na Figura 3.5, por exemplo, dominantes em zonas mais profundas onde a contribuição do primeiro modo de propagação pode ser quase nula, afectam a velocidade de fase aparente do movimento à superfície do semi-espaço, alterando as velocidades de fase aparentes associadas aos movimentos vertical e horizontal das partículas dependendo da distância à origem. A seguinte figura ilustra esta ideia e representa a variação da velocidade de fase aparente com a distância à origem para uma frequência fixa de 50Hz:

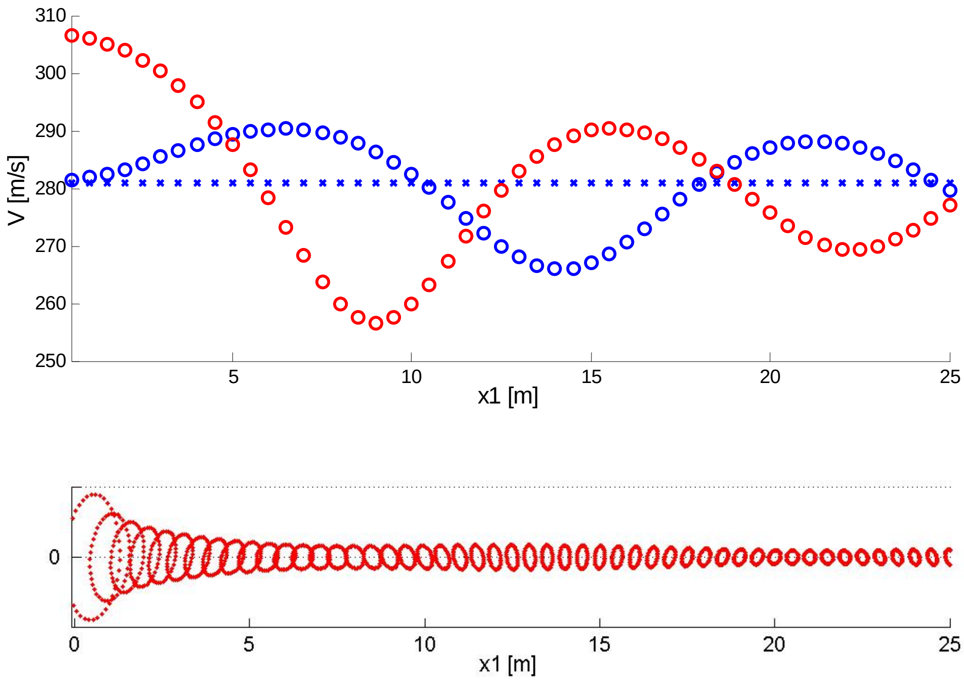


Figura 5.4 – Variação da velocidade de fase aparente com a distância à origem e trajectória das partículas à superfície do semi-espaço

Nesta figura é representado o efeito que a variação das duas componentes da velocidade de fase aparente exerce no movimento das partículas à superfície do semi-espaço: os eixos principais da elipse que circunscreve o movimento associado a uma dada partícula deixam de ser paralelos às duas direcções principais x_1 e x_3, variando a sua direcção com a distância à origem.

Na Figura 5.4 verifica-se que, apesar da velocidade de fase aparente não ser constante com a distância à origem, esta variação processa-se regularmente em torno da velocidade de fase associada ao primeiro modo de propagação (série representada com cruzes em vez de círculos), sugerindo que a velocidade média calculada ao longo de uma distância suficientemente grande coincida com a velocidade de fase do primeiro modo de propagação. Esta conjectura será retomada mais adiante (*c.f.* 5.2.2).

5.2.1.2 Perfil Inversamente Dispersivo – tipo 1

Apresentam-se seguidamente as curvas de dispersão aparentes calculadas para o perfil inversamente dispersivo – tipo 1 descrito em 3.4.2:

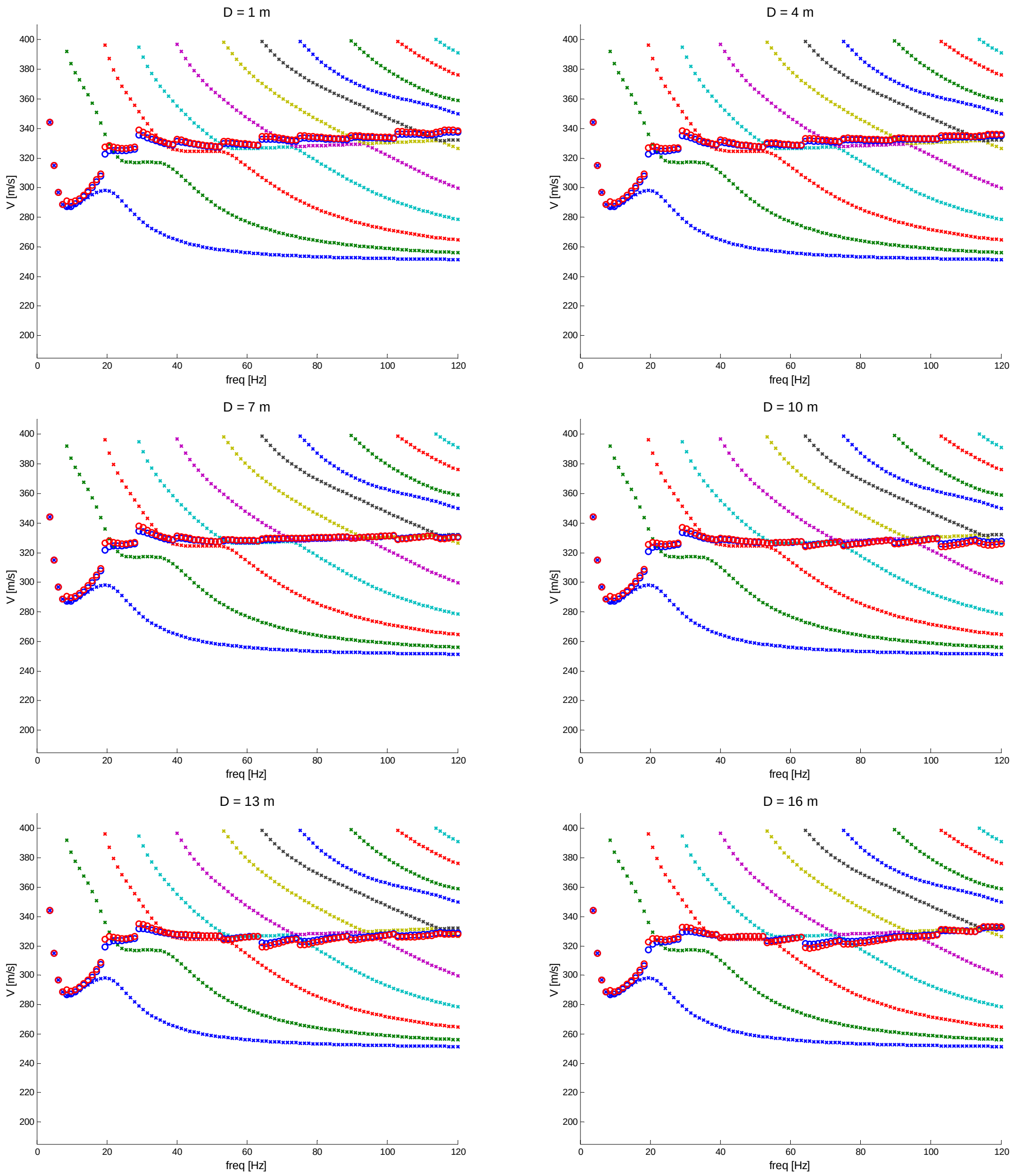


Figura 5.5 – Curvas de dispersão aparentes para perfil inversamente dispersivo – tipo 1 às distâncias 1, 4, 7, 10, 13 e 16m da origem

As curvas de dispersão aparentes determinadas para este perfil geotécnico têm o formato esperado e já comentado anteriormente, nomeadamente, apresentando para frequências crescentes valores de velocidades de propagação aproximadamente constantes e quase exclusivamente relacionadas com a velocidade de propagação de ondas S do estrato superficial. Verifica-se também que, comparativamente com o caso analisado anteriormente, as curvas de dispersão aparente variam pouco com a posição de cálculo, sendo praticamente indistinguíveis as curvas referentes às duas direcções ortogonais.

Este resultado explica-se por observação da Figura 4.10 e da Figura 4.11, onde é visível a forma dos modos que rodeiam o modo sobre o qual se situa a curva de dispersão aparente. Estes, correspondem a modos com amplitudes de movimento praticamente limitadas ao estrato intermédio de características de rigidez mais baixa, sem qualquer, ou com apenas limitada, influência à superfície. Desta forma, a velocidade de fase aparente à superfície é determinada, quase exclusivamente, pela velocidade de propagação de um único modo com direcção de propagação exclusivamente horizontal, justificando-se assim as constatações atrás formuladas.

5.2.1.3 Perfil Inversamente Dispersivo – tipo 2

Finalmente, a aplicação do programa *rig_efect* na análise do terceiro perfil geotécnico abordado forneceu os seguintes resultados:

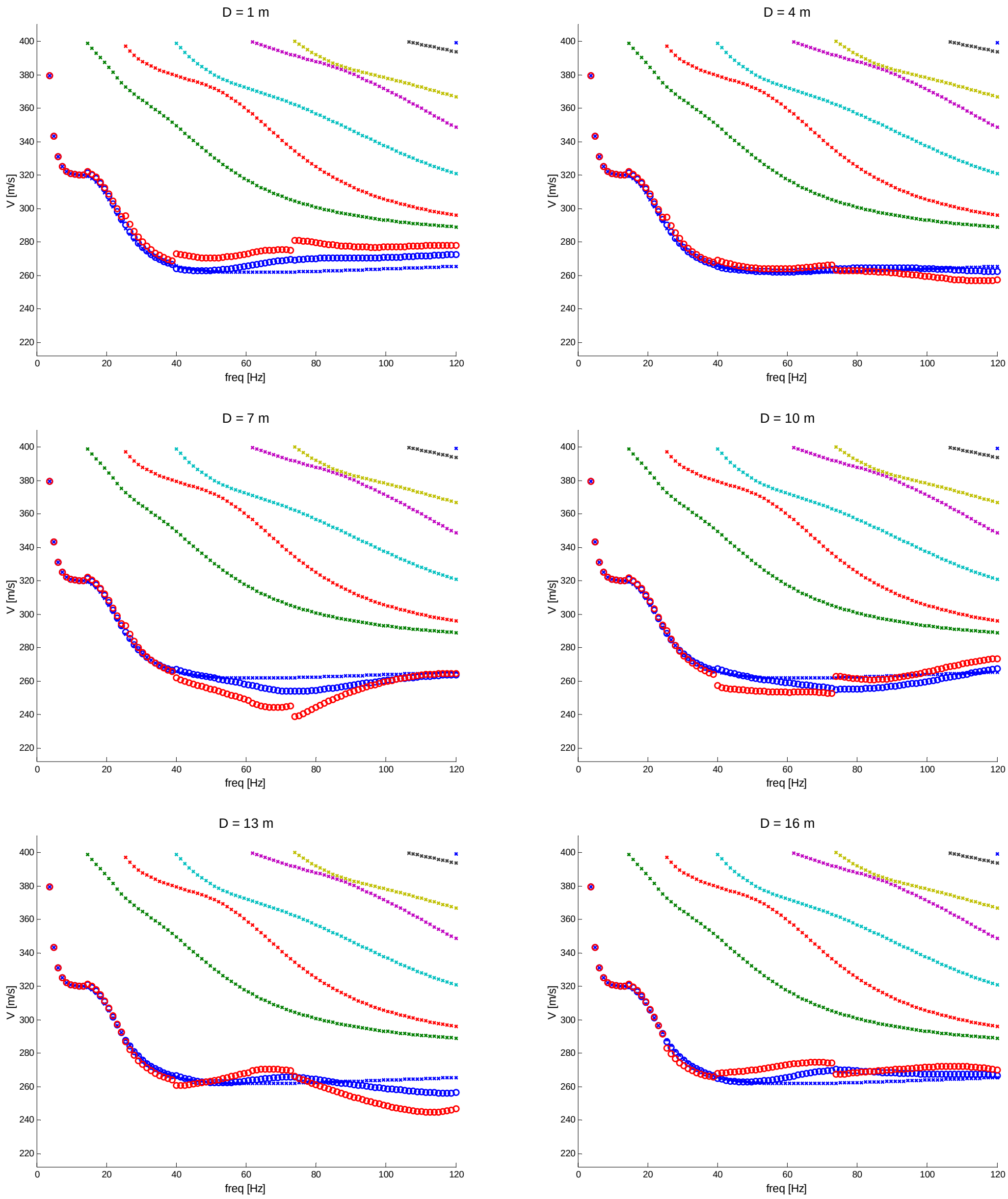


Figura 5.6 – Curvas de dispersão aparentes para perfil inversamente dispersivo – tipo 2 às distâncias 1, 4, 7, 10, 13 e 16m da origem

Verifica-se que para este perfil, caracterizado pela existência de um estrato rígido entre dois estratos moles, a curva de dispersão aparente é determinada quase exclusivamente pelo primeiro modo de propagação, verificando-se, no entanto, que para frequências superiores a 40Hz os modos de propagação mais elevados afectam a forma da curva de dispersão aparente de uma forma idêntica ao observado no perfil normalmente dispersivo. De facto, para comprimentos de onda menores, característicos de ondas com maiores frequências, a influência do estrato menos rígido situado a 15m de profundidade deixa de se fazer sentir no âmbito da propagação de ondas superficiais, passando a assemelhar-se este perfil a um perfil normalmente dispersivo com um estrato superficial menos rígido assente sobre um estrato mais rígido. Para comprovar este efeito representa-se seguidamente duas curvas de dispersão aparentes calculadas para uma versão simplificada do terceiro perfil geotécnico (c.f. 3.4.3). Neste, o estrato menos rígido situado a 15m de profundidade foi retirado, passando a tratar-se de um perfil normalmente dispersivo descrito por:

ρ [ton/m^3]	v_P [m/s]	v_S [m/s]	h_m [m]
1.8	500	280	5
1.9	720	400	∞

Tabela 5.1 – Características do perfil geotécnico adaptado do perfil inversamente dispersivo – tipo2

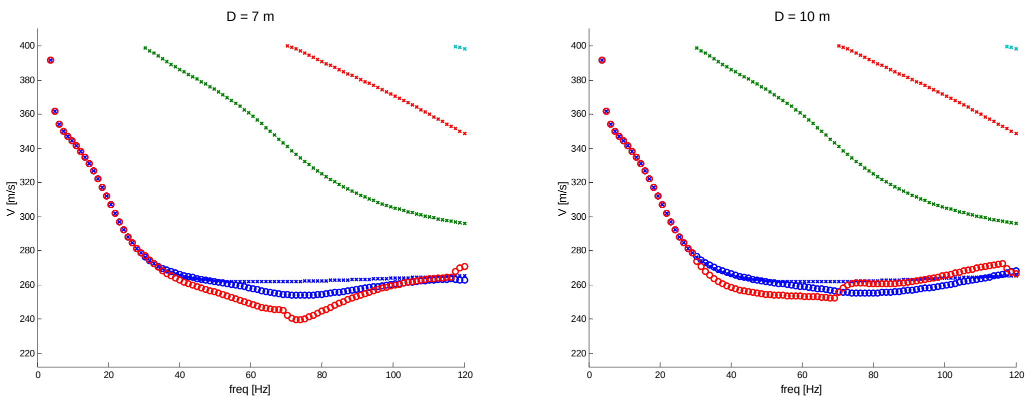


Figura 5.7 – Curvas de dispersão aparentes para perfil adaptado do perfil inversamente dispersivo – tipo 2 às distâncias 7 e 10m da origem

Na Figura 5.7 constata-se, como se pretendia, que para frequências superiores a 40Hz a forma da curva de dispersão aparente é aproximadamente igual às correspondentes curvas apresentadas na Figura 5.6. De notar que o numero de modos de propagação diminuiu e que os três modos agora representados permanecem quase invariáveis dos modos 1, 3 e 5 da Figura 5.6.

5.2.2 Programa rig_efect_med. Resultados

Verificou-se acima que, em particular para perfis normalmente dispersivos, a velocidade de fase aparente pode depender da distância à origem onde é calculada e as suas componentes horizontal e vertical diferirem uma da outra. Constatou-se que esses efeitos se devem, essencialmente, à influência dos modos mais elevados nas características da propagação, exercida de forma distinta consoante o local em questão.

Com o objectivo de dispor de uma ferramenta computacional que determine uma curva de dispersão aparente sem evidenciar esses efeitos locais e transitórios, criou-se uma nova ferramenta computacional, designada *rig_efect_med*.

Nesta ferramenta determinam-se as curvas de dispersão aparente numa série de diferentes locais definidos pelo utilizador, utilizando para o efeito o algoritmo *rig_efect* já descrito. Para cada frequência ω são assim calculados N valores de velocidade de fase aparente, representando N o número de locais distintos definidos pelo utilizador. Finalmente, o programa calcula a média aritmética desses conjuntos de resultados, frequência a frequência, e desenha a correspondente série obtida, denominada curva de dispersão aparente média.

O resultado é uma curva de dispersão aparente única para o perfil em análise e imune aos efeitos locais e transitórios introduzidos por modos mais elevados.

As seguintes três figuras representam as curvas de dispersão aparente médias determinadas para os três perfis geotécnicos já descritos. Indicam-se ainda, nas respectivas legendas, os espaçamentos entre pontos, Vx_1, e as distâncias máximas e mínimas à origem da série de pontos que conduziu à curva de dispersão aparente média exibida.

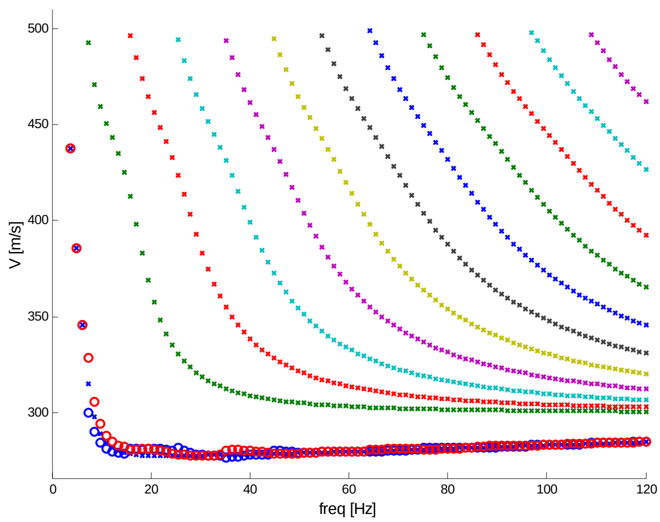


Figura 5.8 – Curva de dispersão aparente media para perfil normalmente dispersivo

$\left(x_1 = 1 \rightarrow 23\text{m},\ \Delta x_1 = 2\text{m}\right)$

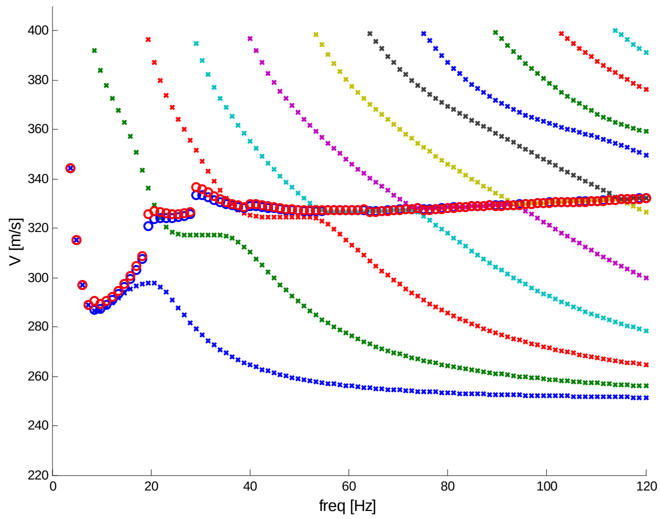


Figura 5.9 – Curva de dispersão aparente media para perfil inversamente dispersivo – tipo 1

$(x_1 = 1 \rightarrow 16\text{m},\ \Delta x_1 = 3\text{m})$

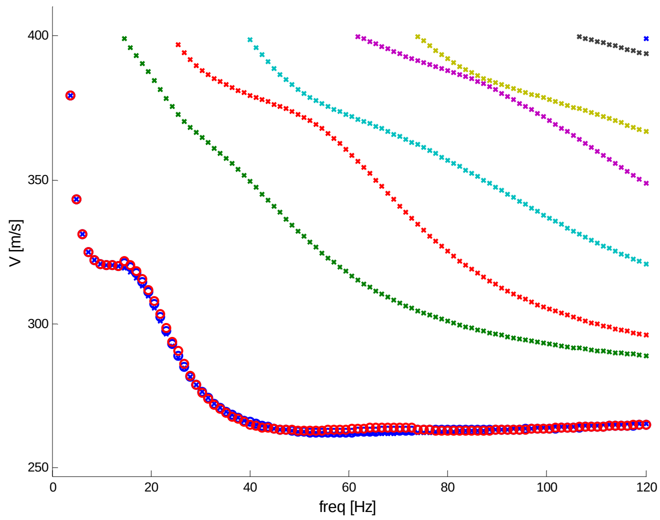


Figura 5.10 – Curva de dispersão aparente media para perfil inversamente dispersivo – tipo 2

$(x_1 = 1 \rightarrow 16\text{m},\ \Delta x_1 = 3\text{m})$

Esta ferramenta computacional de resolução directa do problema da propagação associado a um meio com características geométricas e físicas conhecidas poderá futuramente servir de base para a construção de uma ferramenta de resolução do problema inverso, correspondente à estimativa de parâmetros de um modelo teórico adoptado, conhecidos os resultados de um ensaio sísmico de superfície.

5.3 Simulação de um ensaio CSW

Um ensaio de caracterização geotécnica do subsolo com base na análise espectral do campo de movimentos induzido por uma excitação superficial dinâmica, englobando os ensaios SASW (do inglês *Spectral Analisys of Surface Waves*) e CSW (*Continuum Analisys of Surface Waves*), consiste, simplificadamente, em [Matthews *et al*. 1996]:

- Geração de um campo de movimentos suscitado por uma fonte de energia pontual à superfície com uma direcção essencialmente vertical, através de uma fonte impulsiva (martelo) ou de uma fonte contínua (vibrador com controlador de frequência);
- Medição do movimento à superfície (geralmente apenas da componente vertical) por meio de transdutores (geofones ou acelerómetros) colocados ao longo de uma linha que contém a posição da fonte de energia;
- Registo das séries que representam o campo de movimento vertical através de um sistema de conversão A/D;
- Análise espectral dos sinais registados para obtenção das curvas de dispersão experimentais que evidenciam a variação da velocidade das ondas de Rayleigh com o comprimento de onda;
- Determinação do perfil de velocidade de ondas de Rayleigh em profundidade por meio de um algoritmo de inversão a partir das curvas de dispersão experimentais calculadas;
- Passagem do perfil de velocidades de ondas de Rayleigh em profundidade para um perfil de rigidez de corte em profundidade por aplicação das equações de compatibilidade cinemática e das relações constitutivas.

A obtenção das curvas de dispersão experimentais a partir das séries registadas do movimento vertical à superfície é realizada através da referida análise espectral de sinais. Se, por hipótese, o campo de movimento for gerado através de uma fonte pontual de energia contínua com frequência constante, ω, aproximadamente harmónica, a análise espectral de um par de sinais registados a diferentes distâncias da origem, designadas r_1 e r_2, possibilita o cálculo da diferença de fase entre as duas séries e, a partir desta, da velocidade de fase entre esses dois pontos por aplicação da expressão:

$$v_R = \omega \frac{r_2 - r_1}{\Delta\phi} \tag{5.10}$$

onde $\Delta\phi$ designa a diferença de fase entre as duas séries harmónicas puras e v_R a velocidade de fase de Rayleigh associada à frequência ω.

A Figura 5.11 representa os principais passos de determinação de uma curva de dispersão experimental através de um ensaio de excitação superficial dinâmica utilizando uma fonte de energia contínua.

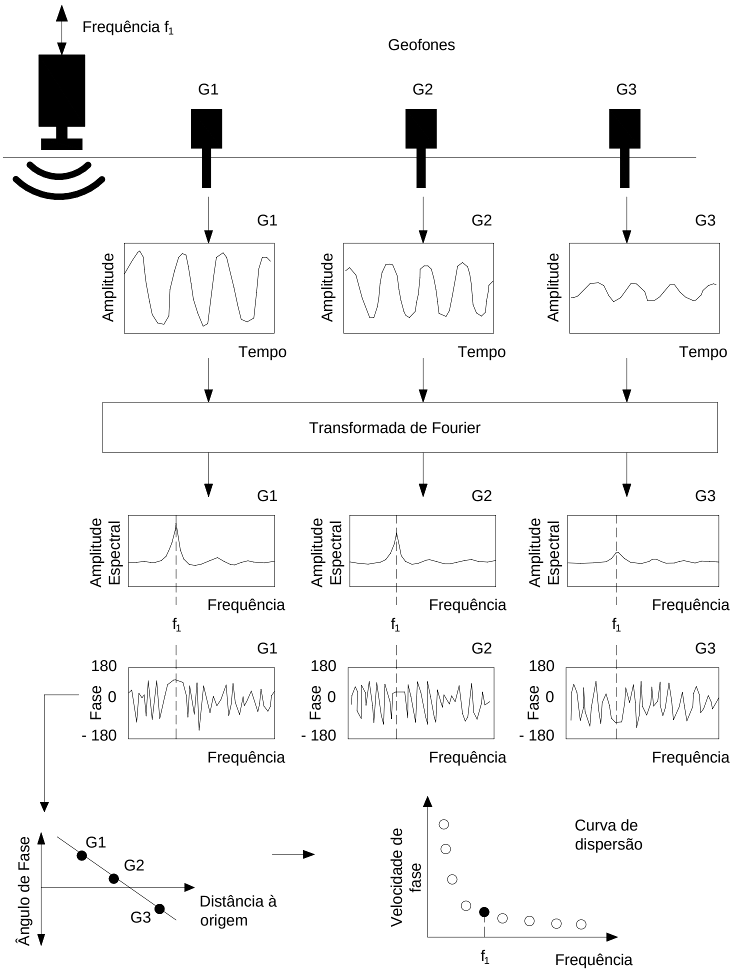


Figura 5.11 – Esquema de realização de um ensaio de excitação superficial dinâmica para determinação de uma curva de dispersão experimental utilizando uma fonte de energia continua. (Adaptado de [Matthews, 1996])

A simulação computacional de obtenção de uma curva de dispersão aparente experimental a partir de um ensaio de excitação superficial dinâmica pode assim ser efectuada calculando a diferença de fase $V\phi$ expressa em (5.10) através de:

$$\Delta\phi = \psi_\beta(r_2, 0, \omega) - \psi_\beta(r_1, 0, \omega) \tag{5.11}$$

onde as funções ψ_β representam as funções de fase definidas em (5.8).

5.3.1 Programa *rig_efect_sim*. Resultados.

O programa *rig_efect_sim* foi a ferramenta computacional criada para simulação dos cálculos espectrais realizados durante um ensaio CSW utilizando as expressões (5.10) e (5.11) atrás apresentadas. Os dados introduzidos pelo utilizador são, uma vez mais, as características geométricas e físicas do semi-espaço estratificado, a máxima frequência a considerar nos cálculos e um conjunto de distâncias à origem que representam os hipotéticos locais onde foram colocados os transdutores.

O programa calcula então os valores da função de fase $\psi(x_1, 0, \omega)$ para cada posição x_1 e para cada frequência ω, por aplicação da expressão (5.8), e determina a velocidade de fase associada a cada par de locais por aplicação da expressão (5.10) e (5.11). Dado que a função $\psi(x_1, 0, \omega)$ é uma função descontinua com saltos regulares espaçados de um comprimento de onda, é necessário um passo intermédio de transformação da função $\psi(x_1, 0, \omega)$ original numa nova função equivalente mas contínua em x_1, resultante da concatenação dos diversos troços inicialmente definidos entre $[-\pi \quad \pi]$. A Figura 5.12 mostra, como exemplo, a transformação enunciada.

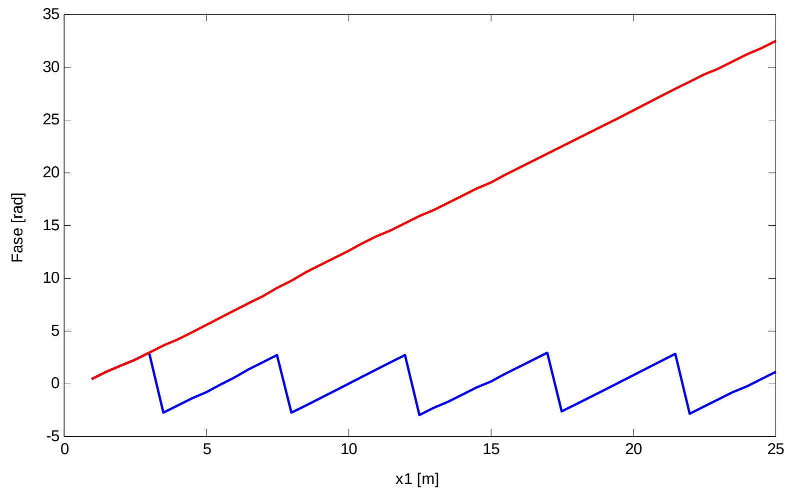


Figura 5.12 – Ilustração da transformação da função $\psi(x_1, 0, \omega)$ original (azul) numa função equivalente continua (vermelho)

Para que a transformação seja válida é necessário que a distância entre dois pontos sucessivos seja inferior a um comprimento de onda. Tal significa que a máxima resolução conseguida em termos de comprimento de onda é igual à mínima distância adoptada entre receptores.

Finalmente, dos vários valores de velocidade de fase obtidos de cada combinação possível de dois pontos, determina-se a média aritmética desses valores e representa-se a curva de dispersão resultante.

A Figura 5.13 ilustra este principio e identifica os possíveis pares combináveis para determinação da velocidade de fase aparente, agrupando-os por distâncias entre receptores. Esta formulação permite combinar todos os possíveis pares de pontos, inclusive os pontos mais distanciados entre si, optimizando a resolução da curva de dispersão final calculada.

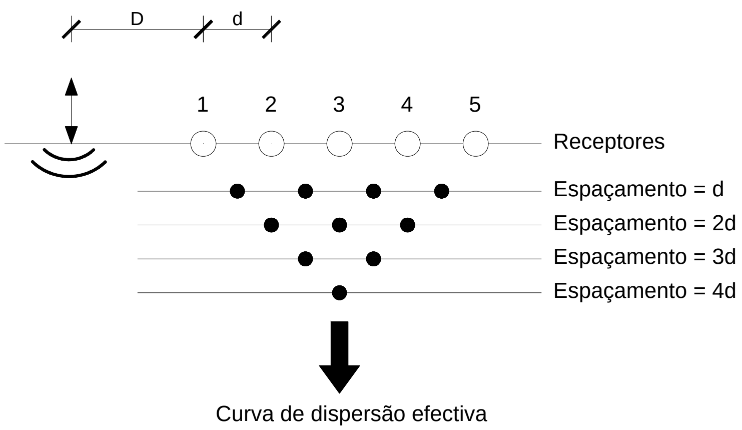


Figura 5.13 – Disposição de ensaio e possíveis combinações entre séries registadas

5.3.1.1 Perfil Normalmente Dispersivo

Seguem-se exemplos de aplicação da ferramenta *rig_efect_sim* considerando o perfil normalmente dispersivo descrito em 3.4.1.

A Figura 5.14 representa a curva de dispersão aparente calculada considerando apenas dois receptores colocados às distâncias 2.5m e 3.5m. Pretende-se assim simular a execução de um ensaio CSW utilizando apenas dois transdutores para medição do campo de movimentos superficial.

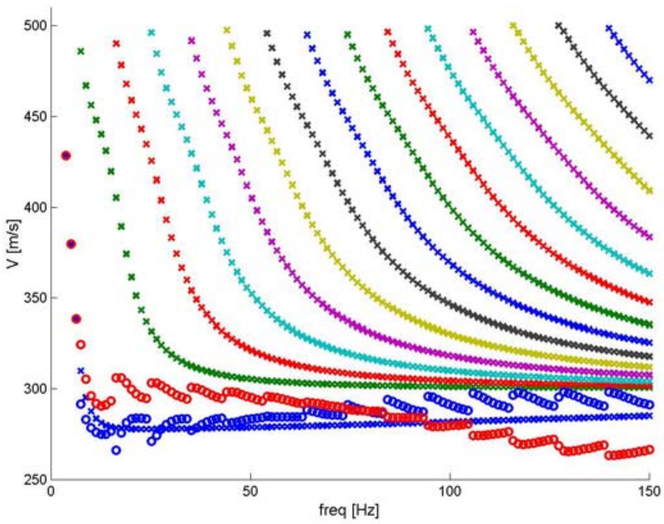


Figura 5.14 – Curva de dispersão simulada para perfil normalmente dispersivo com 2 transdutores. D=2.5m e d=1m

Verifica-se que as curvas de dispersão aparentes encontradas são muito idênticas às curvas de dispersão aparentes anteriormente determinadas para $x_1 = 3m$ (ponto intermédio entre os dois pontos agora considerados), e como tal as observações aí expressas igualmente válidas para o caso agora em estudo. A determinação de curvas de dispersão experimentais a partir de ensaios de excitação superficial dinâmica utilizando somente dois transdutores é significativamente sensível à presença de modos mais elevados que afectam a coerência e a unicidade, ainda que aproximada, da solução encontrada.

Estes efeitos atenuam-se através da utilização simultânea de diversos transdutores e da combinação das séries multi-canal, como indicado na Figura 5.13.

As seguintes figuras apresentam os resultados simulados da realização de um ensaio com 9 transdutores. Na Figura 5.15 (a) os transdutores foram espaçados 1m e na Figura 5.15 (b) 3m.

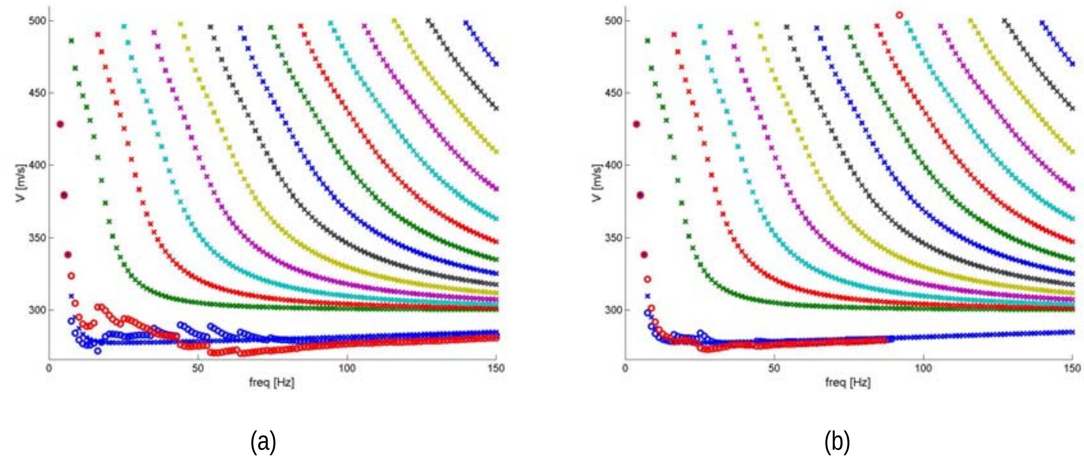


Figura 5.15 – Curva de dispersão simulada para perfil normalmente dispersivo com 9 transdutores. (a) - D=2m e d=1m; (b) - D=2m e d=3m

Na Figura 5.15 (a) a definição das curvas de dispersão aparentes melhora significativamente, em particular para altas frequências. Por um lado, a utilização de um espaçamento entre transdutores igual a 1m permite uma suficiente resolução em termos de comprimentos de onda (o menor comprimento de onda presente nos modos de propagação é de λ=1.87m para f=150Hz). Por outro lado, a utilização de uma configuração de ensaio limitada a um espaçamento máximo entre transdutores de 8m não permite a completa atenuação dos efeitos já referidos provocados por modos mais elevados, quando a esses modos estão associados altos comprimentos de onda. Nas curvas de dispersão aparentes apresentadas na Figura 5.15 (a) verifica-se a influência dos modos mais elevados até uma frequência de, aproximadamente, 85Hz. A distância entre pontos extremos da configuração de ensaio, X, que permite a atenuação completa deste efeito depende das características do semi-espaço e da(s) frequência(s) presente(s) no ensaio. A Figura 5.4 evidencia a característica harmónica da variação da velocidade de fase aparente com a distância à origem motivada pela influência de modos mais elevados. Para que a média das velocidades de fase aparentes calculadas numa série de pontos se aproxime da média da função $\hat{V}_{\beta}(x_1,0,\omega)$, é necessário que a distância X seja, no mínimo, igual a um comprimento de onda de $\hat{V}_{\beta}(x_1,0,\omega)$. Conforme já referido, em perfis normalmente dispersivos a contribuição do primeiro modo de propagação no campo de ondas total à superfície é dominante sobre os restantes modos existentes, de tal forma que os termos $A_i(x_1,0,\omega)A_j(x_1,0,\omega)$ na expressão (5.9) que define analiticamente a velocidade de fase aparente, com $\left(i \neq 1 \vee j \neq 1\right)$, têm uma pequena contribuição relativa no apuramento do seu valor final. Assim, eliminando estes termos da referida expressão obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\hat{V}_{\beta}\left(x_1,0,\omega\right);\ 2\omega \frac{A_{\beta;1}^2 + \sum_{i=2}^{M} 2A_{\beta;1}\cdot A_{\beta;i}\cdot\cos\left(x_1\left(k_1-k_i\right)\right)}{2k_1A_{\beta;1}^2 + \sum_{i=2}^{M} 2A_{\beta;1}\cdot A_{\beta;i}\left(k_1+k_i\right)\cdot\cos\left(x_1\left(k_1-k_i\right)\right)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \hat{V}_{\beta}\left(x_1,0,\omega\right);\ v_1\left(\omega\right)\frac{A_{\beta;1} + \sum_{i=2}^{M} 2A_{\beta;i}\cdot\cos\left(x_1\left(k_1-k_i\right)\right)}{A_{\beta;1} + \sum_{i=2}^{M} 2A_{\beta;i}\left(\frac{k_1+k_i}{2k_1}\right)\cdot\cos\left(x_1\left(k_1-k_i\right)\right)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \hat{V}_{\beta}\left(x_1,0,\omega\right);\ v_1\left(\omega\right)\cdot F\left(x_1,\omega\right)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

onde $v_1\left(\omega\right)$ designa a velocidade de fase do primeiro modo de propagação e $F\left(x_1,\omega\right)$ uma função que oscila em torno do valor médio unitário e que expressa a variação da velocidade de fase aparente com a distância à origem. Determinando, por fim, uma função $G\left(x_1,\omega\right)$ obtida através de $G\left(x_1,\omega\right)=F\left(x_1,\omega\right)-1$ por forma a ter média nula, expressa por

$$
G\left(x_1,\omega\right)=\frac{\sum_{i=2}^{M} 2A_{\beta;i}\cdot\frac{k_1-k_i}{2k_1}\cdot\cos\left(x_1\left(k_1-k_i\right)\right)}{A_{\beta;1} + \sum_{i=2}^{M} 2A_{\beta;i}\left(\frac{k_1+k_i}{2k_1}\right)\cdot\cos\left(x_1\left(k_1-k_i\right)\right)}
\tag{5.13}
$$

conclui-se que a variação da função $\hat{V}_{\beta}\left(x_1,0,\omega\right)$ com a distância à origem resulta, aproximadamente, de uma soma de M-1 funções harmónicas com diferentes comprimentos de onda e diferentes amplitudes. O comprimento de onda da função $\hat{V}_{\beta}\left(x_1,0,\omega\right)$ é então determinado pela contribuição dominante de entre essas M-1 funções. Para a situação em análise de perfil normalmente dispersivo verifica-se que a contribuição dominante surge com $i=M$, onde o termo k_1-k_i assume o seu maior valor e como tal o comprimento de onda da função $\hat{V}_{\beta}\left(x_1,0,\omega\right)$ relaciona-se, aproximadamente, com o comprimento de onda da função $\cos\left(x_1\left(k_1-k_M\right)\right)$, ou seja:

$$\hat{\lambda}(\omega) ; \quad \frac{\lambda_1(\omega)}{1-\dfrac{\lambda_1(\omega)}{\lambda_M(\omega)}} \tag{5.14}$$

onde $\hat{\lambda}(\omega)$ designa o comprimento de onda aproximado da função $\hat{V}_\beta(x_1, 0, \omega)$ para uma frequência fixa ω, $\lambda_1(\omega)$ o comprimento de onda do primeiro modo de propagação e $\lambda_M(\omega)$ o comprimento de onda do último modo de propagação para a mesma frequência ω.

Caso a velocidade de fase do primeiro modo de propagação se relacione principalmente com a velocidade de propagação de ondas S do estrato superficial, designada $v_{S;sup}$, e caso a velocidade de fase do ultimo modo de propagação se relacione com a velocidade de propagação de ondas S do ultimo estrato semi-infinito, designada $v_{S;inf}$, obtém-se uma nova expressão aproximada para cálculo de $\hat{\lambda}(\omega)$:

$$\hat{\lambda}(\omega) ; \quad \frac{0.92 \cdot v_{S;sup}}{\left(1-\dfrac{v_{S;sup}}{v_{S;inf}}\right) \cdot f} \tag{5.15}$$

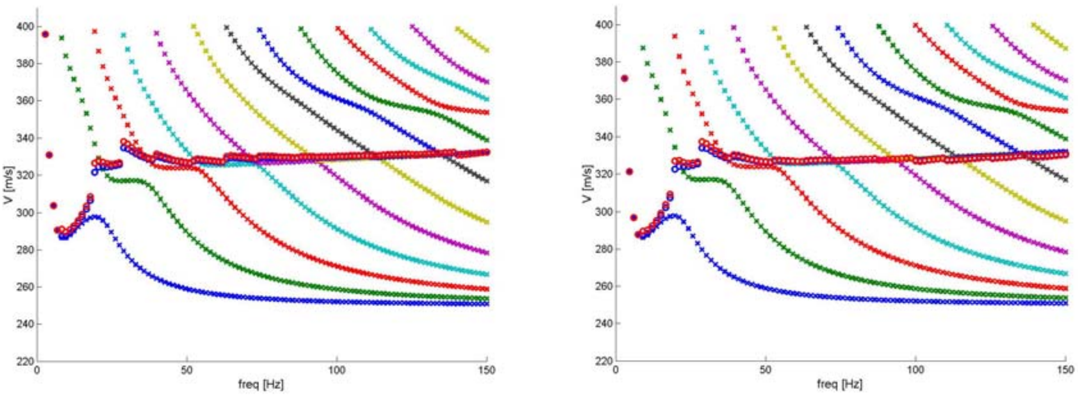
A aplicação da expressão (5.15) com $\hat{\lambda} = X$ identifica a mínima frequência para a qual a velocidade de fase aparente determinada a partir da configuração de ensaio em causa não é afectada pela influência dos modos mais elevados. Concretamente, para a configuração de ensaio expressa na Figura 5.15 (a), obtém-se $f = 86.25\text{Hz}$, como se verifica na curva de dispersão apresentada.

Na Figura 5.15 (b), o aumento da distância entre transdutores para 3m permitiu uma clara melhoria na definição das curvas de dispersão aparentes devido ao aumento de X. No entanto, a distância entre transdutores adoptada limitou a análise até comprimentos de onda de 3m, pelas razões atrás enunciadas, ou seja, até à frequência de, aproximadamente, 93Hz.

5.3.1.2 Perfis Inversamente Dispersivos

A aplicação da ferramenta *rig_efect_sim* aos dois perfis inversamente dispersivos descritos em 3.4.2 e 3.4.3 conduziu aos resultados seguidamente apresentados.

A Figura 5.16 representa as curvas de dispersão aparentes obtidas da simulação de um ensaio CSW com dois transdutores – caso (a) – e de um ensaio com 9 transdutores – caso (b) – considerando o perfil inversamente dispersivo tipo 1.

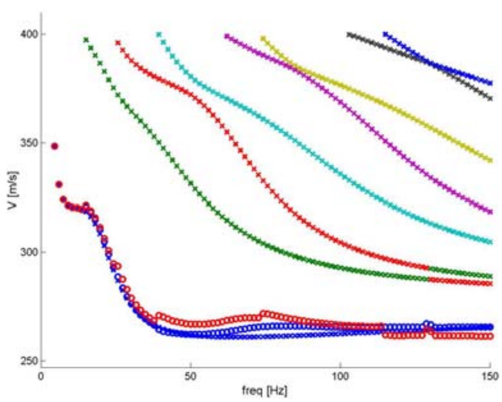


(a) (b)

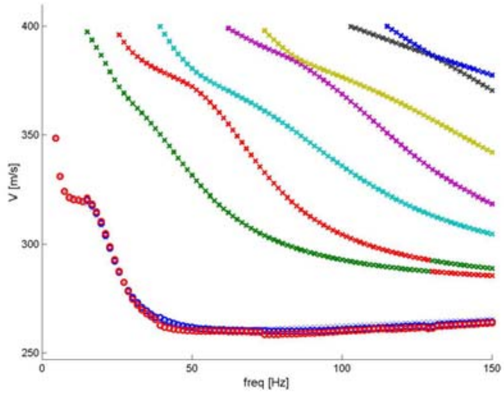
Figura 5.16 – Curva de dispersão simulada para perfil inversamente dispersivo tipo 1. (a) - 2 receptores D=4.5m e d=1.0m; (b) - 9 receptores D=2m e d=2.0m

Observa-se que os resultados obtidos são semelhantes e que, ao contrário do caso anteriormente analisado, as curvas de dispersão aparentes obtidas de um ensaio CSW com apenas dois transdutores seguem a trajectória esperada, não evidenciando efeitos locais introduzidos por modos diferentes do modo dominante.

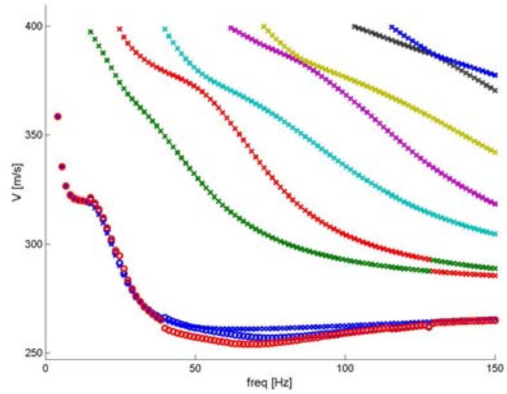
Finalmente, a Figura 5.17 apresenta os resultados obtidos considerando o perfil inversamente dispersivo tipo 2 para uma configuração de ensaio composta por 2 transdutores no caso (a), 12 transdutores no caso (b) e por 22 transdutores no caso (c).



(a)



(b)



(c)

Figura 5.17 – Curva de dispersão simulada para perfil inversamente dispersivo tipo 2. (a) - 2 receptores D=2m e d=1.50m; (b) - 12 receptores D=2m e d=1.50m; (c) - 22 receptores D=2m e d=0.50m

Comparando a Figura 5.17 (b) com a Figura 5.17 (c) constata-se que um maior número de transdutores utilizados durante a execução de um ensaio CSW não pressupõe, por si só, a estimação de melhores curvas de dispersão aparentes. De facto, a distância máxima inter-transdutores é inferior no caso (c) o que justifica a diferença observável nas curvas de dispersão aparente. A utilização de distâncias entre transdutores consecutivos muito inferiores aos menores comprimentos de onda presentes durante a realização do ensaio não beneficia significativamente os resultados obtidos em termos de curvas de dispersão aparente, limitando, por outro lado, a máxima distância entre transdutores, com os efeitos já referidos, uma vez que o número de transdutores disponíveis para a realização do ensaio não é, obviamente, ilimitado.

6 Considerações finais

A característica de dispersão associada à propagação de ondas de Rayleigh em meios heterogéneos, correspondente ao fenómeno de ondas com diferentes frequências se propagarem a diferentes velocidades, uma vez conhecido o conteúdo espectral da fonte de energia que dá origem à propagação, depende exclusivamente da configuração geotécnica em profundidade do meio afectado.

É este facto que justifica a realização de ensaios de excitação dinâmica superficial com vista à caracterização geotécnica do subsolo, onde, por meio de registos do movimento à superfície se determina uma curva de dispersão efectiva que expressa a referida relação entre a frequência e a velocidade de propagação.

A identificação do perfil geotécnico subjacente ao local de realização do ensaio é então efectuada por resolução de um problema inverso onde, por interpretação da curva de dispersão experimental, se estimam os parâmetros que definem um modelo teórico com ela compatível.

O presente trabalho focou-se na resolução do problema directo correspondente à determinação do campo de deslocamentos induzido por uma fonte de energia dinâmica pontual à superfície, com vista ao cálculo de curvas de dispersão aparente teóricas, que se pretende venham a constituir as futuras ferramentas de cálculo para a citada resolução do problema inverso, necessariamente mais complexo e envolvente.

Para além da validação da qualidade dos resultados obtidos com as diversas ferramentas computacionais desenvolvidas por aplicação e comparação a casos descritos e conhecidos de outros autores, por exemplo [Foti, 2000] e [Tokimatsu, 1992], e da análise comparativa entre resultados gerados de diferentes métodos resolutivos, método de Haskell-Thomson e o método dos estratos finos, o trabalho realizado e descrito nos capítulos 3 a 5 procura, em essência, focar as principais características da propagação de ondas de superfície em meios contínuos estratificados.

Por fim, a partir de uma ferramenta computacional de simulação dos cálculos espectrais efectuados durante um ensaio de excitação superficial dinâmica, com vista à estimação de curvas de dispersão aparentes experimentais, formularam-se considerações e recomendações relativamente ao número e distâncias entre transdutores a considerar durante a realização de um ensaio.

6.1 Conclusões

O campo vectorial de movimentos associados à propagação de ondas de superfície geradas por uma fonte pontual de energia pode ser descrito como uma soma ponderada de diferentes modos de propagação. Cada modo de propagação caracteriza-se por um par único frequência – comprimento de onda e por uma distinta configuração modal em profundidade. Em perfis normalmente dispersivos, o modo de propagação dominante no campo de movimentos observável à superfície é o primeiro modo de propagação ou, identicamente, aquele com menor velocidade de fase, ao passo que em perfis inversamente dispersivos o(s) modo(s) de propagação dominante(s) depende(m) do conteúdo em frequência da onda.

A curva de dispersão aparente ou efectiva traça a relação entre frequência e velocidade de fase do campo de movimentos superficial e expressa a referida predominância de determinados modos de propagação no campo de ondas total. A dependência da forma da curva de dispersão aparente com a distância à origem do movimento é principalmente evidenciada perante perfis normalmente dispersivos. Nestas condições, a influência de diversos modos de propagação, para além do dominante, no movimento superficial traduz-se numa aparente aceleração e retardamento de pontos de igual fase da onda à medida que esta se afasta da origem.

Por este efeito, conclui-se da conveniência de utilização simultânea de mais do que dois transdutores de sinal durante a realização de um ensaio sísmico de superfície, de forma a que a curva de dispersão efectiva experimental obtida da combinação multi-canal das diversas séries captadas não evidencie os focados efeitos locais e transitórios.

6.2 Desenvolvimentos futuros

A principal linha de continuidade do trabalho até aqui desenvolvido prende-se com o desenvolvimento de ferramentas computacionais para resolução do problema inverso de estimação de parâmetros geométricos e geotécnicos a partir de resultados conhecidos de ensaios sísmicos de superfície. A prossecução expedita deste objectivo pode ser concretizada partindo das ferramentas desenvolvidas ao longo do presente trabalho, adaptando-lhes um algoritmo adicional de convergência iterativa de resultados em termos de curvas de dispersão aparente simuladas a uma pré-definida curva de dispersão aparente experimental.

Outra hipótese consiste no desenvolvimento de novas ferramentas de modelação da excitação dinâmica superficial do subsolo mais genéricas e abrangentes. Dentro desta via destaca-se a integração de um modelo constitutivo histerético linear, descrito em 2.4.3, nas equações regentes do fenómeno de propagação de ondas de Rayleigh e/ou a consideração da anisotropia do material, esta, presumivelmente, envolvendo uma maior complexidade na sua efectivação matemática e computacional.

Ainda, figura como hipótese viável e desejável de desenvolvimento futuro do trabalho, a criação de ferramentas de modelação da propagação de ondas de Rayleigh num semi-espaço com heterogeneidade geotécnica bidimensional ou tridimensional, baseadas no método dos elementos finitos. Relativamente a esta via destacam-se como principais questões a resolver a escolha e definição do tipo de elementos finitos a utilizar, a caracterização das condições de fronteira adequadas para satisfação da condição de radiação de Sommerfeld no modelo finito e a geometria e dimensões adequadas da malha de elementos finitos.

Bibliografia

Aki K., Richards P.G. 1980. *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. W.H. Freeman and Company.

Azevedo J.J.R.T. 1996. *Vibrações Aleatórias. Dinâmica Estocástica.* Apontamentos da Disciplina de Dinâmica e Engenharia Sísmica. IST

Bilé Serra J.P. 1998. *Caracterização Experimental e Modelação Numérica do Comportamento Cíclico de Solos Não Coesivos. Aplicação à Engenharia Sísmica*. Tese Doutoramento, IST.

Bolt B. 1976. *Nuclear Explosions and Earthquakes: The Parted Veil.* W. H. Freeman and Company.

Christensen R.M. 1971. *Theory of Viscoelasticity - An Introduction*. Ed. Academic Press.

Clough R.W., Penzien J. 1975. *Dynamics of Strutures*. McGraw-Hill.

Foti S. 2000. *Multistation Methods for Geotechnical Characterization using Surface Waves*. Ph.D. Thesis, Politecnico di Torino.

Gazetas G., Yegian M.K. 1979. Shear and Rayleigh Waves in Soil Dynamics. *ASCE Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 105(GT12), 1455-1470.

Haskell, N.A. 1953. The Dispersion of Surface Waves on Multilayered Media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43, 17-34.

Ishihara K. 1996. *Soil Behaviour in Earthquake Geotechnics*. Oxford Science Publications.

Kausel E., Peek R. 1982. Dynamics Loads in the Interior of a Layered Stratum: An Explicit Solution. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72(6), 1459-1480.

Kausel E., Roësset J.M. 1981. Stiffness Matrices for Layered Soils. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71(6), 1743-1761.

Kennett B.L.N. 1974. Reflections, Rays, and Reverberations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 64, 1685-1696.

Kramer S.L. 1996. *Geotechnical Earthquake Engineering*. Prentice-Hall.

Lai C.G., Rix G.J. 1998. *Simultaneous Inversion of Rayleigh Phase Velocity and Attenuation for Near-Surface Site Characterization*. Georgia Institute of Technology, Atlanta.

Lo Presti, D.C.F. 1987. *Behavior of Ticino Sand During Resonant Column Tests*. Ph.D. Thesis, Politecnico di Torino.

Lysmer J., Waas G. 1972. Shear Waves in Plane Infinite Structures. *ASCE J. Eng. Mech. Div*., 18, 859-877.

Matthews M.C., Hope V.S., Clayton C.R.I. 1996. The Use of Surface Waves in the Determination of Ground Stiffness Profiles, *Geotechnical Engineering*, 119, 84-95.

Richart F.E. Jr., Woods R.D., Hall J.R. 1970. *Vibration of Soils and Foundations.* Prentice-Hall, N. J.

Rix G.J. 1988. *Experimental Study of Factors Affecting the Spectral Analysis of Surface Waves Method*. Ph.D. Thesis, The University of Texas at Austin.

Tokimatsu K., Tamura S., Kojima H. 1992. Effects of Multiple Modes on Rayleigh Wave Dispersion Characteristics. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, 118(10), 1529-1543.

Vucetic M., Dobry R. 1991. Effect of Soil Plasticity on Cyclic Response. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, 117(1), 89-107.

Woods R. D. 1968. Screening of Surface Waves in Soils. *ASCE J. Soil Mechanics and Foundation Division*, Vol 94, Nº SM 4, July, 951-979.