

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE ACONTECIMENTOS RAROS

Frederico Almeida Gião Gonçalves Caeiro

Tese orientada pela Professora Doutora Maria Ivette Leal de Carvalho Gomes

Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional
(na especialidade Probabilidades e Estatística)

2006

Resumo: O tema deste trabalho é a estimação semi-paramétrica de parâmetros de modelos de acontecimentos raros e insere-se na Teoria de Valores Extremos. Para além do índice de valores extremos, aqui representado por γ , interessa-nos também a estimação de um parâmetro de escala de primeira ordem e de um parâmetro de “escala” de segunda ordem. Vamos apresentar estimadores destes parâmetros e obter não só as suas propriedades assintóticas, sob condições de variação regular de terceira ordem, como propriedades para amostras de dimensão finita.

Depois de fazermos no Capítulo 1 uma breve introdução ao tema desta dissertação, apresentamos no Capítulo 2 alguns resultados que constituem a base da Teoria de Valores Extremos. Indicamos não só resultados relativos à teoria exacta como também relativos à teoria assintótica, como por exemplo as possíveis distribuições limites para o máximo devidamente normalizado e as condições que garantem a existência dessa distribuição limite. Estas condições são também apresentadas no âmbito da Teoria das funções de Variação Regular. Depois confirmamos que alguns dos mais importantes modelos de cauda pesada verificam as condições de Variação Regular e calculamos os valores dos parâmetros associados à cauda. No Capítulo 3 fazemos uma resenha de alguns dos estimadores semi-paramétricos existentes para o índice de valores extremos e para os parâmetros de forma e “escala” de segunda ordem. É nos restantes capítulos que se desenvolve o tema principal deste trabalho. No Capítulo 4 estudamos uma nova classe de estimadores do índice de valores extremos. Esta classe tem um parâmetro de controlo, λ , que se for devidamente escolhido anula a componente dominante de viés assintótico. Apresentamos não só resultados assintóticos, mas também resultados para amostras de dimensão finita. No Capítulo 5, apresentamos outro novo estimador do índice de valores extremos, de viés reduzido, baseado no clássico estimador de Hill. Este estimador distingue-se de muitos outros estimadores “assintoticamente centrados” por ter variância assintótica igual à do estimador de Hill, uma das mais pequenas variâncias entre as dos estimadores do índice de valores extremos. Apresentamos algumas propriedades e procedemos através do Método de Monte Carlo, a uma comparação com outros estimadores existentes na literatura. Em seguida, no Capítulo 6, introduzimos novos estimadores para um parâmetro de escala de primeira ordem. Apresentamos algumas propriedades assintóticas e efectuamos uma comparação com o estimador clássico deste parâmetro, através de um estudo de simulação. Finalmente, no Capítulo 7 tratamos a estimação de um parâmetro de “escala” de segunda ordem, um tema pouco abordado na literatura. Não só apresentamos propriedades assintóticas, como fazemos um estudo para amostras de dimensão finita.

Palavras chave: Estatística de Extremos, Estimação semi-paramétrica, Variação Regular, Caudas pesadas, Redução de viés.

Abstract: The subject of this thesis is the semi-parametric estimation of parameters related with models of rare events and is inserted in the Theory of Extreme Values. We are interested in the estimation of the extreme value index, γ , a scale first order parameter \mathcal{C} , and “scale” second order parameter β . We shall present here some new estimators and study them under a third order framework. The new estimators here considered will also be studied for finite samples, through Monte Carlo techniques.

Following a brief introduction to this work, in Chapter 1, we introduce in Chapter 2 some relevant results from the Classical Extreme Value Theory. After a few exact results we will focus in the asymptotic theory. We will show the three possible limit distributions for extremes of i.i.d. variables, and give conditions that guarantee those limit distribution. Then we study some heavy tail models and compute their regular variation parameters. In Chapter 3 we examine and study some already know semi-parametric estimators, that we will use in the following chapters. In Chapter 4 we first consider a class of consistent semi-parametric estimators of a positive extreme value index γ , parameterized in a tuning or control parameter λ . Such control parameter enables us to have access, for any available sample, to an estimator of the extreme value index with a null dominant component of asymptotic bias, and consequently with a reasonably flat mean squared error pattern, as a function of k , the number of top-order statistics considered. In Chapter 5 we are interested in an adequate estimation of the dominant component of the bias of Hill’s estimator of a positive tail index γ , in order to remove it from the classical Hill estimator in different asymptotically equivalent ways. If the second order parameters in the bias are computed at an adequate level k_1 of a larger order than that of the level k at which the Hill estimator is computed, there may be no change in the asymptotic variances of these reduced bias tail index estimators, which are kept equal to the asymptotic variance of the Hill estimator, i.e., equal to γ^2 . Next, in Chapter 6, we consider a new estimator of a scale first order parameter. We study this new estimator both asymptotically and for finite samples. Finally, in Chapter 7, we are interested in the estimation of a second order scale parameter β . Under a semi-parametric framework, we shall introduce a class of β -estimators and study their consistency. We shall also deal with the conditions enabling us to get the asymptotic normality of this class of estimators, and we shall illustrate the behavior of the estimators, through Monte Carlo simulation techniques, for a wide variety of heavy-tailed models.

Key Words: Statistic of extremes, Semi-parametric estimation, Regular Variation, Heavy tails, Bias reduction.

Agradecimentos

Estou muito grato à Professora Doutora Maria Ivette Gomes por me ter orientado ao longo destes últimos anos. A sua disponibilidade, sugestões e críticas foram um factor decisivo para a conclusão desta dissertação.

Aos familiares, amigos e colegas o meu sincero agradecimento pelo constante interesse e pelas palavras de conforto e incentivo.

Ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia pela atribuição de dispensa de serviço docente, imprescindível para a realização da dissertação.

Ao Centro de Matemática e Aplicações e ao projecto VEXTRA do CEAUL agradeço o apoio financeiro que me foi concedido nos últimos anos.

Notação e abreviaturas

v.a.	variável aleatória.
i.i.d.	independentes e identicamente distribuídas.
e.o.	estatística ordinal.
f.d.	função de distribuição.
f^{\leftarrow}	inversa generalizada de f , ou seja: $f^{\leftarrow}(t) = \inf\{x : f(x) \geq t\}$.
$U(t)$	função quantil recíproca associada à f.d. F , definida por $U(t) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t) = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$, $t > 1$.
$X_{i:n}$	i -ésima e.o. ascendente de X_1, X_2, \dots, X_n .
$f_{i:n}$	função densidade da i -ésima e.o. ascendente, $X_{i:n}$.
$F_{i:n}$	função de distribuição da i -ésima e.o. ascendente, $X_{i:n}$.
I_A	função indicatriz, isto é, $I_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$.
o	$f = o(g)$ se e só se $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$.
O	$f = O(g)$ se e só se existir uma constante A , tal que $ f(x_1) < Ag(x_2)$, $\forall x_1, x_2$.
\sim	$f \sim g$, se e só se $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	convergência em probabilidade.
\xrightarrow{d}	convergência em distribuição.
$\stackrel{d}{\sim}$	com a mesma distribuição assintótica.
$\stackrel{d}{=}$	igualdade em distribuição.
o_p	$X_n = o_p(Y_n)$ se e só se $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n \rightarrow \infty$.
O_p	$X_n = O_p(a_n)$ se e só se para todo o $\delta > 0$ existir $M_\delta > 0$, tal que $\mathbb{P}(X_n /a_n \leq M_\delta) \geq 1 - \delta$, para todo o n natural.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Breve introdução à Teoria dos Valores Extremos	5
2.1	Teoria distribucional exacta	6
2.1.1	Distribuição de uma estatística ordinal	6
2.1.2	Momentos de estatísticas ordinais	7
2.1.3	Propriedades dos modelos Uniforme, Exponencial e Pareto	8
2.2	Teoria Assintótica	10
2.2.1	Estatísticas Ordinais Centrais e Intermédias	11
2.2.2	Estatísticas Ordinais Extremas	13
2.3	Variação Regular	18
2.3.1	Funções de Variação Regular	18
2.3.2	Caracterização dos domínios de atracção e comportamento de segunda ordem	21
2.3.3	Condição de segunda e terceira ordem para modelos de cauda pesada	23
2.4	Validação das Condições de segunda e terceira ordem	25
2.4.1	Modelo Fréchet	25
2.4.2	Modelo Burr	26
2.4.3	Modelo Log-Logístico	26
2.4.4	Modelo GP com $\gamma > 0$	27
2.4.5	Modelo Cauchy	27

2.4.6	Modelo t de Student com ν graus de liberdade	28
2.4.7	GEV, $\gamma > 0$	34
2.4.8	Classe de Hall	35
3	Alguns resultados usados na estimação semi-paramétrica de parâmetros de acontecimentos raros	39
3.1	Propriedades de estimadores existentes na literatura sob condições de variação regular de terceira ordem	39
3.2	Estimadores baseados nos excessos das log observações	49
3.2.1	Estimadores do índice de valores extremos positivo, γ	49
3.2.2	Estimação do parâmetro de segunda ordem, ρ	57
3.3	Estimadores baseados nos espaçamentos escalados das log-observações	62
4	Estudo detalhado de uma classe de estimadores semi paramétrica, de viés reduzido, do índice de valores extremos	69
4.1	Nova classe de estimadores semi-paramétricos	70
4.2	Propriedades assintóticas	71
4.3	Propriedades assintóticas do estimador do índice de valores extremos, baseado na estimação externa de ρ	73
4.4	Comportamento exacto dos estimadores	77
4.5	Alguns comentários e conclusões	86
5	Redução directa do viés do estimador de Hill	89
5.1	Novos estimadores de viés reduzido	90
5.2	Distribuição assintótica	91
5.3	Propriedades para amostras de dimensão finita	94
5.3.1	Modelos utilizados	94
5.3.2	O estudo de simulação	94
5.3.3	Padrão do valor médio e erro médio quadrático	95
5.3.4	Valor médio, erro médio quadrático e eficiência relativa no nível óptimo	99

5.4	Aplicação a dados reais	105
5.4.1	Euro “versus” Libra	105
5.4.2	S&P500	108
5.5	Conclusões gerais	110
6	Estimação de um Parâmetro de escala de primeira ordem	111
6.1	Estimadores do parâmetro de escala	112
6.2	Propriedades assintóticas	115
6.2.1	Propriedades assintóticas dos novos estimadores sem a estimação de parâmetros de segunda ordem	118
6.2.2	Propriedades assintóticas dos novos estimadores com a estimação de parâmetros de segunda ordem	121
6.3	Propriedades para amostras de dimensão finita	123
6.4	Considerações finais	124
7	Nova classe de estimadores de um parâmetro de “escala” de segunda ordem	133
7.1	Novos estimadores do parâmetro de escala de segunda ordem	134
7.2	Propriedades assintóticas	135
7.3	Comportamento exacto - Estudo de simulação	138
7.3.1	Padrão amostral e estimativas no nível óptimo	139
7.3.2	Estudo de simulação realizado num nível fixo, k_1	146
8	Algumas Conclusões	149

Lista de Tabelas

2.1	Propriedades de e.o.'s de alguns modelos padrão ($i < j$)	8
2.2	Coefficientes $a_{i,k}$ com $i \leq 6$ e $k \leq 6$	30
2.3	Coefficientes $b_{i,k}$ com $i \leq 5$ e $k \leq 6$	32
2.4	Coefficientes C_ν , e $D_{\nu,\bullet}$ para $\nu \leq 8$	33
2.5	Parâmetro de “escala” de segunda ordem do modelo t de Student com $\nu \leq 8$	34
2.6	Parâmetros de segunda e terceira ordem e funções $A(t)$ e $B(t)$ do modelo GEV, para os vários valores do índice de valores extremos γ	35
2.7	Relação assintótica entre alguns modelos de cauda pesada e a classe de Hall	38
3.1	Alguns valores de $\lambda_0 : b_\theta(\lambda_0) = 0$ como função do parâmetro ρ	56
3.2	Tabela com $\sigma_{\theta,\lambda_0}^2$ para alguns valores de θ	56
4.1	Fracção óptima da amostra simulada, k_0/n , dos estimadores do índice de valores extremos, H , CG e ML	79
4.2	Valor médio simulado, E , dos estimadores do índice de valores extremos, H , CG e ML , nos respectivos níveis óptimos.	80
4.3	Erro médio quadrático simulado, MSE ($\times 100$), dos estimadores do índice de valores extremos, H , CG e ML , nos respectivos níveis óptimos.	81
4.4	Eficiências relativas simulada, dos estimadores CG e ML , para os modelos <i>Fréchet</i> e <i>Burr</i>	82

4.5	Eficiências relativas simulada, dos estimadores CG e ML , para o modelo t de Student.	83
5.1	Fracção óptima da amostra simulada, k_0/n , dos estimadores do índice de valores extremos, H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$	100
5.2	Valor médio simulado, E , dos estimadores do índice de valores extremos, H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, nos respectivos níveis óptimos.	101
5.3	Erro médio quadrático simulado, MSE ($\times 100$), dos estimadores do índice de valores extremos, H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, nos respectivos níveis óptimos.	102
5.4	Eficiência relativa simulada, dos estimadores do índice de valores extremos, \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para os modelos $Burr$ e $Fréchet$	103
5.5	Eficiência relativa simulada, dos estimadores do índice de valores extremos, \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para o modelo t de Student.	104
6.1	Fracção óptima da amostra simulada, k_0/n , dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem.	127
6.2	Valor médio simulado dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, nos respectivos níveis óptimos.	128
6.3	Erro médio quadrático simulado, MSE ($\times 100$), dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, nos respectivos níveis óptimos.	129
6.4	Eficiência relativa dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem para os modelos $Burr$ e $Cauchy$	130
6.5	Eficiência relativa dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem para o modelo $Fréchet$	131
7.1	Fracção óptima da amostra simulada, k_0/n , dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem.	142
7.2	Valor médio simulado, E , dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, nos respectivos níveis óptimos.	143
7.3	Erro médio quadrático simulado, MSE ($\times 100$), dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, nos respectivos níveis óptimos.	144

7.4 Valor médio e Erro médio quadrático simulado, no nível $k_1 = [n^{0.995}]$. . . 147

Lista de Figuras

3.1	Padrão do erro médio quadrático assintótico do estimador de Hill para uma amostra de dimensão $n = 1000$	50
4.1	Trajectórias amostrais de $\hat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k)$ calculadas a partir de uma amostra de dimensão $n = 5000$ do modelo <i>Burr</i> . Os valores $\lambda = 2.374$ (esquerda) e $\lambda = 1.9$ (direita) foram escolhidos de acordo com a Tabela 3.1 e são os que anulam a componente dominante de viés assintótico.	71
4.2	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -2$	84
4.3	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -1$	84
4.4	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5$	84
4.5	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo <i>t</i> de Student com $\nu = 1$ ($\gamma = 1$ e $\rho = -2$).	85
4.6	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo <i>t</i> de Student com $\nu = 2$ ($\gamma = 0.5$ e $\rho = -1$).	85

4.7	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 4$ ($\gamma = 0.25$ e $\rho = -0.5$).	85
4.8	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Fréchet</i> com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$).	86
5.1	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Fréchet</i> com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$).	96
5.2	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -2$	97
5.3	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -1$	97
5.4	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5$	97
5.5	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 1$ ($\gamma = 1$ e $\rho = -2$).	98
5.6	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 2$ ($\gamma = 0.5$ e $\rho = -1$).	98
5.7	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 4$ ($\gamma = 0.25$ e $\rho = -0.5$).	98
5.8	Câmbio diário Euro/Libra Inglesa (esquerda) e log-retorno diário (direita) do Euro versus a Libra Inglesa.	106

5.9	Estimativas do parâmetro de “forma” de segunda ordem ρ , através de $\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$ em (3.38), $\tau = 0$ e 1 (<i>esquerda</i>) e do parâmetro de “escala” de segunda ordem β , através de $\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$ em (3.51) (<i>direita</i>), para os log-retornos diários do Euro versus a Libra Inglesa.	106
5.10	Estimativas fornecidas pelos estimadores de Hill, $H(k)$ e $\overline{H}(k)$ em (3.5) e (5.2), respectivamente.	107
5.11	Estimativas do parâmetro de “forma” de segunda ordem ρ , através de $\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$ em (3.38), $\tau = 0$ e 1 (<i>esquerda</i>) e do parâmetro de “escala” de segunda ordem β , através de $\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$ em (3.51) (<i>direita</i>), para os log-retornos diários (negativos) do Euro versus a Libra Inglesa.	107
5.12	Estimativas do índice de valores extremos fornecidas pelos estimadores de Hill, $H(k)$ e $\overline{H}(k)$ em (3.5) e (5.2), respectivamente.	108
5.13	Índice S&P500 (<i>esquerda</i>) e respectivo log-retorno diário (<i>direita</i>) entre 2 de Janeiro de 1996 até 30 de Dezembro de 2005.	109
5.14	Estimativas do parâmetro de “forma” de segunda ordem ρ , através de $\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$ em (3.38), $\tau = 0$ e 1 (<i>esquerda</i>) e do parâmetro de “escala” de segunda ordem β , através de $\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$ em (3.51) (<i>direita</i>), para os log-retornos diários negativos do índice S&P500.	109
5.15	Estimativas fornecidas pelos estimadores de Hill, $H(k)$ e $\overline{H}(k)$ em (3.5) e (5.2), respectivamente.	110
6.1	Trajectória amostral de $\mathcal{C}(k)$ (<i>esquerda</i>) e $\hat{\mathcal{C}}_\gamma(k)$ (<i>direita</i>) calculada a partir de uma amostra de dimensão 1000 do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -1$	114
6.2	Gráfico de $\gamma\sigma_{\mathcal{C}}$ para vários valores de γ	118
6.3	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -2$	125

6.4	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -1$	125
6.5	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Burr</i> com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5$	125
6.6	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Fréchet</i> com $\gamma = 0.5$ ($\rho = -1$).	126
6.7	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo <i>Fréchet</i> com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$).	126
6.8	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Cauchy ($\gamma = 1$, $\rho = -2$).	126
7.1	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 5000$ do modelo <i>Fréchet</i> ($\rho = -1$).	140
7.2	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 10000$ do modelo Cauchy ($\gamma = 1$, $\rho = -2$).	140
7.3	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 5000$ do modelo <i>Burr</i> com $\rho = -2$	141
7.4	Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 5000$ do modelo <i>Burr</i> com $\rho = -1$	141

7.5 Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 5000$ do modelo *Burr* com $\rho = -0.5$ 141

Capítulo 1

Introdução

A Estatística de Valores Extremos procura estimar parâmetros de modelos de acontecimentos raros e é aplicada em áreas tão diversas como, por exemplo, Hidrologia, Fiabilidade, Seguros ou Cotações de índices financeiros. A maioria dos resultados existentes destina-se à cauda direita $1 - F$ e pressupõe que as amostras aleatórias são i.i.d. (como acontece neste trabalho) ou apenas estacionárias. Os resultados para a cauda esquerda obtêm-se de forma análoga aos da cauda direita e é por esta razão que quase não se encontram na literatura. Um dos parâmetros fundamentais em Estatística de Extremos é o índice de valores extremos, aqui designado por γ . Trata-se do parâmetro de forma da distribuição limite da sucessão de máximos linearmente normalizada e que irá merecer algum destaque neste trabalho. Para além deste parâmetro fundamental, vamos também abordar a estimação de um parâmetro de escala de primeira ordem da cauda $1 - F$ e um parâmetro de “escala” de segunda ordem, de uma subclasse de modelos de cauda pesada, a classe de Hall.

Os estimadores semi-paramétricos de parâmetros de primeira ordem, como por exemplo o índice de valores extremos positivo, baseiam-se geralmente nas k estatísticas ordinais de topo da amostra. Eles são consistentes para a estimação do parâmetro de acontecimentos raros, apenas quando k é intermédio, isto é, quando $k = o(n)$, $k, n \rightarrow \infty$. Sob a validade de uma condição de variação regular de segunda ordem, existem funções $\varphi(k) \rightarrow 0$ e A de variação regular, tal que os estimadores clássicos de um parâmetro de primeira ordem, θ , verificam a seguinte representação assintótica,

em distribuição,

$$\widehat{\theta}_n(k) \stackrel{d}{=} \theta + \sigma\varphi(k)Z_k + b_\rho A(n/k)(1 + o_p(1))$$

onde Z_k é assintoticamente uma variável aleatória normal padrão, $\sigma > 0$, $b_\rho \in \mathbb{R}$. As aproximações para a variância e viés assintóticos são, respectivamente, $(\sigma\varphi(k))^2$ e $b_\rho A(n/k)$. O facto de muitos destes estimadores não serem assintoticamente centrados leva-nos a utilizar o critério de minimização do erro médio quadrático para escolher o nível óptimo. Consequentemente, o padrão deste tipo de estimadores clássicos é muito volátil e deve-se essencialmente a:

- Elevada variância para níveis, $X_{n-k:n}$, elevados, ou seja, para valores de k pequenos;
- Viés elevado para níveis pequenos, isto é, para grandes valores de k ;
- Pequena região de estabilidade do gráfico das estimativas “versus” k ;
- Número reduzido de níveis k com erro médio quadrático próximo do erro médio quadrático mínimo.

De modo a encontrar melhores alternativas aos estimadores clássicos, os estimadores de parâmetros de primeira ordem, introduzidos neste trabalho, são “assintoticamente centrados”, isto é, têm termo dominante de viés nulo. Este tipo de estimadores requer, muitas vezes, a estimação de parâmetros de segunda ordem tais como o parâmetro de “forma” denotado por ρ e/ou o parâmetro de “escala” denotado por β .

No Capítulo 2, deste trabalho, referimos alguns resultados clássicos das estatísticas ordinais, que consideramos importantes. Após uma breve referência à teoria exacta, fazemos a classificação das estatísticas ordinais entre estatísticas ordinais centrais, intermédias ou extremas e estudamos o seu comportamento assintótico. Referimos não só quais as distribuição assintóticas como as respectivas condições necessárias e suficientes para a existência dessa distribuição. Quase todos os resultados que apresentamos, são referentes às estatísticas ordinais extremas e intermédias (por estarem relacionadas

com a caracterização do domínio de atracção para máximos). Por fim caracterizamos o domínio de atracção para máximos, usando a Variação Regular, uma ferramenta essencial em Teoria de Valores Extremos. Apresentamos condições de variação regular, até à terceira ordem, e caracterizamos alguns dos modelos usuais de cauda pesada. Todos eles verificam as condições de variação regular apresentadas e pertencem a uma classe de modelos, aqui designada por classe de Hall (de terceira ordem), isto é a uma classe de modelos com cauda do tipo

$$1 - F(x) = Cx^{-1/\gamma}(1 + Dx^{\rho/\gamma} + Ex^{2\rho/\gamma} + o(x^{2\rho/\gamma})), \quad x \longrightarrow \infty,$$

onde $\gamma > 0$, $\rho < 0$, $C > 0$, $D \neq 0$ e $E \neq 0$.

No Capítulo 3 referimos alguns estimadores de parâmetros de primeira ou segunda ordem. Como, na literatura, a maioria dos estimadores só está estudada até à segunda, apresentamos algumas propriedades assintóticas sob a validade da condição de variação regular de terceira ordem.

No Capítulo 4, deste trabalho, introduzimos uma nova classe de estimadores do índice de valores extremos γ . Esta classe tem um parâmetro de controlo, λ , que pode ser escolhido ao nosso gosto. Apresentamos algumas propriedades assintóticas, e demonstramos que se o parâmetro λ for devidamente escolhido a componente dominante de viés assintótico é nula. Apresentamos também um estimador para o parâmetro de controlo que resulta do estimador do parâmetro de forma ρ existente na literatura. Por fim, recorreremos a um estudo de simulação para ilustrar o comportamento do estimador para amostras de dimensão finita. A simulação é realizada não só para λ conhecido, mas também desconhecido e estimado a partir da amostra.

No Capítulo 5 abordamos novamente a estimação do índice de valores extremos. Muitos dos estimadores assintoticamente centrados existente na literatura apresentam uma variância assintótica superior à do estimador de Hill. Mesmo assim a remoção da componente dominante de viés permite que o erro médio quadrático seja muito inferior ao do estimador de Hill. Os estimadores agora propostos e estudados são baseados no clássico estimador de Hill. Apresentamos algumas propriedades para os

novos estimadores do índice de valores extremos e demonstramos que se os parâmetros de segunda ordem forem estimados num nível k_1 , de ordem superior ao nível k utilizado para estimar o índice de valores extremos, não existe qualquer alteração na variância assintótica do estimador de Hill e esta mantém-se igual a γ^2 . Estudamos também o comportamento destes novos estimadores para amostras de dimensão finita através do método de Monte Carlo.

No Capítulo 6 abordamos a estimação de um parâmetro de escala de primeira ordem. Como as trajectórias amostrais do estimador clássico deste parâmetro são bastante voláteis, o principal objectivo é a redução de viés. Introduzimos novos estimadores de viés reduzido e apresentamos propriedades assintóticas em contexto de terceira ordem. O Método de Monte Carlo é depois utilizado de modo a obter o comportamento destes estimadores, para amostras de dimensão finita, comparativamente com outros existentes na literatura.

Por fim, introduzimos no Capítulo 7 uma classe de estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, β . Trata-se de um parâmetro que tem recebido na literatura muito menos atenção do que o parâmetro de forma ρ , mas cuja adequada estimação é fundamental para muitos estimadores “assintoticamente centrados” de parâmetros de primeira ordem, como os introduzidos nos Capítulos 5 e 6. Provamos a sua consistência e indicamos condições que garantem a sua normalidade assintótica. Usando o método de Monte Carlo estudamos esta classe de estimadores de β , para amostras de dimensão finita de alguns modelos de cauda pesada.

Capítulo 2

Breve introdução à Teoria dos Valores Extremos

Pretendemos neste capítulo apresentar algumas definições e resultados da Teoria dos Valores Extremos (TVE) para variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Neste capítulo, os livros de Arnold *et al.* [2], David [11], Reiss [43] e Resnick [44] são referências obrigatórias.

Começamos por apresentar, na secção 2.1, alguns resultados relativos à distribuição exacta de estatísticas ordinais (e.o.'s), enquanto que na secção 2.2 introduzimos a respectiva teoria assintótica. É feita a distinção entre e.o.'s centrais, intermédias e extremas e apresentamos a distribuição limite não degenerada, G , do máximo, linearmente normalizado. A secção 2.3, é dedicada à teoria das funções de Variação Regular, ferramenta essencial para caracterizar os modelos no domínio de atracção para máximos da distribuição limite não degenerada. O recurso a estudos de simulação é uma prática corrente para ilustrar o comportamento das estatísticas e é por isso que interessa conhecer o comportamento da cauda de alguns modelos. Assim, na secção 2.4 deste capítulo, começamos por caracterizar até à terceira ordem vários modelos de cauda pesada. O estudo do modelo t de Student é mais extenso que o dos restantes modelos. Por se tratar de um modelo importante, apresentamos todos os resultados utilizados para caracterizar a cauda até à terceira ordem.

2.1 Teoria distribucional exacta

2.1.1 Distribuição de uma estatística ordinal

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória i.i.d. de dimensão n , proveniente de um modelo com função de distribuição (f.d.) F e $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ as respectivas e.o.'s associadas à amostra.

Represente-se por $F_{i:n}(x)$, a f.d. de $X_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$. Tem-se então para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{1:n}(x) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i > x\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F(x)) = 1 - (1 - F(x))^n;$$

$$F_{n:n}(x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \leq x\right) = \prod_{i=1}^n F(x) = F^n(x).$$

De um modo geral,

$$F_{i:n}(x) = \mathbb{P}(\text{pelo menos } i \text{ das } n \text{ observações } \leq x) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} [F(x)]^k [1 - F(x)]^{n-k},$$

ou seja, a f.d. de $X_{i:n}$ é a cauda direita de uma f.d. binomial de parâmetros n e $F(x)$.

Se a v.a. X é absolutamente contínua, a função densidade de $X_{i:n}$ é dada por:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{n!}{(i-1)!1!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} f(x) [1 - F(x)]^{n-i} \\ &= \frac{1}{\mathcal{B}(i, n-i+1)} [F(x)]^{i-1} f(x) [1 - F(x)]^{n-i}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, $p > 0$, $q > 0$, é a função Beta completa.

De modo análogo, a f.d. do par aleatório $(X_{i:n}, X_{j:n})$, $1 \leq i < j \leq n$, é:

$$F_{i,j:n}(x, y) = \begin{cases} \sum_{k=j}^n \sum_{l=i}^k \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!} F^l(x) [F(y) - F(x)]^{k-l} [1 - F(y)]^{n-k}, & x < y \\ F_{j:n}(y) & , \quad x \geq y. \end{cases}$$

É também possível obter a função densidade do par aleatório $(X_{i:n}, X_{j:n})$, com

$1 \leq i < j \leq n$:

$$\begin{aligned} f_{i,j:n}(x, y) &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} F^{i-1}(x) [F(y) - F(x)]^{j-i-1} [1 - F(y)]^{n-j} f(x) f(y) \\ &= \frac{1}{\mathcal{B}(i, j-i) \mathcal{B}(j, n-j+1)} F^{i-1}(x) [F(y) - F(x)]^{j-i-1} [1 - F(y)]^{n-j} f(x) f(y), \\ &\text{se } x < y. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.2 Momentos de estatísticas ordinais

Por definição, o valor esperado da i -ésima e.o. é:

$$\begin{aligned} \mu_{i:n} &= \mathbb{E}[X_{i:n}] = \frac{1}{\mathcal{B}(i, n-i+1)} \int_{\mathbb{R}} x F^{i-1}(x) [1 - F(x)]^{n-i} dF(x) \\ &= \frac{1}{\mathcal{B}(i, n-i+1)} \int_0^1 F^{-1}(u) u^{i-1} (1-u)^{n-i} du, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para definir a variância/covariância de e.o.'s, é necessário introduzir os respectivos momentos de ordem dois. Considere-se mais geralmente,

$$\begin{aligned} \mu_{i:n}^{(k)} &= \mathbb{E}[X_{i:n}^k] = \frac{1}{\mathcal{B}(i, n-i+1)} \int_{\mathbb{R}} x^k F^{i-1}(x) [1 - F(x)]^{n-i} dF(x) \\ &= \frac{1}{\mathcal{B}(i, n-i+1)} \int_0^1 [F^{-1}(u)]^k u^{i-1} (1-u)^{n-i} du, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

A covariância entre $X_{i:n}$ e $X_{j:n}$ é dada por,

$$\sigma_{i,j:n} = \mu_{i,j:n} - \mu_{i:n} \mu_{j:n} = \mathbb{E}[X_{i:n} X_{j:n}] - \mathbb{E}[X_{i:n}] \mathbb{E}[X_{j:n}], \tag{2.5}$$

onde $\mu_{i,j:n}$ é:

$$\begin{aligned} \mu_{i,j:n} &= \frac{1}{\mathcal{B}(i, j-i) \mathcal{B}(j, n-j+1)} \int \int_{x < y} xy F^{i-1}(x) [F(y) - F(x)]^{j-i-1} \times \\ &\quad \times [1 - F(y)]^{n-j} dF(x) dF(y), \quad 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Quando $i = j$ em (2.5), obtemos a variância de $X_{i:n}$, $\sigma_{i:n}^2$,

$$\sigma_{i:n}^2 = V[X_{i:n}] = \mathbb{E}[X_{i:n}^2] - \mathbb{E}^2[X_{i:n}] = \mu_{i:n}^{(2)} - (\mu_{i:n})^2. \tag{2.6}$$

2.1.3 Propriedades dos modelos Uniforme, Exponencial e Pareto

Pretendemos apresentar, para alguns modelos importantes, resultados da teoria dos valores extremos necessários para obter propriedades assintóticas de algumas estatísticas. Referimo-nos aos modelos Uniforme, Exponencial e Pareto padrão (ou standard), cujas v.a.'s serão, sempre que possível, representadas pelas letras U , E , e Y , respectivamente. Apresentamos na Tabela 2.1 a função densidade e alguns momentos de e.o.'s para estes três modelos. Nesta Tabela, considera-se que $\mu_{i,i:n} = \mu_{i:n}^{(2)}$, que $\mu_{0:n}^{(k)}$ é igual ao limite inferior do suporte e que I representa a função indicatriz definida por

$$I_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}.$$

Tabela 2.1: Propriedades de e.o.'s de alguns modelos padrão ($i < j$)

	Uniforme	Exponencial	Pareto
$f(x)$	$I_{]0,1[}(x)$	$e^{-x} I_{]0,\infty[}(x)$	$\frac{1}{x^2} I_{]1,\infty[}(x)$
$\mu_{i:n}$	$\frac{i}{n+1}$	$\sum_{j=n-i+1}^n \frac{1}{j}$	$\frac{n}{n-i}$
$\mu_{i:n}^{(k)}$	$\frac{n!(i+k-1)!}{(n+k)!(i-1)!}$	$\mu_{i-1:n-1}^{(k)} + \frac{k}{n} \mu_{i:n}^{(k-1)}$	$\frac{n!(n-i-k)!}{(n-k)!(n-i)!}$
$\sigma_{i:n}^2$	$\frac{i(n+1-i)}{(n+1)^2(n+2)}$	$\sum_{j=n-i+1}^n \frac{1}{j^2}$	$\frac{ni}{(n-i-1)(n-i)^2}$
$\mu_{i,j:n}$	$\frac{i(j+1)}{(n+1)(n+2)}$	$\mu_{i,j-1:n} + \frac{1}{n-j+1} \mu_{i:n}$	$\frac{n(n-1)}{(n-i-1)(n-j)}$
$\sigma_{i,j:n}$	$\frac{\mu_{i:n}(1-\mu_{j:n})}{n+2}$	$\sigma_{i:n}^2$	$\frac{ni}{(n-i)(n-i-1)(n-j)}$

Teorema 2.1.1. *Sejam U_1, U_2, \dots, U_n v.a.'s i.i.d. com distribuição uniforme padrão e sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a.'s i.i.d. com f.d. contínua $F_X(x)$. Tem-se que:*

$$F_X(X_{i:n}) \stackrel{d}{=} U_{i:n}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Demonstração.

Pelo teorema da transformação uniformizante, a distribuição de $F_X(X)$ é Uniforme

standard. Mas, se $F_X(X) \stackrel{d}{=} U$ e sendo F_X uma f.d., que é não decrescente (ou seja preserva a ordem), o resultado é imediato. \square

Observação 2.1.1. *O resultado do Teorema 2.1.1 é equivalente a, $X_{i:n} \stackrel{d}{=} F_X^{\leftarrow}(U_{i:n})$, $i = 1, \dots, n$, onde F_X é uma f.d. arbitrária e F_X^{\leftarrow} a respectiva inversa generalizada, definida por:*

$$F_X^{\leftarrow}(t) = \inf \{x : F_X(x) \geq t\}. \quad (2.8)$$

Observação 2.1.2. *Também resulta que se X for uma v.a. contínua,*

$$X_{i:n} \stackrel{d}{=} U_X(Y_{i:n}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.9)$$

onde a U_X representa a função quantil da v.a. X definida por

$$U_X(t) = F_X^{\leftarrow}(1 - 1/t), \quad t \geq 1, \quad (2.10)$$

e Y representa uma v.a. com distribuição Pareto padrão.

Teorema 2.1.2 (Representação de Rényi). *Sejam $E_{i:n}$, $1 \leq i \leq n$ as e.o.'s associadas a uma amostra aleatória Exponencial padrão, de dimensão n . Verifica-se que*

$$E_{i:n} = \sum_{r=1}^i (E_{r:n} - E_{r-1:n}) \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^i \frac{E_r}{n - r + 1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.11)$$

onde $E_{0:n} \equiv 0$.

Observação 2.1.3. *Como consequência do Teorema anterior,*

$$E_i \stackrel{d}{=} (n - i + 1)(E_{i:n} - E_{i-1:n}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.12)$$

e

$$E_{j:n} - E_{i:n} \stackrel{d}{=} E_{j-i:n-i} \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (2.13)$$

Proposição 2.1.1. *Sejam Y uma v.a. Pareto padrão e E uma v.a. Exponencial padrão. Se considerarmos $Y_{0:n} \equiv 1$, os seguintes resultados são sempre válidos:*

$$\ln Y_{i:n} \stackrel{d}{=} E_{i:n}, \quad 1 \leq i \leq n; \quad (2.14)$$

$$\frac{Y_{n-i:n}}{Y_{n-k:n}} \stackrel{d}{=} Y_{k-i:k}, \quad 1 \leq i \leq k \leq n; \quad (2.15)$$

Demonstração.

O primeiro resultado demonstra-se aplicando o teorema da transformação uniformizante. Como $1 - e^{-E} \stackrel{d}{=} U$ e $1 - \frac{1}{Y} \stackrel{d}{=} U$, resulta que $E \stackrel{d}{=} \ln Y$. Sendo a função \ln crescente é obvio que também haverá igualdade na distribuição das respectivas e.o.'s.

Como o segundo resultado é equivalente a $\ln \left(\frac{Y_{n-i:n}}{Y_{n-k:n}} \right) \stackrel{d}{=} \ln(Y_{k-i:k})$, para demonstrar (2.15) basta usar a relação entre os modelos Pareto e Exponencial, (2.14), e aplicar (2.13),

$$\ln \left(\frac{Y_{n-i:n}}{Y_{n-k:n}} \right) = \ln Y_{n-i:n} - \ln Y_{n-k:n} \stackrel{d}{=} E_{n-i:n} - E_{n-k:n} \stackrel{d}{=} E_{k-i:k} \stackrel{d}{=} \ln Y_{k-i:k}.$$

□

Observação 2.1.4. *Se X representar uma v.a. Pareto com parâmetro de escala C^γ e parâmetro de forma γ , ou seja, se $F(x) = 1 - Cx^{-1/\gamma}$, $x > C^\gamma$, então:*

$$\ln X_{i:n} = \gamma E_{i:n} + \gamma \ln C, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.16)$$

2.2 Teoria Assintótica

Os resultados até agora introduzidos permitem-nos, de um modo fácil, obter formalmente a distribuição exacta de e.o.'s. No entanto, salvo algumas excepções, as expressões apresentadas acabam por ser difíceis de calcular, mesmo quando a dimensão da amostra é pequena. Assim, há interesse em estudar a distribuição para amostras de grande dimensão (distribuição limite), na expectativa de encontrar expressões mais simples que possam ser usadas como boas aproximações da distribuição exacta.

O comportamento assintótico de $X_{k:n}$ depende da relação existente entre $k = k(n)$ e n . É possível classificar em três grupos as e.o.'s:

1. Se $k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\frac{k(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \in]0, 1[$, $X_{k(n):n}$ diz-se uma estatística ordinal central. Por exemplo, qualquer quantil empírico é uma estatística ordinal central.
2. Se $k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\frac{k(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $X_{k(n):n}$ diz-se uma estatística ordinal intermédia inferior e $X_{n-k(n):n}$ diz-se uma estatística ordinal intermédia superior.
3. Diz-se que $X_{k(n):n}$ é estatística ordinal extremal inferior ou superior se $k(n) = r$ ou $k(n) = n - r$, respectivamente, em que r está fixo. É este tipo de estatísticas e respectivas distribuições limite que serão abordadas mais detalhadamente neste trabalho.

É possível relacionar os resultados das e.o.'s inferiores com as superiores usando a relação,

$$X_{i:n} = -Y_{n-i+1:n}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde $Y_i = -X_i$. Por esta razão apenas serão estudadas as e.o.'s superiores. Iremos também utilizar estatísticas ordinais intermédias superiores, $X_{n-k:n}$, onde $k = k(n)$ representa uma sequência intermédia, isto é, uma sequência de valores inteiros entre 1 e n verificando,

$$k = k(n) \longrightarrow \infty, \quad k/n \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty. \quad (2.17)$$

2.2.1 Estatísticas Ordinais Centrais e Intermédias

Começamos por apresentar o resultado que nos indica qual a distribuição limite duma e.o. central.

Teorema 2.2.1 (Distribuição assintótica duma e.o. central). *Seja $0 < p < 1$ e F absolutamente contínua com $f(F^{-1}(p)) > 0$. Resulta que para $i = [np] + 1$,*

$$\sqrt{n}f(F^{-1}(p)) \frac{(X_{i:n} - F^{-1}(p))}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \longrightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Exemplo 2.2.1 (Modelo Exponencial). *Considere-se o modelo Exponencial padrão.*

Então, para $i = [np] + 1$,

$$\sqrt{n} \left(\frac{X_{i:n} + \ln(1-p)}{\sqrt{p/(1-p)}} \right) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

A distribuição limite de uma e.o. intermédia depende da velocidade de crescimento de $k = k(n)$, e pode ou não ser normal (Falk [16]). O Teorema que a seguir apresentamos, indica as condições que garantem a normalidade assintótica.

Teorema 2.2.2 (Distribuição assintótica duma e.o. intermédia). *Seja F absolutamente contínua, satisfazendo uma das condições de von Mises, presentes no Teorema 2.2.5, e k uma sequência intermédia verificando (2.17). Então existem constantes normalizadoras $a_n > 0$ e b_n , tais que:*

$$\frac{X_{n-k+1:n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} N(0, 1). \quad (2.19)$$

Uma possível escolha para as constantes normalizadoras é: $a_n = \sqrt{k}/[nf(b_n)]$ e $b_n = F^{\leftarrow}(1 - k/n)$.

Exemplo 2.2.2 (Modelo Pareto). *Seja Y uma variável aleatória com distribuição Pareto padrão, isto é, com f.d. $F(y) = 1 - 1/y$, $y > 1$ e $n - k = n - k(n)$ uma sequência intermédia (superior). Como a distribuição verifica as condições de von Mises, está nas condições do teorema anterior. Logo, podemos escolher $a_n = n/(k\sqrt{k})$, $b_n = n/k$ e garantir que*

$$\frac{Y_{n-k+1:n} - b_n}{a_n} = \sqrt{k} \left(\frac{k}{n} Y_{n-k+1:n} - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Dois resultados importantes relativos a este modelo Pareto são:

Proposição 2.2.1. *Seja Y uma variável aleatória com distribuição Pareto padrão e $k = k(n)$ uma sequência intermédia. Verifica-se que*

$$\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, \quad n \longrightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Demonstração.

O resultado é imediato já que $\mathbb{E} \left[\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \right] = 1$ e $V \left[\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \right] = \frac{n-k}{n(k-1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, porque $k = k(n)$ é sucessão intermédia. \square

Proposição 2.2.2. *Nas condições da Proposição anterior, podemos garantir a seguinte representação assintótica, em distribuição:*

$$\left(\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \right)^\alpha \stackrel{d}{=} 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{k}} B_k (1 + o_p(1)) \quad (2.21)$$

onde a $B_k = \sqrt{k} \left(\frac{k}{n} Y_{n-k:n} - 1 \right)$ é uma variável assintoticamente normal padrão.

Demonstração.

A demonstração é quase imediata. Basta utilizar o desenvolvimento

$$f(x) = x^\alpha = f(1) + f'(1)(x-1) + o(x-1), \quad x \longrightarrow 1.$$

A justificação para a normalidade assintótica de B_k encontra-se no Exemplo 2.2.2. \square

2.2.2 Estatísticas Ordinais Extremais

Relativamente às e.o.'s de topo, apenas estudamos o comportamento limite para o máximo, $X_{n:n}$. A f.d. de $X_{n:n}$ é:

$$F_{n:n}(x) = F^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0, & x < F^{\leftarrow}(1) \\ 1, & x \geq F^{\leftarrow}(1) \end{cases}.$$

Isto significa que a distribuição limite de $X_{n:n}$ é degenerada e este resultado acaba por ter pouco interesse. Para eventualmente obtermos uma distribuição limite não degenerada é necessário normalizar convenientemente $X_{n:n}$. Assim, seja $\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}$, o máximo normalizado, onde b_n representa uma mudança na localização e a_n na escala. O próximo teorema indica quais as possíveis distribuições limites não degeneradas para o máximo devidamente normalizado.

Teorema 2.2.3 (Gnedenko [23]). *Diz-se que uma f.d. F pertence ao domínio de atracção para máximos de uma f.d. G (não degenerada) se existirem sucessões reais $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ de constantes normalizadoras (ou constantes de atracção) tais que:*

$$\mathbb{P}((X_{n:n} - b_n)/a_n \leq x) = F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G(x), \quad (2.22)$$

em todos os pontos de continuidade de G e escreve-se $F \in D(G)$. Então G assume uma das três seguintes formas paramétricas:

$$\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad x > 0, \quad \alpha > 0 \quad \text{Fréchet}; \quad (2.23)$$

$$\psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha), \quad x < 0, \quad \alpha > 0 \quad \text{Weibull}; \quad (2.24)$$

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{Gumbel}. \quad (2.25)$$

Os três tipos de f.d. podem ser escritos de forma unificada através da f.d. de valores extremos (distribuição EV, do inglês “Extreme Value”).

$$G(x) \equiv G_\gamma(x) = \begin{cases} \exp[-(1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}], & 1 + \gamma x > 0 & \text{se } \gamma \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}), & x \in \mathbb{R} & \text{se } \gamma = 0 \end{cases}, \quad (2.26)$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de forma da distribuição EV (von Mises [45]). Este parâmetro está directamente relacionado com o peso da cauda do modelo F , ou seja, quanto maior o valor de γ mais pesada é a cauda $1 - F$.

É possível relacionar (2.23) e (2.24) com (2.26), através dos seguintes resultados:

$$G_\gamma(x) = \Phi_{1/\gamma}(1 + \gamma x), \quad \gamma > 0;$$

$$G_\gamma(x) = \Psi_{-1/\gamma}(-1 + \gamma x), \quad \gamma < 0.$$

Os modelos no domínio de atracção de G podem ser classificados em três grupos distintos:

- modelos com cauda pesada ($\gamma > 0$) onde a cauda da distribuição se comporta como uma potência e onde eventualmente alguns momentos não serão finitos.
- modelos de cauda leve ($\gamma = 0$), cujas funções de distribuição apresentam cauda exponencial.

- modelos de cauda curta ($\gamma < 0$) com limite superior do suporte finito.

Observação 2.2.1. *Utilizando a transformação logarítmica, verifica-se que (2.22) é equivalente a*

$$n(1 - F(a_n x + b_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\ln G(x). \quad (2.27)$$

A escolha das sequências de constantes normalizadoras a_n e b_n não é única. Qualquer escolha de constantes normalizadoras $a'_n > 0$ e $b'_n \in \mathbb{R}$ é assintoticamente equivalente se e só se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{a_n} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b'_n - b_n}{a_n} = 0. \quad (2.28)$$

O Teorema seguinte é um dos resultados clássicos em TVE, e constitui a base da respectiva teoria assintótica. Este teorema indica condições necessárias e suficientes para que uma f.d. F pertença ao domínio de atracção para máximos de uma das três distribuições limite não degeneradas. Estas condições são equivalentes às condições iniciais dadas por Gnedenko [23].

Teorema 2.2.4 (Condições necessárias e suficientes).

- $F \in D(\Phi_\alpha)$ se e só se $F^{\leftarrow}(1) = +\infty$ e se existir uma constante $\alpha > 0$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = -\ln(\Phi_\alpha(x)) = x^{-\alpha}, \quad \forall x > 0; \quad (2.29)$$

- $F \in D(\Psi_\alpha)$ se e só se $F^{\leftarrow}(1)$ é finito e se existir uma constante $\alpha > 0$ tal que:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1 - F(F^{\leftarrow}(1) - \tau x)}{1 - F(F^{\leftarrow}(1) - \tau)} = -\ln(\Psi_\alpha(-x)) = x^\alpha, \quad \forall x > 0; \quad (2.30)$$

- $F \in D(\Lambda)$ se e só se $\mathbb{E}[X|X > c]$ é finito para algum $c < F^{\leftarrow}(1)$ e,

$$\lim_{\tau \rightarrow F^{\leftarrow}(1)} \frac{1 - F(\tau + x\mathbb{E}[X - \tau|X > \tau])}{1 - F(\tau)} = -\ln(\Lambda(x)) = e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

Note-se que modelos F pertencentes ao domínio de atracção da distribuição Fréchet (Weibull) têm sempre limite superior do suporte infinito (finito). Relativamente aos modelos no domínio de atracção do modelo Gumbel nada se pode dizer relativamente ao limite superior do suporte (pode ser finito ou infinito).

As condições do teorema anterior nem sempre são fáceis de verificar. No caso de F ser absolutamente contínua pode-se verificar se são válidas para F as condições obtidas por von Mises. Estas condições são mais fáceis de verificar do que as anteriores. Contudo enquanto que as anteriores eram suficientes e necessárias, estas apenas são suficientes.

Teorema 2.2.5 (Condições suficientes de von Mises). *Seja F uma f.d. absolutamente contínua com densidade f .*

- Se $F^{\leftarrow}(1) = +\infty$ e se existir uma constante $\alpha > 0$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tf(t)}{1 - F(t)} = \alpha,$$

então $F \in D(\Phi_\alpha)$.

- Se $F^{\leftarrow}(1) < \infty$ e se existir uma constante $\alpha > 0$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow F^{\leftarrow}(1)} \frac{[F^{\leftarrow}(1) - t]f(t)}{1 - F(t)} = \alpha,$$

então $F \in D(\Psi_\alpha)$.

- Se F'' for negativa no intervalo $]x_0, F^{\leftarrow}(1)[$, com $x_0 < F^{\leftarrow}(1)$ e

$$\lim_{t \rightarrow F^{\leftarrow}(1)} \frac{F''(t)(1 - F(t))}{(F'(t))^2} = -1,$$

então $F \in D(\Lambda)$.

Caso não seja possível garantir a existência de segunda derivada de F , o Teorema que a seguir se apresenta, proposto por de Haan, estabelece uma condição suficiente para o domínio de atracção da Gumbel supondo apenas a existência da primeira derivada.

Teorema 2.2.6 (de Haan [30]). *Seja F absolutamente contínua no intervalo $]x_0, F^{\leftarrow}(1)[$, com $x_0 < F^{\leftarrow}(1)$ e com densidade positiva f . Se se verificar o limite,*

$$\lim_{t \rightarrow F^{\leftarrow}(1)} \frac{f(t) \int_t^{F^{\leftarrow}(1)} (1 - F(t)) dt}{(1 - F(t))^2} = 1.$$

então $F \in D(\Lambda)$.

No caso de F ter segunda derivada em $]x_0, F^{\leftarrow}(1)[$, com $x_0 < F^{\leftarrow}(1)$, as condições do Teorema 2.2.5 podem ser substituídas por:

$$\text{Se } \lim_{t \rightarrow F^{\leftarrow}(1)} \left(\frac{1 - F(t)}{f(t)} \right)' = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{então } F \in D(\Phi_\alpha) \\ -\frac{1}{\alpha} & \text{então } F \in D(\Psi_\alpha) \\ 0 & \text{então } F \in D(\Lambda) \end{cases} . \quad (2.32)$$

Exemplo 2.2.3 (Modelo Normal). *Considere-se o modelo normal padrão com f.d. Φ e função densidade $\varphi = \Phi'$. Para este modelo, as condições suficientes de von Mises verificam-se mais facilmente do que as apresentadas no Teorema 2.2.4. Como existe segunda derivada da f.d., e como $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$ e $1 - \Phi(t) \sim \varphi(t)/t$, $t \rightarrow \infty$, é fácil de verificar que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \Phi(t)}{\varphi(t)} \right)' = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[1 - \Phi(t)]t}{\varphi(t)} - 1 = 0.$$

Portanto, de acordo com o Teorema anterior, a distribuição normal pertence ao domínio de atracção para máximos da distribuição Gumbel.

Teorema 2.2.7 (Constantes de atracção). *Uma possível escolha para as constantes de atracção é:*

- $a_n = F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{n})$ e $b_n = 0$ se $F \in D(\Phi_\alpha)$.
- $a_n = F^{\leftarrow}(1) - F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{n})$ e $b_n = F^{\leftarrow}(1)$ se $F \in D(\Psi_\alpha)$.
- $a_n = \mathbb{E}[X - b_n | X > b_n]$ e $b_n = F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{n})$ se $F \in D(\Lambda)$.

No caso de se verificar (2.32) e $F \in D(\Lambda)$, podemos também escolher $a_n = \frac{1}{nf(b_n)}$, com $b_n = F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{n})$.

2.3 Variação Regular

2.3.1 Funções de Variação Regular

A caracterização do domínio de atracção pode ser feita num contexto de aplicação de funções de variação regular. É assim importante introduzir alguns resultados fundamentais da teoria de Variação Regular.

Definição 2.3.1 (Função de variação regular). *Diz-se que uma função mensurável $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de variação regular (em ∞) de índice $\alpha \in \mathbb{R}$ e representa-se por $f \in RV_\alpha$ se para qualquer $x > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha. \quad (2.33)$$

Se $\alpha = 0$ diz-se que f é de variação lenta.

Uma função de variação regular pode sempre ser decomposta num produto de duas funções, ou seja, se $f \in RV_\alpha$ então $f(x) = x^\alpha L(x)$, onde L é uma função de variação lenta.

Exemplo 2.3.1. *A função constante, e as funções $\ln x$ e $\ln \ln(c + x)$ são exemplos de funções de variação lenta.*

Nos próximos resultados é necessário admitir que a função f , de variação regular de índice α , é localmente integrável (integrável em intervalos limitados).

Teorema 2.3.1 (Teorema de Karamata). *Se $f \in RV_\alpha$, $\alpha \geq -1$ então $\int_0^x f(t)dt \in RV_{\alpha+1}$ e*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)dt} = \alpha + 1;$$

Se $f \in RV_\alpha$, $\alpha < -1$ (ou se $\alpha = -1$ e $\int_x^\infty f(t)dt < \infty$), então $\int_x^\infty f(t)dt \in RV_{\alpha+1}$, e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(t)dt} = -(\alpha + 1).$$

Corolário 2.3.1 (Representação de Karamata). *f é de variação regular de índice $\alpha \in \mathbb{R}$ se e só se existirem funções $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $\epsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tais que:*

$$f(x) = c(x) \exp \left(\int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt \right), \quad \forall x > 1, \quad (2.34)$$

onde $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c \in [0, \infty]$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \epsilon(x) = \alpha$.

Proposição 2.3.1 (Condição de von Mises). *Se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é absolutamente contínua e tem derivada f' perto de ∞ , satisfazendo,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t f'(t)}{f(t)} = \alpha,$$

então $f \in RV_\alpha$.

Proposição 2.3.2 (Derivada). *Se $f \in RV_\alpha$ com $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) então f é assintoticamente equivalente a uma função g estritamente crescente (decrescente) e diferenciável, com derivada $g' \in RV_{\alpha-1}$ ($-g' \in RV_{\alpha-1}$).*

Proposição 2.3.3 (Limite). *Se $f \in RV_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\frac{\ln f(t)}{\ln t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \alpha$. E isto implica que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha < 0 \\ \infty, & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Proposição 2.3.4 (Adição e Composição). *Sejam $f_1 \in RV_{\alpha_1}$ e $f_2 \in RV_{\alpha_2}$. Então $f_1 + f_2 \in RV_{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}}$. Se para além das condições anteriores se verificar $\lim_{t \rightarrow \infty} f_2(t) = \infty$, então $f_1 \circ f_2 \in RV_{\alpha_1 \alpha_2}$.*

Proposição 2.3.5 (Inversa). *Se f é não decrescente, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ é finito, e $f \in RV_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, então $f^\leftarrow \in RV_{1/\alpha}$.*

Proposição 2.3.6 (Inversa assintótica). *Para qualquer função de variação lenta L , existe uma função L^* , também de variação lenta, tal que $L(x)L^*(xL(x)) \rightarrow 1$ e $L^*(x)L(xL^*(x)) \rightarrow 1$, quando $x \rightarrow \infty$. Definindo $h(x) = xL(x)$, vem que $L^*(x) \sim h^\leftarrow(x)/x$, $x \rightarrow \infty$. Se a função L verificar as condições:*

$$\frac{L(x)}{L(xL(x))} \rightarrow 1 \quad e \quad \frac{L\left(\frac{x}{L(x)}\right)}{L(x)} \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty$$

então $L^*(x) = \frac{1}{L(x)}$ e $h^\leftarrow(x) \sim \frac{x}{L(x)}$, $x \rightarrow \infty$.

A teoria das funções de variação regular é suficiente para a caracterização dos domínios de atracção para máximos dos modelos *Fréchet* e *Weibull*. Para também se conseguir caracterizar o domínio de atracção da Gumbel, é necessário introduzir algumas extensões da classe das funções de variação regular, nomeadamente a variação Γ e a variação Π .

Definição 2.3.2 (Variação Γ). *Uma função f não decrescente é de variação Γ , e representa-se por $f \in \Gamma$, se f está definida no intervalo $]y, x_0[$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ e existe uma função positiva b definida em $]y, x_0[$ tal que para qualquer x ,*

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t + xb(t))}{f(t)} = e^x. \quad (2.35)$$

A função auxiliar b é assintoticamente única.

Definição 2.3.3 (Variação Π). *Seja f uma função não negativa e não decrescente definida num intervalo $]x_1, \infty[$. Diz-se que f é de variação Π , e representa-se por $f \in \Pi$, se existir uma função $a(t) > 0$, tal que para qualquer $x > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx) - f(t)}{a(t)} = \ln x. \quad (2.36)$$

A função auxiliar a é assintoticamente única.

Observação 2.3.1. *Considerando $x = e$, em (2.36), podemos escolher como função auxiliar, $a(t) = f(te) - f(t)$.*

Proposição 2.3.7. *Sejam F uma função de distribuição, $F^* = 1/(1-F)$ e $U = (F^*)^{\leftarrow}$ a função quantil definida em (2.10). As seguintes expressões são equivalentes:*

1. $F \in D(\Lambda)$;
2. $F^* \in \Gamma$;
3. $U \in \Pi$.

2.3.2 Caracterização dos domínios de atracção e comportamento de segunda ordem

Utilizando a teoria das funções de variação regular podemos reescrever as condições necessárias e suficiente do Teorema 2.2.4.

Proposição 2.3.8. *Seja F uma f.d. e $U(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)$. Então,*

1. $F \in D(G_\gamma)$, $\gamma > 0$ se e só se $U \in RV_\gamma$.
2. $F \in D(G_\gamma)$, $\gamma < 0$ se e só se $U(\infty) < \infty$ e $U(\infty) - U(t) \in RV_\gamma$.
3. $F \in D(G_0)$ se e só se $U \in \Pi$.

A caracterização de Gnedenko dos domínios de atracção baseia-se em condições assintóticas sobre a cauda $1 - F$. Utilizando a função quantil, definida em (2.10), de Haan obteve uma caracterização unificada dos domínios de atracção.

Teorema 2.3.2 (de Haan [31]). *Uma f.d. $F \in D(G_\gamma)$, onde $\gamma \in \mathbb{R}$ é o índice de valores extremos, se e só se existir uma função positiva a tal que para qualquer $x > 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} = \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}. \quad (2.37)$$

No caso de $\gamma = 0$, substitui-se $\frac{x^\gamma - 1}{\gamma}$ por $\ln x$.

O resultado do teorema anterior é equivalente a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \frac{x^\gamma - 1}{y^\gamma - 1},$$

para $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$. Se $\gamma = 0$ substitui-se $\frac{x^\gamma - 1}{y^\gamma - 1}$ por $\frac{\ln x}{\ln y}$.

Corolário 2.3.2. *Nas condições do teorema anterior,*

- a) *se $\gamma > 0$, então $U(\infty) = \infty$ e $a(t) \sim \gamma U(t)$.*
- b) *se $\gamma < 0$, então $U(\infty) < \infty$ e $a(t) \sim -\gamma(U(\infty) - U(t))$.*
- c) *se $\gamma = 0$, então $U \in RV_0$ se $U(\infty) = \infty$ e $U(\infty) - U(t) \in RV_0$ se $U(\infty) < \infty$.*

Para se conhecer o comportamento assintótico, em distribuição, de estimadores semi-paramétricos do índice de valores extremos, é necessário conhecer o comportamento de segunda ordem da cauda do modelo. Para isso é usual admitir-se a seguinte condição, de segunda ordem, sobre a velocidade de convergência da condição (2.37) (de primeira ordem), isto é, sobre a velocidade de convergência de $\frac{U(tx)-U(t)}{a(t)}$ para $\frac{x^\gamma-1}{\gamma}$. Considere-se a seguinte condição de segunda ordem,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{U(tx)-U(t)}{a(t)} - \frac{x^\gamma-1}{\gamma}}{\mathcal{A}(t)} = H(x, \gamma, \rho), \quad \forall x > 0, \quad \rho \leq 0, \quad (2.38)$$

onde a função $\mathcal{A}(t)$ converge para 0 e H não é múltipla de $\frac{x^\gamma-1}{\gamma}$. Se as funções a e \mathcal{A} forem convenientemente escolhidas então H admite a forma:

$$H(x, \gamma, \rho) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{x^{\gamma+\rho} - 1}{\gamma + \rho} - \frac{x^\gamma - 1}{\gamma} \right), \quad x > 0, \quad \rho \leq 0.$$

Observação 2.3.2. *Se $\rho < 0$, então é muito mais cómodo substituir H , em (2.38), pela função:*

$$H^*(x, \gamma, \rho) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{x^{\gamma+\rho} - 1}{\gamma + \rho} \right), \quad x > 0.$$

Proposição 2.3.9. *Admitindo que $\rho < 0$, $a(t) \sim a_1 t^\gamma$, e $\mathcal{A}(t) \sim \rho(\gamma + \rho)a_2 t^\rho/a_1$, a condição (2.38) é equivalente a:*

$$U(t) = a_0 + a_1 \frac{t^\gamma - 1}{\gamma} + a_2 t^{\gamma+\rho} + o(t^{\gamma+\rho}), \quad a_1 > 0, \quad a_2 \neq 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Muitas vezes preferível trabalhar com uma condição de segunda ordem sobre a função $\ln U$ (em vez da função U). Pode ser consultado mais detalhadamente, em Draisma *et al.* [13], Ferreira [17] ou Ferreira *et al.* [18], que a condição de segunda ordem (2.38) é equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln U(tx) - \ln U(t)}{a_0(t)} - \frac{x^{\gamma_-} - 1}{\gamma_-}}{\mathcal{A}^*(t)} = H(x, \gamma_-, \rho^*), \quad (2.39)$$

onde $\gamma_- = \min(\gamma, 0)$, $\gamma_+ = \max(\gamma, 0)$, $a_0(t) = a(t)/U(t)$, $\mathcal{A}^*(t) \in RV_{\rho^*}$ é tal que:

$$\mathcal{A}^*(t) = \begin{cases} \mathcal{A}(t), & c = 0 \\ \gamma_+ - \frac{a(t)}{U(t)}, & c = \pm\infty \\ \frac{\rho \mathcal{A}(t)}{\gamma + \rho}, & c = \frac{\gamma}{\gamma + \rho} \end{cases}$$

com

$$c = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{a(t)}{U(t)} - \gamma_+}{\mathcal{A}(t)} = \begin{cases} 0, & \gamma < \rho \\ \frac{\gamma}{\gamma + \rho}, & \gamma > -\rho \\ \frac{\gamma}{\gamma + \rho}, & 0 < \gamma < -\rho \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} (U(t) - a(t)/\gamma) = 0 \\ \pm\infty, & \rho < \gamma \leq 0 \\ \pm\infty, & 0 < \gamma < -\rho \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} (U(t) - a(t)/\gamma) \neq 0 \\ \pm\infty, & \gamma = -\rho \end{cases}$$

e

$$\rho^* = \begin{cases} -\gamma, & 0 < \gamma < -\rho \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} (U(t) - a(t)/\gamma) \neq 0 \\ \gamma, & \rho < \gamma \leq 0 \\ \rho, & (0 < \gamma < -\rho \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} (U(t) - a(t)/\gamma) = 0) \text{ ou } \gamma < \rho \text{ ou } \gamma \geq -\rho. \end{cases}$$

2.3.3 Condição de segunda e terceira ordem para modelos de cauda pesada

As condições de segunda ordem até agora apresentadas são complexas, já que caracterizam a cauda de modelos no domínio de atracção para máximos de qualquer uma das três distribuições limite. Se F é um modelo de caudas pesadas, ou seja, se pertence ao domínio de atracção para máximos do modelo Fréchet, é possível substituir a condição de segunda ordem, (2.38), por outra equivalente mas mais simples. Esta nova condição de segunda ordem vai medir a velocidade de convergência de $\frac{1-F(tx)}{1-F(t)}$ para $x^{-1/\gamma}$ ou de $\frac{U(tx)}{U(t)}$ para x^γ , através do parâmetro de segunda ordem, $\rho \leq 0$. Quanto maior for

o valor de $|\rho|$, maior será essa velocidade. A condição de segunda ordem relativa à velocidade de convergência é a seguinte: existe uma função \bar{A} tal que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} - x^{-1/\gamma}}{\bar{A}(t)} = x^{-1/\gamma} \frac{x^{\rho/\gamma} - 1}{\rho/\gamma}, \quad x > 0, \quad (2.40)$$

ou, se preferirmos em termos da inversa de F , existe uma função A tal que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{U(tx)}{U(t)} - x^\gamma}{A(t)} = x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad x > 0. \quad (2.41)$$

A função \bar{A} é de sinal constante, verificando $|\bar{A}| \in RV_{\rho/\gamma}$. Sabe-se ainda que $A(t) \sim \gamma^2 \bar{A}(U(t))$ e $|A| \in RV_\rho$ (Geluk and de Haan [22]). Se $\rho = 0$, então $\frac{x^{\rho/\gamma} - 1}{\rho/\gamma}$ e $\frac{x^\rho - 1}{\rho}$ deverão ser substituídos por $\ln x$. Contudo, neste trabalho será sempre admitido que $\rho < 0$.

No estudo de algumas estatísticas, é por vezes mais útil trabalharmos com uma condição de segunda ordem para a função $\ln U$. Recorrendo ao desenvolvimento assintótico de ordem dois para a função $\ln(1+x)$, verifica-se que (2.41) é assintoticamente equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln U(tx) - \ln U(t) - \gamma \ln x}{A(t)} = \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad x > 0, \quad (2.42)$$

Como neste trabalho será também necessário obter informação relativa ao viés assintótico, de estimadores “assintoticamente centrados” de parâmetros de primeira ordem, necessitamos de uma condição de terceira ordem. Admitiremos que a velocidade de convergência da condição de segunda ordem (2.42) é medida através da função $B(t)$, isto é, admitiremos que a condição de terceira ordem,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln U(tx) - \ln U(t) - \gamma \ln x}{A(t)} - \frac{x^\rho - 1}{\rho}}{B(t)} = \frac{x^{\rho+\rho'} - 1}{\rho + \rho'}, \quad (2.43)$$

é válida para qualquer $x > 0$. A função B é de variação regular de índice $\rho' < 0$.

Observação 2.3.3. *Em muitos modelos de cauda pesada, o parâmetro de terceira ordem ρ' é igual ao parâmetro de segunda ordem ρ .*

Observação 2.3.4. *Um modelo F que verifique uma das condições de variação regular de uma determinada ordem, presentes neste capítulo, verifica também todas a(s) outra(s) de ordem inferior.*

2.4 Validação das Condições de segunda e terceira ordem para modelos existentes na literatura

Para caracterizar o comportamento da cauda, $1 - F$, é por vezes necessário recorrer a algum dos seguintes desenvolvimentos:

$$\ln(1+x) = x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right), \quad x \rightarrow 0; \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0; \quad (2.45)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0; \quad (2.46)$$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \quad (2.47)$$

2.4.1 Modelo Fréchet

Considere-se o modelo Fréchet padrão. Este modelo é caracterizado pelas seguintes expressões para a cauda, $1 - F(x)$, e para a função quantil, $U(t)$,

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= 1 - \exp(-x^{-1/\gamma}), \quad x > 0, \quad \gamma > 0, \\ U(t) &= \left[\ln \left(\frac{t}{t-1} \right) \right]^{-\gamma}, \quad t > 1. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Utilizando (2.44) e (2.45), obtém-se

$$\begin{aligned} \ln \frac{U(tx)}{U(t)} &= \gamma \ln \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{1}{t} \right)}{\ln \left(1 - \frac{1}{tx} \right)} \right] = \gamma \ln \left[x \frac{1 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{3t^2} + o(t^{-2})}{1 + \frac{1}{2tx} + \frac{1}{3(tx)^2} + o(t^{-2})} \right] \\ &= \gamma \ln x + \frac{\gamma}{2t} \left(\frac{x^{-1}-1}{-1} \right) + \frac{5\gamma}{12t^2} \left(\frac{x^{-2}-1}{-2} \right) + o(t^{-2}), \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Este modelo verifica a condição de variação regular de terceira ordem, (2.43), com

$$A(t) = \frac{\gamma}{2t}, \quad B(t) = \frac{5}{6t} \quad \text{e} \quad \rho = \rho' = -1.$$

2.4.2 Modelo Burr

Considere-se o modelo Burr com uma parametrização diferente da que aparece usualmente na literatura. Nesta parametrização os parâmetros do modelo correspondem ao índice de valores extremos, γ , e ao parâmetro de segunda ordem ρ , e são independentes. Tem-se neste caso:

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= \left(1 + x^{-\rho/\gamma}\right)^{1/\rho}, & x > 0, \quad \gamma > 0, \quad \rho < 0, \\ U(t) &= (t^{-\rho} - 1)^{-\gamma/\rho}, & t > 1. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Aplicando a aproximação assintótica (2.44),

$$\begin{aligned} \ln \frac{U(tx)}{U(t)} &= \ln \left[\frac{(tx)^{-\rho} - 1}{t^{-\rho} - 1} \right]^{-\gamma/\rho} = \gamma \ln x + \frac{\gamma}{\rho} [\ln(1 - t^\rho) - \ln(1 - (tx)^\rho)] \\ &= \gamma \ln x + \gamma t^\rho \left(\frac{x^\rho - 1}{\rho} \right) + \gamma t^{2\rho} \left(\frac{x^{2\rho} - 1}{2\rho} \right) + o(t^{2\rho}), \quad t \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

a condição de terceira ordem (2.43) é verificada com $A(t) = \gamma t^\rho$, $B(t) = t^\rho$ e $\rho = \rho'$.

2.4.3 Modelo Log-Logístico

Este modelo caracteriza-se por:

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= \left(1 + \beta x^{1/\gamma}\right)^{-1}, & \beta > 0, \quad \gamma > 0, \\ U(t) &= \left(\frac{t-1}{\beta}\right)^\gamma, & t > 1. \end{aligned} \tag{2.50}$$

O modelo Log-Logístico pode ser obtido a partir do modelo Burr. Se Y tem distribuição Burr com $\rho = -1$, então $X = Y/\beta^\gamma$ tem distribuição Log-Logística. Usando (2.44), prova-se que:

$$\begin{aligned} \ln \frac{U(tx)}{U(t)} &= \gamma \ln x + \gamma \ln \left[\frac{1 - (tx)^{-1}}{1 - t^{-1}} \right] = \\ &= \gamma \ln x + \frac{\gamma}{t} \left(\frac{x^{-1} - 1}{-1} \right) + \frac{\gamma}{t^2} \left(\frac{x^{-2} - 1}{-2} \right) + o(t^{-2}), \quad t \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

e assim, a condição de terceira ordem é válida com $A(t) = \frac{\gamma}{t}$, $B(t) = \frac{1}{t}$ e $\rho = \rho' = -1$.

2.4.4 Modelo GP com $\gamma > 0$

Na distribuição Generalizada de Pareto as expressões de $1 - F(x)$ e da função quantil são as seguintes:

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}, & x > 0, & \quad \gamma > 0, \\ U(t) &= \frac{t^\gamma - 1}{\gamma}, & t > 1. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Tendo em conta que:

$$\begin{aligned} \ln \frac{U(tx)}{U(t)} &= \gamma \ln x + \ln \left[\frac{1 - (tx)^{-\gamma}}{1 - t^{-\gamma}} \right] = \\ &= \gamma \ln x + \frac{\gamma}{t^\gamma} \left(\frac{x^{-\gamma} - 1}{-\gamma} \right) + \frac{\gamma}{t^{2\gamma}} \left(\frac{x^{-2\gamma} - 1}{-2\gamma} \right) + o(t^{-2\gamma}), \quad t \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

conclui-se que $A(t) = \frac{\gamma}{t^\gamma}$, $B(t) = \frac{1}{t^\gamma}$ e $\rho = \rho' = -\gamma$, sendo válida a condição de variação regular de terceira ordem (2.43).

2.4.5 Modelo Cauchy

A distribuição de Cauchy, uma t de Student com $\nu = 1$ graus de liberdade, é simétrica relativamente à origem com caudas mais pesadas que a distribuição normal. Para este modelo a função cauda é

$$1 - F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.52)$$

Usando (2.47), obtém-se,

$$U(t) = \cot \left(\frac{\pi}{t} \right) = \frac{t}{\pi} \left(1 - \frac{\pi^2}{3t^2} - \frac{\pi^4}{45t^4} + o(t^{-4}) \right), \quad t \longrightarrow \infty.$$

Recorrendo à aproximação anterior, para a função quantil,

$$\ln \frac{U(tx)}{U(t)} = \ln x + \frac{2\pi^2}{3t^2} \left(\frac{x^{-2} - 1}{-2} \right) + \frac{14\pi^4}{45t^4} \left(\frac{x^{-4} - 1}{-4} \right) + o(t^{-4}), \quad t \longrightarrow \infty.$$

Também este modelo verifica (2.43) com $\gamma = 1$, $\rho = \rho' = -2$, $A(t) = \frac{2\pi^2}{3t^2}$ e $B(t) = \frac{7\pi^2}{15t^2}$.

2.4.6 Modelo t de Student com ν graus de liberdade

Considere-se uma v.a. com distribuição t de Student, com ν graus de liberdade, com f.d.,

$$F(x) = F(x|\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}} \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{1}{\nu}z^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dz, \quad \nu \in \mathbb{N}. \quad (2.53)$$

Pode-se garantir que $1 - F(x|\nu) = \frac{1}{2}(1 - A(x|\nu))$ (Abramowitz and Stegun [1]) onde $A(x|\nu)$ é a função definida por

$$A(x|\nu) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\theta, & \nu = 1, \\ \frac{2}{\pi} \left[\theta + \sin(\theta) \sum_{i=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{((2i+1)-3)!!}{((2i+1)-2)!!} \cos^{(2i+1)-2}(\theta) \right], & \nu \text{ ímpar} > 1, \\ \sin(\theta) \sum_{i=1}^{\nu/2} \frac{(2i-3)!!}{(2i-2)!!} \cos^{2i-2}(\theta), & \nu \text{ par}, \end{cases}$$

com $\theta = \arctan(x/\sqrt{\nu})$. Na função anterior, “!!” representa o duplo factorial definido por,

$$n!! = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \{-1, 0, 1\}; \\ n(n-2)!!, & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \end{cases}$$

ou seja,

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)(n-6)\dots(4)(2), & n \text{ par}, \\ n(n-2)(n-4)(n-6)\dots(3)(1), & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

É possível relacionar o duplo factorial com o factorial usual através das seguintes expressões,

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.54)$$

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.55)$$

Observação 2.4.1. *Excepto para alguns valores de ν pequenos, não é possível obter analiticamente a inversa de F e respectiva função quantil U . É necessário obter primeiro uma aproximação assintótica para a cauda $1 - F$, para depois se obter a aproximação assintótica para a respectiva função quantil.*

Já se verificou para $\nu = 1$ (modelo Cauchy) que se consegue calcular analiticamente a função quantil. Também para $\nu = 2$ e $\nu = 4$ é possível obter analiticamente as seguintes funções quantil,

$$U_{t_2}(t) = (2I_{[2,+\infty]}(t) - 1) \sqrt{\frac{(t-2)^2}{2(t-1)}}, \quad t > 1,$$

e

$$U_{t_4}(t) = 2(2I_{[2,+\infty]}(t) - 1) \sqrt{\frac{t}{2\sqrt{t-1}} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 1}, \quad t > 1,$$

onde $\alpha = \arctan\left(\sqrt{\frac{t^2}{4(t-1)} - 1}\right)$.

2.4.6.1 Aproximação assintótica para a cauda $1 - F$

Começa-se em seguida por apresentar alguns resultados que permitem obter a aproximação para a cauda, $1 - F$, quando ν é arbitrário.

Observação 2.4.2. Como $\theta = \arctan(x/\sqrt{\nu})$, verifica-se para qualquer $x > 0$,

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \sqrt{t}(1+t)^{-1/2}, \\ \cos(\theta) &= (1+t)^{-1/2}, \quad \text{com } t = \left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right)^2. \end{aligned}$$

Assim, excluindo o caso $\nu = 1$ (modelo Cauchy), a aproximação assintótica para $A(x|\nu)$, com $x > 0$, será obtida a partir do desenvolvimento,

$$\frac{(j-3)!!}{(j-2)!!} \sin(\theta) \cos^{j-2}(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(j-3+2k)!!}{2^k(j-2)!!k!} t^{-\frac{j}{2}+1-k}, \quad j \geq 2 \quad t = \left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right)^2.$$

Como as propriedades da função duplo factorial variam consoante o argumento é par ou ímpar, para obter a aproximação assintótica para $A(x|\nu)$ e $1 - F(x|\nu)$ é necessário considerar estes casos separadamente.

Considere-se ν par. Neste caso,

$$A(x|\nu) = \sum_{i=1}^{\frac{\nu}{2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2i-3+2k)!!}{2^k(2i-2)!!k!} \left(\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(i-1+k)} \right] = \sum_{i=1}^{\frac{\nu}{2}} \sum_{k=i-1}^{\infty} a_{i,k} \left(\frac{x^2}{\nu}\right)^{-k},$$

onde

$$a_{i,k} = (-1)^{k-(i-1)} \frac{(2k-1)!!}{2^{k-(i-1)}(2i-2)!!(k-(i-1))!} I_{\{k \geq i-1, i \geq 1\}}.$$

A Tabela 2.2 contém $a_{i,k}$ com $i \leq 6$ e $k \leq 6$.

Tabela 2.2: Coeficientes $a_{i,k}$ com $i \leq 6$ e $k \leq 6$.

i	k						
	0	1	2	3	4	5	6
1	1	$-\frac{1!!}{2^1 1!}$	$\frac{3!!}{2^2 2!}$	$-\frac{5!!}{2^3 3!}$	$\frac{7!!}{2^4 4!}$	$-\frac{9!!}{2^5 5!}$	$\frac{11!!}{2^6 6!}$
2		$\frac{1!!}{2^0 2!! 0!}$	$-\frac{3!!}{2^1 2!! 1!}$	$\frac{5!!}{2^2 2!! 2!}$	$-\frac{7!!}{2^3 2!! 3!}$	$\frac{9!!}{2^4 2!! 4!}$	$-\frac{11!!}{2^5 2!! 5!}$
3			$\frac{3!!}{2^0 4!! 0!}$	$-\frac{5!!}{2^1 4!! 1!}$	$\frac{7!!}{2^2 4!! 2!}$	$-\frac{9!!}{2^3 4!! 3!}$	$\frac{11!!}{2^4 4!! 4!}$
4				$\frac{5!!}{2^0 6!! 0!}$	$-\frac{7!!}{2^1 6!! 1!}$	$\frac{9!!}{2^2 6!! 2!}$	$-\frac{11!!}{2^3 6!! 3!}$
5					$\frac{7!!}{2^0 8!! 0!}$	$-\frac{9!!}{2^1 8!! 1!}$	$\frac{11!!}{2^2 8!! 2!}$
6						$\frac{9!!}{2^0 10!! 0!}$	$-\frac{11!!}{2^1 10!! 1!}$

É assim possível escrever,

$$1 - F(x|\nu) = \frac{1}{2}(1 - A(x|\nu)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\frac{\nu}{2}} a_{i,k} \right) \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-k}. \quad (2.56)$$

Para ν par, o coeficiente de ordem $-2k$ do desenvolvimento em série de Taylor de $1 - F(x|\nu)$ corresponde a $\frac{\nu^k}{2} \sum_{i=1}^{\frac{\nu}{2}} a_{i,k}$. Contudo, alguns dos primeiros coeficientes do desenvolvimento de $1 - F$ são nulos. O resultado da próxima Proposição é bastante útil porque indica quais os coeficientes nulos e permite simplificar (2.56).

Proposição 2.4.1. *A soma de todos os coeficientes $a_{i,k}$, com $k > 1$ fixo, é igual a zero, isto é,*

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_{i,k} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(2k-1)!!}{2^j (2k-2j)!! j!} = 0, \quad k \geq 1.$$

Demonstração.

O resultado é imediato se se usar (2.54) e o binómio de Newton:

$$\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j (2k-1)!!}{2^j (2k-2j)!! j!} = \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)! j!} (-1)^j (1)^{k-j} = 0.$$

□

Pode-se assim garantir que $\sum_{i=1}^{\frac{\nu}{2}} a_{i,k} = 0$, com $k < \nu/2$. Resulta que a aproximação para $1 - F$ com ν par, (2.56), é,

$$\begin{aligned} 1 - F(x|\nu) &= \frac{1}{2} \sum_{k=\frac{\nu}{2}}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\frac{\nu}{2}} a_{i,k} \right) \left(\frac{\nu}{x^2} \right)^k = \frac{(\nu-1)!!}{2\nu!!} \left(\frac{\nu}{x^2} \right)^{\frac{\nu}{2}} - \frac{\nu(\nu+1)!!}{2^2(\nu+2)!!} \left(\frac{\nu}{x^2} \right)^{\frac{\nu+2}{2}} \\ &\quad + \frac{\nu(\nu+2)(\nu+3)!!}{2^4(\nu+4)!!} \left(\frac{\nu}{x^2} \right)^{\frac{\nu+4}{2}} + O\left(x^{-(\nu+6)}\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.57)$$

De modo análogo pode-se escrever, para ν ímpar,

$$A(x|\nu) = \frac{2}{\pi} \left[\theta + \sum_{i=2}^{\frac{\nu+1}{2}} \frac{((2i-1)-3)!!}{((2i-1)-2)!!} \sin(\theta) \cos^{(2i-1)-2}(\theta) \right], \quad \nu \geq 3.$$

Como $\theta = \arctan(x/\sqrt{\nu}) = \pi/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-(k-1/2)}$, temos agora,

$$\begin{aligned} A(x|\nu) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-k+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^{\frac{\nu+1}{2}} \left[\sum_{k=i-1}^{\infty} \frac{(-1/2)^{k-(i-1)} (2k-2)!!}{(2i-3)!! (k-(i-1))!} \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-k+\frac{1}{2}} \right] I_{\{\nu \geq 3\}} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[b_{1,0} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{1,k} \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-(k-1/2)} + \sum_{i=2}^{\frac{\nu+1}{2}} \sum_{k=i-1}^{\infty} b_{i,k} \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-(k-1/2)} \right], \quad \nu \geq 1, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} b_{1,k} &= \frac{\pi}{2} I_{\{k=0\}} + \frac{(-1)^k}{2k-1} I_{\{k>0\}}, \\ b_{i,k} &= (-1)^{k-(i-1)} \frac{(2k-2)!!}{2^{k-(i-1)} (2i-3)!! (k-(i-1))!} I_{\{k \geq i-1, i>1\}}. \end{aligned}$$

A aproximação assintótica para a cauda do modelo, com ν ímpar, é,

$$1 - F(x|\nu) = \frac{1 - A(x|\nu)}{2} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\frac{\nu+1}{2}} b_{i,k} \right) \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-(k-1/2)}. \quad (2.58)$$

A Tabela 2.3 ilustra $b_{i,k}$ com $i \leq 5$ e $k \leq 6$. Estes coeficientes verificam uma propriedade que permite simplificar (2.58) e será apresentada na Proposição 2.4.2.

Tabela 2.3: Coeficientes $b_{i,k}$ com $i \leq 5$ e $k \leq 6$.

i	k						
	0	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{\pi}{2}$	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$
2		1	$-\frac{2!!}{2^1 1!! 1!}$	$\frac{4!!}{2^2 1!! 2!}$	$-\frac{6!!}{2^3 1!! 3!}$	$\frac{8!!}{2^4 1!! 4!}$	$-\frac{10!!}{2^5 1!! 5!}$
3			$\frac{2!!}{2^0 3!! 0!}$	$-\frac{4!!}{2^1 3!! 1!}$	$\frac{6!!}{2^2 3!! 2!}$	$-\frac{8!!}{2^3 3!! 3!}$	$\frac{10!!}{2^4 3!! 4!}$
4				$\frac{4!!}{2^0 5!! 0!}$	$-\frac{6!!}{2^1 5!! 1!}$	$\frac{8!!}{2^2 5!! 2!}$	$-\frac{8!!}{2^3 5!! 3!}$
5					$\frac{6!!}{2^0 7!! 0!}$	$-\frac{8!!}{2^1 7!! 1!}$	$-\frac{8!!}{2^2 7!! 2!}$

Proposição 2.4.2. Para $k \geq 1$ verifica-se que $\sum_{i=1}^{k+1} b_{i,k} = 0$, ou seja,

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{(2n)!!}{2^{n-i} (2i+1)!! (n-i)!} = (-1)^n \frac{1}{2n+1}, \quad n = k-1 \geq 0.$$

Demonstração.

Usando (2.54) e (2.55), resulta

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{(2n)!!}{2^{n-i} (2i+1)!! (n-i)!} = (-1)^n \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i+1} 2^{2i} \binom{n}{i} \binom{2i}{i}^{-1}.$$

Utilizando o resultado presente em Prudnikov *et al.* [42], pág. 634,

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i+1} 2^{2i} \binom{n}{i} \binom{a+i}{i} \binom{2i}{i}^{-1} = \frac{2^{2n}}{2n+1} \frac{\Gamma(n+a+1/2)}{n! \Gamma(1/2-a)} \binom{2n}{n}^{-1},$$

com $a = 0$, e a simplificação $\Gamma(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n}$, a Proposição fica demonstrada. \square

A Proposição anterior indica que alguns dos primeiros coeficientes do desenvolvimento da cauda poderão ser nulos. Obtém-se assim a seguinte expressão para a cauda,

$$\begin{aligned}
 1 - F(x|\nu) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=\frac{\nu+1}{2}}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\frac{\nu+1}{2}} b_{i,k} \right) \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-(k-\frac{1}{2})} \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{(\nu-1)!!}{\nu!!} \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-\frac{\nu}{2}} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\nu(\nu+1)!!}{2(\nu+2)!!} \right) \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\nu(\nu+2)(\nu+3)!!}{2^3(\nu+4)!!} \right) \left(\frac{x^2}{\nu} \right)^{-\frac{\nu+4}{2}} + O\left(x^{-(\nu+6)}\right), \quad x \longrightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Os resultados (2.57) e (2.59) relativos aos desenvolvimentos assintóticos de $1 - F$, com ν par e ν ímpar, respectivamente, permitem escrever de forma unificada a função cauda,

$$1 - F(x|\nu) = C_\nu x^{-\nu} (1 + D_{\nu,1} x^{-2} + D_{\nu,2} x^{-4} + o(x^{-4})), \quad x \longrightarrow \infty, \tag{2.60}$$

com

$$\begin{aligned}
 C_\nu &= \frac{(\nu-1)!! \nu^{\nu/2}}{\nu!! \tau}, \\
 D_{\nu,i} &= (-1)^i \frac{(\nu+2i-1)! \nu!! \nu^i}{2^{2i-1} (\nu-1)! (\nu+2i)!!}, \quad i = 1, 2,
 \end{aligned}$$

onde $\tau = \pi$ se ν é ímpar ou $\tau = 2$ se ν é par. Estes coeficiente estão calculados na Tabela 2.4 para $\nu \leq 8$.

Tabela 2.4: Coeficientes C_ν , e $D_{\nu,\bullet}$ para $\nu \leq 8$.

ν	1	2	3	4	5	6	7	8
C_ν	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$	3	$\frac{40\sqrt{5}}{3\pi}$	$\frac{135}{4}$	$\frac{784\sqrt{7}}{5\pi}$	560
$D_{\nu,1}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{18}{5}$	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{75}{7}$	$-\frac{63}{4}$	$-\frac{196}{9}$	$-\frac{144}{5}$
$D_{\nu,2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{81}{7}$	35	$\frac{250}{3}$	$\frac{1701}{10}$	$\frac{3430}{11}$	528

2.4.6.2 Aproximação para a função quantil

A função quantil pode agora ser obtida a partir da aproximação assintótica da cauda, (2.60).

Proposição 2.4.3. *A função quantil, $U(t)$, do modelo t de Student com ν graus de liberdade é,*

$$U(t) = (C_\nu t)^{1/\nu} \left[1 + D_{\nu,1} (C_\nu t)^{-\frac{2}{\nu}} + \bar{D}_{\nu,2} (C_\nu t)^{-\frac{4}{\nu}} (1 + o(1)) \right]^{1/\nu}, \quad t \longrightarrow \infty,$$

com $\bar{D}_{\nu,2} = D_{\nu,2} - \frac{2}{\nu} D_{\nu,1}^2 = D_{\nu,2} \left(1 - \frac{2^2(\nu+1)(\nu+4)}{(\nu+3)(\nu+2)^2} \right)$.

O resultado desta Proposição é um caso particular do resultado indicado na Proposição 2.4.4, e por isso, não é feita a sua demonstração.

Utilizando a Proposição 2.4.3, é possível obter o desenvolvimento

$$\begin{aligned} \ln \frac{U(tx)}{U(t)} &= \frac{1}{\nu} \ln x - \frac{2}{\nu^2} D_{\nu,1} (C_\nu t)^{-\frac{2}{\nu}} \left(\frac{x^{-\frac{2}{\nu}} - 1}{-2/\nu} \right) \\ &\quad - \frac{2}{\nu^2} (2\bar{D}_{\nu,2} - D_{\nu,1}^2) (C_\nu t)^{-\frac{4}{\nu}} \left(\frac{x^{-\frac{4}{\nu}} - 1}{-4/\nu} \right) + o(t^{-\frac{4}{\nu}}). \end{aligned}$$

A condição de variação regular de terceira ordem é válida com $\gamma = 1/\nu$, $\rho = -2/\nu$, $A(t) = -\frac{2}{\nu^2} D_{\nu,1} (C_\nu t)^{-2/\nu}$ e $B(t) = \left(\frac{2\bar{D}_{\nu,2}}{D_{\nu,1}} - D_{\nu,1}^2 \right) (C_\nu t)^{-2/\nu}$.

Observação 2.4.3. *É possível escrever $A(t) = \gamma \beta t^\rho$ onde β é um parâmetro de “escala” de segunda ordem. Na Tabela 2.5 ilustramos, para $\nu \leq 8$, o valor deste parâmetro.*

Tabela 2.5: Parâmetro de “escala” de segunda ordem do modelo t de Student com $\nu \leq 8$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
β	$\frac{2\pi^2}{3}$	3	$\frac{2}{5} 2^{1/3} (3\pi)^{2/3}$	$\frac{10}{3\sqrt{3}}$	$\frac{3(15\pi)^{2/5}}{7(2)^{1/5}}$	$\frac{7}{2(10)^{1/3}}$	$\frac{2}{9} 2^{6/7} (35\pi)^{2/7}$	$\frac{18}{5(35)^{1/4}}$

2.4.7 GEV, $\gamma > 0$

Como $(1 + \gamma x) = \left(\frac{x+1/\gamma}{1/\gamma} \right)$, este modelo corresponde ao modelo Fréchet com parâmetros de localização e de escala igual a $1/\gamma$, $\gamma > 0$, isto é, com f.d. e quantil dadas por:

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= 1 - \exp \left(- \left(\frac{x+1/\gamma}{1/\gamma} \right)^{-1/\gamma} \right), \quad 1 + \gamma x > 0, \\ U(t) &= \frac{\left[\ln \left(\frac{t}{t-1} \right) \right]^{-\gamma} - 1}{\gamma}, \quad t > 1. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Como

$$U(t) = \frac{t^\gamma}{\gamma} \left[1 - \frac{\gamma}{2} t^{-1} + \gamma \left(\frac{3\gamma - 5}{24} \right) t^{-2} - t^{-\gamma} + o(t^{-2}) \right], \quad t \longrightarrow \infty,$$

resulta que

$$\begin{aligned} \ln \frac{U(tx)}{U(t)} &= \gamma \ln x + \frac{\gamma}{2t} \left(\frac{x^{-1}-1}{-1} \right) + \frac{5\gamma}{12t^2} \left(\frac{x^{-2}-1}{-2} \right) + \frac{\gamma}{t^\gamma} \left(\frac{x^{-\gamma}-1}{-\gamma} \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{t^{2\gamma}} \left(\frac{x^{-2\gamma}-1}{-2\gamma} \right) + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2t^{\gamma+1}} \left(\frac{x^{-(\gamma+1)}-1}{-(\gamma+1)} \right) + o(t^{-2c}), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

onde $c = \min(1, \gamma)$. Conclui-se que este modelo verifica a condição de variação regular de terceira ordem para modelos de cauda pesada (2.43). Na Tabela 2.6 são dadas, para os vários valores de γ , as constantes e funções da condição de terceira ordem.

Tabela 2.6: Parâmetros de segunda e terceira ordem e funções $A(t)$ e $B(t)$ do modelo GEV, para os vários valores do índice de valores extremos γ .

γ	$]0, \frac{1}{2}[$	$\frac{1}{2}$	$]\frac{1}{2}, 1[$	1	$]1, 2[$	2	$]2, +\infty[$
ρ	$-\gamma$	$-\gamma$	$-\gamma$	-1	-1	-1	-1
ρ'	$-\gamma$	$-\gamma$	$\gamma - 1$	-1	$1 - \gamma$	-1	-1
$A(t)$	$\frac{\gamma}{t^\gamma}$	$\frac{\gamma}{t^\gamma}$	$\frac{\gamma}{t^\gamma}$	$\frac{3}{2t}$	$\frac{\gamma}{2t}$	$\frac{\gamma}{2t}$	$\frac{\gamma}{2t}$
$B(t)$	$\frac{1}{t^\gamma}$	$\frac{3}{2t^\gamma}$	$\frac{1}{2t^{1-\gamma}}$	$\frac{29}{18t}$	$\frac{2}{t^{\gamma-1}}$	$\frac{17}{12t}$	$\frac{5}{6t}$

2.4.8 Classe de Hall

Considere-se a classe de modelos análoga à introduzida em Hall [33] e depois utilizada em Hall and Welsh [34] com a restrição $D \neq 0$, isto é, a classe de modelos de ordem três, cuja cauda verifica,

$$1 - F(x) = Cx^{-1/\gamma}(1 + Dx^{\rho/\gamma} + Ex^{2\rho/\gamma} + o(x^{2\rho/\gamma})), \quad x \longrightarrow \infty, \quad (2.62)$$

onde $\gamma > 0$, $\rho < 0$, $C > 0$, $D \neq 0$ e $E \neq 0$. A próxima Proposição permite obter uma aproximação para a inversa assintótica de $\frac{1}{1-F}$.

Proposição 2.4.4. *A função quantil, $U(t) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^\leftarrow$, associada a este modelo é:*

$$U(t) = (Ct)^\gamma [1 + D(Ct)^\rho + \bar{E}(Ct)^{2\rho} + o(t^{2\rho})]^\gamma, \quad t \longrightarrow \infty. \quad (2.63)$$

onde $\bar{E} = E + \rho D^2$.

Demonstração.

A função quantil obtém-se recorrendo à técnica de inversão de séries de Taylor (Abramowitz and Stegun [1]). Dada uma série de Taylor com termo constante nulo ($a_0 = 0$),

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \quad (2.64)$$

a série de Taylor da função inversa é dada por

$$x = A_1y + A_2y^2 + A_3y^3 + \dots \quad (2.65)$$

O cálculo dos coeficientes A_i é bastante simples. Basta substituir x em (2.64) por (2.65), obtendo-se

$$y = a_1A_1y + (a_1A_2 + a_2A_1^2)y^2 + (a_1A_3 + 2a_2A_1A_2 + a_3A_1^3)y^3 + \dots$$

Resolvendo a equação é possível calcular os coeficientes A_i . Os três primeiros coeficientes são,

$$A_1 = a_1^{-1}, \quad A_2 = -a_1^{-3}a_2, \quad A_3 = a_1^{-5}(2a_2^2 - a_1a_3).$$

Para obter a inversa assintótica de $\frac{1}{1-F}$ basta resolver em ordem a x , a equação,

$$t = \frac{1}{1-F(x)} = C^{-1}x^{1/\gamma}(1 + Dx^{\rho/\gamma} + Ex^{2\rho/\gamma} + o(x^{2\rho/\gamma}))^{-1},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \bar{x}(1 + D\bar{x} + E\bar{x}^2 + o(\bar{x}^2))^{-\rho} \\ &= \bar{x} - \rho D\bar{x}^2 - \rho \left[E - \frac{\rho+1}{2}D^2 \right] \bar{x}^3 + o(\bar{x}^3), \end{aligned}$$

com $\bar{t} = (Ct)^\rho$ e $\bar{x} = x^{\rho/\gamma}$.

Utilizando a técnica de inversão de séries de Taylor, com $a_1 = 1$, $a_2 = -\rho D$ e $a_3 = -\rho \left[E - \frac{\rho+1}{2} D^2 \right]$, conclui-se que

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{t} \left[1 + \rho D \bar{t} - \rho \left(E + \frac{\rho+1}{2} D^2 \right) \bar{t}^2 + o(\bar{t}^2) \right] \Leftrightarrow \\ x^{1/\gamma} &= (Ct) \left[1 + \rho D \bar{t} + \rho \left(E - \frac{\rho+1}{2} D^2 \right) \bar{t}^2 + o(\bar{t}^2) \right]^{1/\rho}. \end{aligned}$$

Resulta assim,

$$U(t) = (Ct)^\gamma [1 + D(Ct)^\rho + (E + \rho D^2)(Ct)^{2\rho} + o(t^{2\rho})]^\gamma, \quad t \longrightarrow \infty,$$

tal como se queria demonstrar. \square

Observação 2.4.4. *Pode-se também apresentar a função quantil na forma*

$$U(t) = (Ct)^\gamma [1 + \gamma D(Ct)^\rho + \gamma \bar{\bar{E}}(Ct)^{2\rho} + o(t^{2\rho})], \quad t \longrightarrow \infty, \quad (2.66)$$

onde $\bar{\bar{E}} = (\bar{E} + \frac{\gamma-1}{2} D^2) = (E + \frac{2\rho+\gamma-1}{2} D^2)$.

Recorrendo aos resultados (2.44) e (2.45), obtemos

$$\begin{aligned} \ln \frac{U(tx)}{U(t)} &= \gamma \ln x + \gamma \ln \left[\frac{1 + D(Ctx)^\rho + \bar{\bar{E}}(Ctx)^{2\rho} + o(t^{2\rho})}{1 + D(Ct)^\rho + \bar{\bar{E}}(Ct)^{2\rho} + o(t^{2\rho})} \right] = \\ &= \gamma \ln x + \gamma \rho D(Ct)^\rho \left(\frac{x^\rho - 1}{\rho} \right) + \gamma \rho (2\bar{\bar{E}} - D^2)(Ct)^{2\rho} \left(\frac{x^{2\rho} - 1}{2\rho} \right) + o(t^{2\rho}), \end{aligned}$$

quando $t \longrightarrow \infty$. A cauda deste modelo também verifica a condição de variação regular de terceira ordem (2.43) com $\rho' = \rho$, $A(t) = \gamma \rho D(Ct)^\rho$ e $B(t) = (2\bar{\bar{E}}/D - D)(Ct)^\rho$.

Na Tabela 2.7 são dados os parâmetros, e respectivas funções, da condição de terceira ordem, que relacionam os modelos anteriores com a classe de modelos de Hall.

Tabela 2.7: Relação assintótica entre alguns modelos de cauda pesada e a classe de Hall

Modelo	γ	ρ	C	D	E	\bar{E}	$A(t)$	$B(t)$
Fréchet	γ	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{\gamma}{2t}$	$\frac{5}{6t}$
Burr	γ	ρ	1	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{1-\rho}{2\rho^2}$	$\frac{1+\rho}{2\rho^2}$	γt^ρ	t^ρ
Log Logt.	γ	-1	$\frac{1}{\beta}$	$-\frac{1}{\beta}$	$\frac{1}{\beta^2}$	0	$\frac{\gamma}{t}$	$\frac{1}{t}$
GP, $\gamma > 0$	γ	$-\gamma$	$\gamma^{-1/\gamma}$	$-\frac{1}{\gamma^2}$	$\frac{1+\gamma}{2\gamma^4}$	$\frac{1-\gamma}{2\gamma^4}$	$\frac{\gamma}{t^\gamma}$	$\frac{1}{t^\gamma}$
Cauchy	1	-2	$\frac{1}{\pi}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{45}$	$\frac{2\pi^2}{3t^2}$	$\frac{7\pi^2}{15t^2}$
GEV	$0 < \gamma < \frac{1}{2}$	$-\gamma$	$\gamma^{-1/\gamma}$	$-\frac{1}{\gamma^2}$	$\frac{1+\gamma}{2\gamma^4}$	$\frac{1-\gamma}{2\gamma^4}$	$\frac{\gamma}{t^\gamma}$	$\frac{1}{t^\gamma}$
GEV	$\gamma = \frac{1}{2}$	$-\gamma$	$\gamma^{-1/\gamma} = 4$	-4	10	2	$\frac{1}{2t^{1/2}}$	$\frac{3}{2t^{1/2}}$
GEV	$\gamma = 1$	-1	$\gamma^{-1/\gamma} = 1$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{13}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3}{2t}$	$\frac{29}{18t}$
GEV	$\gamma = 2$	-1	$\gamma^{-1/\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{1}{t}$	$\frac{17}{6t}$
GEV	$\gamma > 2$	-1	$\gamma^{-1/\gamma}$	$-\frac{\gamma^{-1/\gamma}}{2}$	$\frac{5\gamma^{-2/\gamma}}{12}$	$\frac{\gamma^{-2/\gamma}}{6}$	$\frac{\gamma}{2t}$	$\frac{5}{6t}$
t -student ^a	$\frac{1}{\nu}$	$-\frac{2}{\nu}$	$\frac{(\nu-1)!!\nu^{\nu/2}}{\nu!!\tau}$	$-\frac{(\nu+1)\nu^2}{2(\nu+2)}$	$\frac{(\nu+1)(\nu+3)\nu^3}{2^3(\nu+4)}$	$\frac{\nu^3}{2} \left(\frac{(\nu+1)(\nu+3)}{2^2(\nu+4)} - \frac{(\nu+1)^2}{(\nu+2)^2} \right)$	$\frac{\nu+1}{\nu(\nu+4)} \left(\frac{(\nu-1)!!t}{\nu!!\tau} \right)^{-\frac{2}{\nu}}$	b

^a $\tau = \pi$ se ν é ímpar ou $\tau = 2$ se ν é par.

^b Expressão muito complexa.

Capítulo 3

Alguns resultados usados na estimação semi-paramétrica de parâmetros de acontecimentos raros

Neste Capítulo apresentamos alguns estimadores de parâmetros de variação regular de primeira e segunda ordem, existentes na literatura. Começamos por introduzir na secção 3.1 algumas estatísticas utilizadas em estimadores de parâmetros de variação regular. Finalmente nas secções 3.2 e 3.3 apresentamos propriedades assintóticas de estimadores de parâmetros de variação regular, sob a condição de terceira ordem (2.43).

3.1 Propriedades de estimadores existentes na literatura sob condições de variação regular de terceira ordem

Começamos por introduzir algumas estatísticas importantes que dependem dos excessos das log-observações,

$$V_{ik} := \ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n}, \quad 1 \leq i \leq k < n, \quad (3.1)$$

e dos espaçamentos das log-observações devidamente escalados,

$$U_i := i(\ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-i:n}), \quad 1 \leq i \leq k < n. \quad (3.2)$$

Considere-se sempre $k = k(n)$ uma sequência intermédia, isto é, uma sequência de valores inteiros verificando (2.17), e as seguintes estatísticas,

$$M_n^{(\alpha)}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \right)^\alpha = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_{ik}^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (3.3)$$

e

$$N_n^{(\alpha)}(k) := \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^\alpha \ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-i:n}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{\alpha-1} U_i, \quad \alpha \geq 1, \quad (3.4)$$

que generalizam o clássico estimador de Hill,

$$\gamma_n^H(k) \equiv H(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n}, \quad (3.5)$$

já que $H(k) = M_n^{(1)}(k) = N_n^{(1)}(k)$.

No que se segue considere-se a seguinte notação:

Seja E uma variável aleatória com distribuição exponencial com valor médio igual a 1 (padrão), e $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$, $t > 0$, a função Gama completa. Então, seja $\alpha \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$ e,

$$\mu_\alpha^{(j)}(\rho) := \mathbb{E} \left[E^{\alpha-j+1} \left(\frac{e^{\rho E} - 1}{\rho} \right)^{j-1} \right], \quad (3.6)$$

$$\sigma_\alpha^{(j)}(\rho) := \sqrt{\text{Var} \left[E^{\alpha-j+1} \left(\frac{e^{\rho E} - 1}{\rho} \right)^{j-1} \right]}, \quad (3.7)$$

$$\bar{\mu}_\alpha^{(j)}(\rho) := \frac{\mu_\alpha^{(j)}(\rho)}{\mu_\alpha^{(1)}(\rho)}, \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_\alpha^{(j)}(\rho) := \frac{\sigma_\alpha^{(j)}(\rho)}{\mu_\alpha^{(1)}(\rho)}. \quad (3.8)$$

Observação 3.1.1. *Podemos verificar os seguintes resultados,*

$$\mu_\alpha^{(1)} := \mu_\alpha^{(1)}(\rho) = \mathbb{E}[E^\alpha] = \Gamma(\alpha + 1), \quad (3.9)$$

$$\sigma_\alpha^{(1)} := \sigma_\alpha^{(1)}(\rho) = \sqrt{\text{Var}[E^\alpha]} = \sqrt{\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)} \quad (3.10)$$

$$\mu_\alpha^{(2)}(\rho) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho} \left(\frac{1 - (1 - \rho)^\alpha}{(1 - \rho)^\alpha} \right),$$

$$\sigma_\alpha^{(2)}(\rho) = \sqrt{\mu_{2\alpha}^{(3)}(\rho) - \left(\mu_\alpha^{(2)}(\rho)\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \mu_\alpha^{(3)}(\rho) &= 2 \left\{ \mu_{\alpha-1}^{(2)}(2\rho) - \mu_{\alpha-1}^{(2)}(\rho) \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \ln \frac{(1-\rho)^2}{1-2\rho}, & \alpha = 1 \\ \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho^2(\alpha-1)} \left\{ \frac{1}{(1-2\rho)^{\alpha-1}} - \frac{2}{(1-\rho)^{\alpha-1}} + 1 \right\}, & \alpha \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quando consideramos apenas a condição de variação regular de segunda ordem, a representação em distribuição de estimadores semi-paramétricos apresenta apenas um termo de viés de ordem $A(n/k)$ (caso exista e seja não nulo). Quando consideramos estimadores com termo dominante de viés nulo (assintoticamente centrados) e os estudamos sob condições de terceira ordem, podemos ter dificuldade em determinar qual dos termos de viés de ordem inferior a $A(n/k)$ é o mais importante. A próxima Observação explica mais detalhadamente este problema.

Observação 3.1.2 (Alguns comentários acerca das funções auxiliares presentes na condição de variação regular de terceira ordem). *Para conhecer, sob condições de terceira ordem, a representação assintótica (em distribuição) das estatísticas utilizadas neste trabalho, é necessário conhecer o comportamento assintótico de $A(Y_{n-k:n})$ e $B(Y_{n-k:n})$, onde $Y_{n-k:n}$ representa a $(n-k)$ -ésima e.o. (ascendente) proveniente de uma amostra de n v.a.'s i.i.d. com distribuição Pareto padrão. Como $|A| \in RV_\rho$, $\rho < 0$, podemos de acordo com a teoria das funções de variação regular, escrever $A(t) = t^\rho L_A(t)$, onde L_A é uma função de variação lenta. Assim, como $\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$,*

$$A(Y_{n-k:n}) = (Y_{n-k:n})^\rho L(Y_{n-k:n}) = (n/k)^\rho L(n/k) \left(\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \right)^\rho \frac{L\left(\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \times n/k\right)}{L(n/k)}.$$

De acordo com as Proposições 2.2.1 e 2.2.2 podemos garantir que $\frac{k}{n}Y_{n-k:n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ e $\left(\frac{k}{n}Y_{n-k:n}\right)^\alpha = 1 + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Por outro lado, como L_A é de variação lenta e verifica para qualquer $x > 0$, $L(tx)/L(t) \rightarrow x^0 = 1$, quando $t \rightarrow \infty$, resulta que,

$$A(Y_{n-k:n}) \stackrel{d}{=} A(n/k)(1 + O_p(1/\sqrt{k}))(1 + o_p(1)) = A(n/k)(1 + o_p(1))$$

Da mesma forma, como $B \in RV_{\rho'}$, também temos que $B(Y_{n-k:n}) \stackrel{d}{=} B(n/k)(1 + o_p(1))$.

Na representação em distribuição dos estimadores clássicos, de parâmetros de primeira ordem, aparece geralmente uma componente semelhante a,

$$v_1 A(n/k)(1 + o_p(1)) + v_2 (A(n/k)B(n/k))(1 + o_p(1)) + v_3 A^2(n/k)(1 + o_p(1)) \quad (3.11)$$

e nos estimadores “assintoticamente centrados”, isto é, nos estimadores cuja componente de viés de ordem $A(n/k)$ é nula, temos algo do tipo,

$$o_p(A(n/k)) + v_2 (A(n/k)B(n/k))(1 + o_p(1)) + v_3 A^2(n/k)(1 + o_p(1)) \quad (3.12)$$

onde v_1 , v_2 e v_3 são constantes que dependem do modelo. Na segunda situação torna-se impossível saber qual daqueles termos é o dominante. Para podermos dar mais informação relativa ao viés, precisamos de mais informação sobre $o_p(A(n/k))$ em (3.12).

Se admitirmos apenas que a função A admite uma representação do tipo,

$$A(t) = \alpha t^\rho, \quad \text{com } \alpha \neq 0 \text{ e } \rho < 0, \quad (3.13)$$

então

$$A(Y_{n-k:n}) = \alpha (Y_{n-k:n})^\rho = \alpha (n/k)^\rho \left(\frac{k}{n}Y_{n-k:n}\right)^\rho = A(n/k) \left(1 + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right),$$

ou seja $o_p(A(n/k)) = O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right)$.

Assim, mesmo sem considerar qualquer condição sobre a função B , podemos garantir que na representação em distribuição de estimadores assintoticamente centrados (de parâmetros de primeira ordem) aparece algo semelhante a

$$O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right) + v_2 (A(n/k)B(n/k))(1 + o_p(1)) + v_3 A^2(n/k)(1 + o_p(1)). \quad (3.14)$$

É assim possível retirar conclusões, embora seja necessário considerar três situações distintas, porque o parâmetro de terceira ordem, ρ' , poderá não ser igual ao parâmetro de segunda ordem, ρ .

1. Primeira situação: $B(t) = o(A(t))$, ou seja $\rho > \rho'$.

Se considerarmos níveis k , intermédios, tais que $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$, finito, então $A(n/k)/\sqrt{k} = O(A^2(n/k))$. Mas nestas condições verifica-se que $A(n/k)/\sqrt{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $A^2(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Se por outro lado, avançarmos para os níveis óptimos para este tipo de estimadores “assintoticamente centrados”, isto é, para níveis tais que $\sqrt{k}A^2(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_A$ então $A(n/k)/\sqrt{k} = o(A^2(n/k))$.

2. Segunda situação: $A(t) = o(B(t))$, ou seja $\rho < \rho'$.

Nos níveis intermédios k , tais que $\sqrt{k}B(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda'$, finito, então $A(n/k)/\sqrt{k} = O(A(n/k)B(n/k))$. Neste níveis, $A(n/k)/\sqrt{k}$ e $A(n/k)B(n/k)$ convergem para 0. Se avançarmos para níveis que verifiquem $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_B$ então $A(n/k)/\sqrt{k} = o(A^2(n/k))$.

3. Terceira situação: $A(t) = O(B(t))$, ou seja $\rho = \rho'$.

Se considerarmos níveis k , intermédios, tais que $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$, finito, então $A(n/k)/\sqrt{k} = O(A^2(n/k)) = O(A(n/k)B(n/k))$. Para estes níveis, $A(n/k)/\sqrt{k}$, $A^2(n/k)$ e $A(n/k)B(n/k)$ convergem para 0. Se por outro lado avançarmos para os níveis tais que $\sqrt{k}A^2(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_A$ então $A(n/k)/\sqrt{k} = o(A^2(n/k))$ e $A(n/k)/\sqrt{k} = o(A(n/k)B(n/k))$.

Por estas razões vamos, ao longo deste trabalho, admitir sempre que A admite uma representação do tipo (3.13). Nestas condições podemos garantir que, para níveis tais que $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ ($\rho \geq \rho'$) ou $\sqrt{k}B(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda'$ ($\rho \leq \rho'$), o termo $O_p(A(n/k)/\sqrt{k})$ não é importante porque $A(n/k)/\sqrt{k}$ converge para 0. Para níveis que verifiquem $\sqrt{k}A^2(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_A$ ($\rho \geq \rho'$) ou $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_B$ ($\rho \leq \rho'$), então $A(n/k)/\sqrt{k}$ é sempre de ordem inferior a $A(n/k)B(n/k)$ ou a $A^2(n/k)$. Deste modo podemos garantir (para os níveis considerados) que se não incluirmos o termo $O_p(A(n/k)/\sqrt{k})$ (3.14), a representação assintótica (em distribuição) mantém-se

válida.

Teorema 3.1.1. *Se F verificar a condição de variação regular de terceira ordem, (2.43) com $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, e se $k = k(n)$ representar uma sequência intermédia verificando (2.17), pode-se garantir assintoticamente a validade das seguintes representações em distribuição,*

$$M_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma^\alpha \mu_\alpha^{(1)} \left[1 + \frac{\bar{\sigma}_\alpha^{(1)} Z_k^{(\alpha)}}{\sqrt{k}} + \frac{\alpha}{\gamma} \bar{\mu}_\alpha^{(2)}(\rho) A(n/k) + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \bar{\mu}_\alpha^{(2)}(\rho + \rho') A(n/k) B(n/k) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2\gamma^2} \bar{\mu}_\alpha^{(3)}(\rho) A^2(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right] \quad (3.15)$$

$$N_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma \bar{Z}_k^{(\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha - 1)k}} + \frac{A(n/k)}{\alpha - \rho} + \left(\frac{A(n/k) B(n/k)}{\alpha - \rho - \rho'} \right) (1 + o_p(1)), \quad (3.16)$$

onde E_i são v.a.'s i.i.d. exponenciais padrão, e

$$Z_k^{(\alpha)} := \frac{P_k^{(\alpha)}}{\sigma_\alpha^{(1)}} = \frac{\sqrt{k}}{\sigma_\alpha^{(1)}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^\alpha - \Gamma(\alpha + 1) \right), \quad (3.17)$$

$$\bar{Z}_k^{(\alpha)} := \sqrt{(2\alpha - 1)k} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \binom{i}{k}^{\alpha-1} E_i - \frac{1}{\alpha} \right), \quad (3.18)$$

são v.a.'s com distribuição assintótica normal padrão.

Demonstração.

Primeiro, é necessário determinar qual a distribuição assintótica de V_{ik} . Como $X \stackrel{d}{=} U(Y)$, onde Y representa uma v.a Pareto (Observação 2.1.2), $\frac{Y_{n-i+1:n}}{Y_{n-k:n}} \stackrel{d}{=} Y_{k-i+1:k}$ (Proposição 2.1.1) e utilizando a condição de terceira ordem, (2.43),

$$V_{ik} = \ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \stackrel{d}{=} \ln \frac{U(Y_{n-i+1:n})}{U(Y_{n-k:n})} = \ln \frac{U\left(\frac{Y_{n-i+1:n}}{Y_{n-k:n}} Y_{n-k:n}\right)}{U(Y_{n-k:n})} \\ \stackrel{d}{=} \gamma \ln Y_{k-i+1:k} + \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho-1}}{\rho} A(Y_{n-k:n}) + \frac{Y_{k-i+1:k}^{\rho+\rho'-1}}{\rho+\rho'} A(Y_{n-k:n}) B(Y_{n-k:n}) (1 + o_p(1)).$$

De acordo com a Observação 3.1.2, $A(Y_{n-k:n}) \stackrel{d}{=} A(n/k)(1 + O_p(1/\sqrt{k}))$, mas para os níveis considerados, podemos desprezar $O_p(A(n/k)/\sqrt{k})$, resultando assim,

$$V_{ik} \stackrel{d}{=} \gamma E_{k-i+1:k} + \frac{e^{\rho E_{k-i+1:k}} - 1}{\rho} A(n/k) \left(1 + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \\ + \frac{e^{(\rho+\rho')E_{k-i+1:k}} - 1}{\rho + \rho'} A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)).$$

Utilizando a aproximação assintótica (2.46), resulta que

$$M_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[\gamma E_i + \frac{e^{\rho E_i} - 1}{\rho} A(n/k) + \frac{e^{(\rho+\rho')E_i} - 1}{\rho + \rho'} A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)) \right]^\alpha \\ = \gamma^\alpha \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^\alpha + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^{\alpha-1} \frac{e^{\rho E_i} - 1}{\rho} A(n/k) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^{\alpha-1} \frac{e^{(\rho+\rho')E_i} - 1}{\rho + \rho'} A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)) \right. \\ \left. + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\gamma^2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^{\alpha-2} \left(\frac{e^{\rho E_i} - 1}{\rho} \right)^2 A^2(n/k) (1 + o_p(1)) \right]$$

Pela lei fraca dos grandes números garante-se que $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^{\alpha-1} \frac{e^{\rho E_i} - 1}{\rho} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu_\alpha^{(2)}(\rho)$, que $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^{\alpha-1} \frac{e^{(\rho+\rho')E_i} - 1}{\rho + \rho'} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu_\alpha^{(2)}(\rho + \rho')$ e $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^{\alpha-2} \left(\frac{e^{\rho E_i} - 1}{\rho} \right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu_\alpha^{(3)}(\rho)$. O resultado (3.15) fica assim demonstrado.

Da mesma forma se verifica que

$$U_i = i \ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-i:n}} \stackrel{d}{=} i \ln \frac{U\left(\frac{Y_{n-i+1:n}}{Y_{n-i:n}} Y_{n-i:n}\right)}{U(Y_{n-i:n})} \stackrel{d}{=} i \ln \frac{U(Y_{1:i} Y_{n-i:n})}{U(Y_{n-i:n})} \\ \stackrel{d}{=} \gamma \frac{E_i}{i} + \frac{e^{\rho E_i/i} - 1}{\rho} A(n/i) + \frac{e^{(\rho+\rho')E_i/i} - 1}{\rho + \rho'} A(n/i) B(n/i) (1 + o_p(1)).$$

Como $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha-1} E_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\alpha} = \int_0^1 x^{\alpha-1} dx$ vai-se introduzir a variável aleatória $\bar{Z}_k^{(\alpha)} = \sqrt{(2\alpha-1)k} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha-1} E_i - \frac{1}{\alpha} \right)$. Assim,

$$N_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma \bar{Z}_k^{(\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha-1)k}} + \frac{1}{k^{\alpha-\rho}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho} \left(\frac{e^{\rho E_i/i} - 1}{\rho} \right) A(n/k) \\ + \frac{1}{k^{\alpha-\rho-\rho'}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho-\rho'} \left(\frac{e^{(\rho+\rho')E_i/i} - 1}{\rho + \rho'} \right) A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)).$$

Como $\frac{\rho E_i^2}{i^2} < \frac{e^{\rho E_i/i} - 1}{\rho} - \frac{E_i}{i} < 0$ e pela lei fraca dos grandes números,

$$\frac{1}{k^{\alpha-\rho}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho} \left(\frac{E_i}{i} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\alpha-\rho},$$

e

$$\frac{1}{k^{\alpha-\rho}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho} \left(\frac{E_i}{i} \right)^2 = O_p \left(\frac{1}{k} \right) = o_p(1),$$

resulta que

$$\frac{1}{k^{\alpha-\rho}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho} \left(\frac{e^{\rho E_i/i} - 1}{\rho} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\alpha-\rho}.$$

Analogamente se verifica que

$$\frac{1}{k^{\alpha-\rho-\rho'}} \sum_{i=1}^k i^{\alpha-\rho-\rho'} \left(\frac{e^{(\rho+\rho')E_i/i} - 1}{\rho-\rho'} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\alpha-\rho-\rho'}.$$

Resulta assim que

$$N_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma \overline{Z}_k^{(\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha-1)k}} + \frac{A(n/k)}{\alpha-\rho} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{\alpha-\rho-\rho'} (1 + o_p(1)),$$

tal como se queria demonstrar. \square

Observação 3.1.3. A normalidade assintótica de $Z_k^{(\alpha)}$ é uma consequência imediata da aplicação do Teorema Limite Central à sequência de v.a.'s i.i.d., E_i^α .

A demonstração da distribuição assintótica de $\overline{Z}_k^{(\alpha)}$ requer um pouco mais de atenção. Resulta da aplicação do Teorema Limite Central com a condição de Liapunov à sequência de v.a.'s i.i.d. $X_i = (i/k)^{\alpha-1}(E_i - 1)$, de valor médio 0. O teorema pode ser visto mais detalhadamente em Fisz [20] ou em Pestana e Velosa [40].

Corolário 3.1.1. As v.a.'s $P_k^{(\alpha)} = \sigma_\alpha^{(1)} Z_k^{(\alpha)}$ e as v.a.'s introduzidas em (3.17) e (3.18)

têm a seguinte estrutura de covariância,

$$\begin{aligned}
 Cov(P_k^{(\alpha)}, P_k^{(\beta)}) &= Cov(\sigma_\alpha^{(1)} Z_k^{(\alpha)}, \sigma_\beta^{(1)} Z_k^{(\beta)}) \\
 &= \Gamma(\alpha + \beta + 1) - \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1) \\
 Cov(Z_k^{(\alpha)}, Z_k^{(\beta)}) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1) - \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\sigma_\alpha^{(1)} \sigma_\beta^{(1)}}, \\
 Cov(\bar{\sigma}_{\alpha\theta_1}^{(1)} Z_k^{(\alpha)}, \bar{\sigma}_{\alpha\theta_2}^{(1)} Z_k^{(\alpha)}) &= \frac{(\theta_1 + \theta_2)\Gamma(\alpha(\theta_1 + \theta_2))}{\alpha\theta_1\theta_2\Gamma(\alpha\theta_1)\Gamma(\alpha\theta_2)} - 1, \\
 Cov(\bar{Z}_k^{(\alpha)}, \bar{Z}_k^{(\beta)}) &= \frac{\sqrt{(2\alpha - 1)(2\beta - 1)}}{\alpha + \beta - 1}.
 \end{aligned}$$

Proposição 3.1.1. *Nas condições do teorema anterior,*

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{M_n^{(\alpha\theta)}(k)}{\mu_{\alpha\theta}^{(1)}} \right)^{\tau/\theta} &\stackrel{d}{=} \gamma^{\alpha\tau} \left[1 + \frac{\tau\bar{\sigma}_{\alpha\theta}^{(1)} Z_k^{(\alpha\theta)}}{\theta\sqrt{k}} + \frac{\tau\alpha}{\gamma} \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(\rho) A(n/k) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau\alpha}{2\gamma^2} A^2(n/k) \left((\alpha\theta - 1) \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(3)}(\rho) + \alpha(\tau - \theta) (\bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(\rho))^2 \right) (1 + o_p(1)) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau\alpha}{\gamma} \bar{\mu}_{\alpha\theta}^{(2)}(\rho + \rho') A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)) \right]
 \end{aligned}$$

Demonstração.

Apenas é necessário utilizar a distribuição limite de $M_n^{(\alpha)}(k)$, (3.15), e a aproximação $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$. \square

Para além das estatísticas já introduzidas, existe outra que também merece destaque. Trata-se de uma estatística utilizada em alguns estimadores de parâmetros de segunda ordem. Considere-se a estatística,

$$D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) := \begin{cases} \left(\frac{M_n^{(\alpha\theta_1)}(k)}{\mu_{\alpha\theta_1}^{(1)}} \right)^{\tau/\theta_1} - \left(\frac{M_n^{(\alpha\theta_2)}(k)}{\mu_{\alpha\theta_2}^{(1)}} \right)^{\tau/\theta_2}, & \tau \neq 0 \\ \frac{1}{\theta_1} \ln \left(\frac{M_n^{(\alpha\theta_1)}(k)}{\mu_{\alpha\theta_1}^{(1)}} \right) - \frac{1}{\theta_2} \ln \left(\frac{M_n^{(\alpha\theta_2)}(k)}{\mu_{\alpha\theta_2}^{(1)}} \right), & \tau = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

onde $\alpha > 0$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ ($\neq \theta_1$) e τ são parâmetros de controlo.

Proposição 3.1.2. *Admitindo que para além das condições do teorema anterior, também se verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}A(n/k) = \infty$, então,*

$$\frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)}{\alpha \tau \gamma^{\tau \alpha - 1} A(n/k)} \xrightarrow{\mathbb{P}} d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) = \bar{\mu}_{\alpha \theta_1}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha \theta_2}^{(2)}(\rho).$$

Se $\tau \neq 0$ e também se verificar a condição de variação regular de terceira ordem, (2.43), podemos garantir a seguinte distribuição limite:

$$\begin{aligned} \frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)}{\alpha \tau \gamma^{\tau \alpha - 1} A(n/k)} &\stackrel{d}{=} d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \frac{\gamma W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{\alpha \sqrt{k} A(n/k)} \\ &+ \left(\frac{a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{2\gamma} A(n/k) + d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho') B(n/k) \right) (1 + o_p(1)), \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde,

$$W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} := \frac{\bar{\sigma}_{\alpha \theta_1}^{(1)}(\rho) Z_k^{(\alpha \theta_1)}}{\theta_1} - \frac{\bar{\sigma}_{\alpha \theta_2}^{(1)}(\rho) Z_k^{(\alpha \theta_2)}}{\theta_2}, \quad (3.21)$$

é uma variável assintoticamente normal, com valor médio 0 e variância dada por,

$$\text{Var} \left[W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)} \right] = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{\Gamma(2\alpha\theta_1)}{\theta_1^3 \Gamma(\alpha\theta_1)} + \frac{\Gamma(2\alpha\theta_2)}{\theta_2^3 \Gamma(\alpha\theta_2)} - \frac{(\theta_1 + \theta_2)\Gamma(\alpha(\theta_1 + \theta_2))}{(\theta_1\theta_2)^2 \Gamma(\alpha\theta_1)\Gamma(\alpha\theta_2)} \right) - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right)^2,$$

tendo-se ainda,

$$\begin{aligned} a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}(\rho) &:= (\alpha\theta_1 - 1) \bar{\mu}_{\alpha \theta_1}^{(3)}(\rho) + \alpha(\tau - \theta_1) (\bar{\mu}_{\alpha \theta_1}^{(2)}(\rho))^2 \\ &- (\alpha\theta_2 - 1) \bar{\mu}_{\alpha \theta_2}^{(3)}(\rho) - \alpha(\tau - \theta_2) (\bar{\mu}_{\alpha \theta_2}^{(2)}(\rho))^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Demonstração.

Basta utilizar o resultado da Proposição 3.1.1. □

Corolário 3.1.2. *Verifica-se que $(W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}, W_k^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2)})$ tem a seguinte estrutura de covariância,*

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left(W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}, W_k^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2)} \right) &= \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{3\Gamma(3\alpha\theta_1)}{\theta_1^3 \Gamma(\alpha\theta_1)\Gamma(2\alpha\theta_1)} - \frac{(\theta_1 + 2\theta_2)\Gamma(\alpha(\theta_1 + 2\theta_2))}{\theta_1^2 \theta_2^2 \Gamma(\alpha\theta_1)\Gamma(2\alpha\theta_2)} \right. \\ &\left. - \frac{(\theta_1 + \theta_2)\Gamma(\alpha(2\theta_1 + \theta_2))}{\theta_1^2 \theta_2^2 \Gamma(2\alpha\theta_1)\Gamma(\alpha\theta_2)} + \frac{3\Gamma(3\alpha\theta_2)}{\theta_2^3 \Gamma(\alpha\theta_2)\Gamma(2\alpha\theta_2)} \right] - \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right)^2. \end{aligned}$$

3.2 Estimadores baseados nos excessos das log observações

3.2.1 Estimadores do índice de valores extremos positivo, γ

Para modelos de cauda pesada, o estimador mais conhecido do índice de valores extremos, γ , é o estimador de Hill, definido em (3.5).

Proposição 3.2.1. *Se se verificar a condição de variação regular de terceira ordem, (2.43), com $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, e se $k = k(n)$ representar uma sequência intermédia verificando (2.17), podemos garantir a seguinte representação assintótica em distribuição,*

$$H(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} Z_k^{(1)} + \frac{A(n/k)}{1-\rho} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{1-\rho-\rho'} (1 + o_p(1)), \quad (3.23)$$

onde $Z_k^{(1)}$ é a v.a. definida em (3.17), com distribuição assintótica normal padrão.

Demonstração.

Como $H(k) = M_n^{(1)}(k) = N_n^{(1)}(k)$, esta Proposição é um caso particular do Teorema 3.1.1, já demonstrado. \square

O resultado anterior dá-nos aproximações assintóticas para a variância e viés do estimador de Hill. A variância e o termo dominante de viés são, respectivamente, $\frac{\gamma^2}{k}$ e $\frac{A(n/k)}{1-\rho}$. Como se admite que $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, o erro médio quadrático é minimizado quando

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\gamma^2}{k} + \left(\frac{\gamma \beta}{1-\rho} \right)^2 \left(\frac{n}{k} \right)^{2\rho} \right) = 0,$$

ou seja, quando

$$k_0 := \arg \min_k MSE(k) = \left(\frac{(1-\rho)^2}{-2\rho\beta^2} \right)^{1/(1-2\rho)} n^{-2\rho/(1-2\rho)}. \quad (3.24)$$

Verifica-se ainda que $\sqrt{k_0} A(n/k_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda_0 = \frac{\gamma(1-\rho)}{\sqrt{-2\rho}}$.

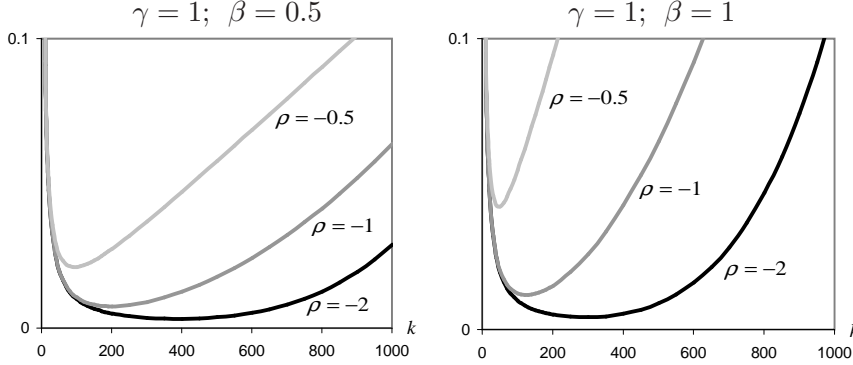


Figura 3.1: Padrão do erro médio quadrático assintótico do estimador de Hill para uma amostra de dimensão $n = 1000$.

Observação 3.2.1. Na Figura 3.1 temos, para alguns valores dos parâmetros de segunda ordem β e ρ , o padrão do erro médio quadrático do estimador de Hill. O padrão é sempre em forma de “U”, ou seja, é uma parábola. Quando consideramos $\rho = -0.5$ (valor próximo de 0) o gráfico do erro médio quadrático é uma parábola muito fechada onde a região de níveis com erro médio quadrático próximo do valor mínimo é pequena. Como as trajetórias amostrais das estimativas costumam ser muito voláteis, percebe-se porque razão é difícil escolher o nível ótimo, k_0 , especialmente quando o parâmetro ρ está próximo de 0.

Observação 3.2.2. Se o modelo associado à v.a. X for o modelo Pareto, apresentado na Observação 2.1.4, as propriedades (2.13) e (2.16) levam a que

$$H(k) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k E_{n-i+1:n} - E_{n-k:n} \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k E_{k-i+1:k} = \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k E_i \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{k} Ga(k), \quad (3.25)$$

onde $Ga(k)$ representa uma v.a. Gama com parâmetro de forma k . Logo, para qualquer valor de k , o estimador de Hill é centrado para γ , ou seja, $\mathbb{E}[H(k)] = \gamma$. É ainda possível garantir a normalidade assintótica de $\sqrt{k}(H(k) - \gamma)/\gamma$, quando $k \rightarrow \infty$.

O estimador de Hill é sem dúvida o mais conhecido estimador do índice de valores extremos, $\gamma > 0$. Como apresenta trajetórias amostrais muito pouco estáveis, surgiram na literatura outros estimadores com melhores propriedades. Considere-se agora

os seguintes estimadores Jackknife Generalizado introduzidos em Gomes *et al.* [25],

$$\widehat{\gamma}_n^{GJ_1(\widehat{\rho})}(k) := \frac{\widehat{\gamma}_n^H(k) - (1 - \widehat{\rho})\widehat{\gamma}_n^{(2)}(k)}{\widehat{\rho}} \quad (3.26)$$

$$\widehat{\gamma}_n^{GJ_2(\widehat{\rho})}(k) := \frac{(2 - \widehat{\rho})\widehat{\gamma}_n^H(k) - 2(1 - \widehat{\rho})\widehat{\gamma}_n^{(3)}(k)}{\widehat{\rho}} \quad (3.27)$$

$$\widehat{\gamma}_n^{GJ_3(\widehat{\rho})}(k) := \frac{(2 - \widehat{\rho})\widehat{\gamma}_n^{(2)}(k) - 2\widehat{\gamma}_n^{(3)}(k)}{-\widehat{\rho}} \quad (3.28)$$

onde $\widehat{\rho}$ é um estimador consistente de ρ ,

$$\widehat{\gamma}_n^{(2)}(k) := \frac{M_n^{(2)}(k)}{2M_n^{(1)}(k)}, \quad (3.29)$$

$$\widehat{\gamma}_n^{(3)}(k) := \sqrt{\frac{M_n^{(2)}(k)}{2}}, \quad (3.30)$$

são outros possíveis estimadores do índice de valores extremos γ e $M_n^{(\alpha)}(k)$ é a estatística definida em (3.3). Nas condições da Proposição anterior podemos garantir a seguinte representação assintótica,

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_n^{(2)}(k) &\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}}(\sqrt{5}Z_k^{(2)} - Z_k^{(1)}) + \frac{A(n/k)}{(1 - \rho)^2} + \\ &+ \left(\frac{\rho^2 A^2(n/k)}{\gamma(1 - \rho)^3(1 - 2\rho)} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{(1 - \rho - \rho')^2} \right) (1 + o_p(1)), \end{aligned} \quad (3.31)$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_n^{(3)}(k) &\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{5}}{2} Z_k^{(2)} + \frac{(2 - \rho)A(n/k)}{2(1 - \rho)^2} + \\ &+ \left(\frac{\rho^2(3 - 2\rho)A^2(n/k)}{4\gamma(1 - \rho)^4(1 - 2\rho)} + \frac{(2 - \rho - \rho')A(n/k)B(n/k)}{2(1 - \rho - \rho')^2} \right) (1 + o_p(1)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Proposição 3.2.2. *Nas condições da Proposição 3.2.1, e se admitirmos que o parâmetro de segunda ordem, ρ , é conhecido,*

$$\widehat{\gamma}_n^{GJ_i(\rho)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma\sigma_{GJ}}{\sqrt{k}} Z_k^{GJ} - \left(v_{GJ_i} \frac{\rho A(n/k)}{(1 - 2\rho)\gamma} + \frac{\rho' B(n/k)}{\rho(1 - \rho - \rho')} \right) A(n/k) (1 + o_p(1))$$

onde

$$Z_k^{GJ} := \frac{1}{\sigma_{GJ}} \left(\frac{(1 - \rho)\sqrt{5}Z_k^{(2)} - (2 - \rho)Z_k^{(1)}}{-\rho} \right),$$

é uma v.a. com distribuição assintótica normal padrão,

$$\sigma_{GJ} := \sqrt{1 + \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2},$$

e

$$v_{GJ_1} := \frac{1}{(1-\rho)^2}, \quad v_{GJ_2} := \frac{3-2\rho}{2(1-\rho)^3}, \quad v_{GJ_3} := \frac{1-4\rho+2\rho^2}{2(1-\rho)^4}.$$

Demonstração.

O resultado demonstra-se a partir dos resultados (3.23), (3.31) e (3.32). \square

Teorema 3.2.1. *Seja $\hat{\rho} = \hat{\rho}(k_1)$ um estimador consistente do parâmetro de segunda ordem ρ , calculado num nível k_1 mais elevado do que o nível k , utilizado para estimar o índice de valores extremos. Admitindo que se verifica a condição de variação regular de terceira ordem, (2.43) com $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, $\beta \neq 0$, e que $k = k(n)$ é uma sequência intermédia verificando (2.17), pode-se garantir uma representação assintótica do tipo,*

$$\hat{\gamma}_n^{GJ_i(\hat{\rho})}(k) \stackrel{d}{=} \hat{\gamma}_n^{GJ_i(\rho)}(k) + (\hat{\rho} - \rho) \left(O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + O_p(A(n/k))(1 + A(n/k) + B(n/k)) \right), \quad (3.33)$$

com $i = 1, 2, 3$. Pode-se assim garantir que $\hat{\gamma}_n^{GJ_i(\hat{\rho})}(k)$, $i = 1, 2, 3$, é consistente para γ .

Demonstração.

Apenas será feita a demonstração para o caso $i = 3$. Para os outros casos, a demonstração é feita de forma análoga.

Como $\hat{\rho} - \rho = o_p(1)$, aplicando o método delta pode-se garantir que

$$\hat{\gamma}_n^{GJ_3(\hat{\rho})}(k) \stackrel{d}{=} \hat{\gamma}_n^{GJ_3(\rho)}(k) + (\hat{\rho} - \rho)\xi(k)(1 + o_p(1)),$$

onde $\xi(k) = \frac{\partial \hat{\gamma}_n^{GJ_3(\rho)}(k)}{\partial \rho} = \frac{2}{\rho^2} \left(\hat{\gamma}_n^{(2)}(k) - \hat{\gamma}_n^{(3)}(k) \right)$. Recorrendo às representações em distribuição (3.31) e (3.32), obtém-se

$$\xi(k) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{5}Z_k^{(2)} - 2Z_k^{(1)}}{\rho^2} + \frac{A(n/k)}{\rho(1-\rho)^2} + \left(\frac{A^2(n/k)}{2\gamma(1-\rho)^4} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{(1-\rho-\rho')^2} \right) (1 + o_p(1)),$$

e fica assim demonstrado (3.33). \square

Corolário 3.2.1. *Se $\hat{\rho} = \hat{\rho}(k_1)$ representar um estimador consistente para o parâmetro de segunda ordem, ρ , podemos ainda garantir,*

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_n^{GJ_i(\hat{\rho})}(k) - \gamma) \stackrel{d}{=} \sqrt{k}(\hat{\gamma}_n^{GJ_i(\rho)}(k) - \gamma) + o_p(1), \quad i = 1, 2, 3,$$

sempre que se verificar

$$\sqrt{k}(\hat{\rho} - \rho) \left(O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + O_p(A(n/k)) + O_p(A^2(n/k)) + O_p(A(n/k)B(n/k)) \right) = o_p(1).$$

Se $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ (não necessariamente nulo) necessita-se que $(\hat{\rho} - \rho) = o_p(1)$ para garantir a normalidade assintótica. Se se avançar para níveis tais que $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ mas $\sqrt{k}A^2(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda_B$ então é necessário exigir que $(\hat{\rho} - \rho) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)}\right)$ para garantirmos a normalidade assintótica de $\sqrt{k}(\hat{\gamma}_n^{GJ_i(\hat{\rho})}(k) - \gamma)$.

A seguinte classe de estatísticas foi introduzida e estudada, num contexto de segunda ordem, em Caeiro [4]. Esta classe tem dois parâmetros de controlo, λ e θ , que podem ser escolhidos livremente. Considere-se a estatística,

$$\hat{\gamma}_n^{G(\lambda, \theta)}(k) := \frac{\mu_{\lambda-1}^{(1)}}{M_n^{(\lambda-1)}(k)} \left(\frac{M_n^{(\lambda\theta)}(k)}{\mu_{\lambda\theta}^{(1)}} \right)^{1/\theta}, \quad \theta > 0, \lambda \geq 1. \quad (3.34)$$

Esta classe de estatísticas (3.34) generaliza alguns estimadores do índice de valores extremos existentes na literatura, incluindo o clássico estimador de Hill, obtido com a parametrização $(\theta, \lambda) = (1, 1)$.

Teorema 3.2.2. *Admitindo $k = k(n)$ sucessão intermédia verificando (2.17) e que se verifica pelo menos a condição de variação regular de primeira ordem (2.41), então*

$\widehat{\gamma}_n^{G(\theta,\lambda)}(k) \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma$. Se a condição de terceira ordem (2.43) também se verificar,

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_n^{G(\lambda,\theta)}(k) &= \frac{\mu_{\lambda-1}^{(1)}}{M_n^{(\lambda-1)}(k)} \left(\frac{M_n^{(\lambda\theta)}(k)}{\mu_{\lambda\theta}^{(1)}} \right)^{1/\theta} \stackrel{a}{=} \gamma \left[1 + \frac{\sigma_{\theta,\lambda}}{\sqrt{k}} Z_k^{G(\theta,\lambda)} + \right. \\ &+ \frac{1}{\gamma} \left(\lambda \overline{\mu}_{\lambda\theta}^{(2)}(\rho) - \overline{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho) \right) A(n/k) + \\ &+ \frac{1}{2\gamma^2} \left(\lambda(\lambda\theta - 1) \overline{\mu}_{\lambda\theta}^{(3)}(\rho) + \lambda^2(1 - \theta) (\overline{\mu}_{\lambda\theta}^{(2)}(\rho))^2 + 2(\lambda - 1)^2 (\overline{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho))^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\lambda - 1)(\lambda - 2) \overline{\mu}_{\lambda-1}^{(3)}(\rho) - 2\lambda(\lambda - 1) \overline{\mu}_{\lambda\theta}^{(2)}(\rho) \overline{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho) \right) A^2(n/k) (1 + o_p(1)) + \\ &+ \frac{1}{\gamma} \left(\lambda \overline{\mu}_{\lambda\theta}^{(2)}(\rho + \rho') - (\lambda - 1) \overline{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho + \rho') \right) A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)) \end{aligned}$$

onde

$$Z_k^{G(\theta,\lambda)} := \frac{1}{\sigma_{\theta,\lambda}} \left(\frac{\overline{\sigma}_{\lambda\theta}^{(1)}}{\theta} Z_k^{(\lambda\theta)} - \overline{\sigma}_{\lambda-1}^{(1)} Z_k^{(\lambda-1)} \right)$$

é uma v.a. assintoticamente normal padrão e

$$\sigma_{\theta,\lambda}^2 := \frac{1}{\theta^2} \left[\frac{1\Gamma(2\theta\lambda)}{\theta\lambda\Gamma^2(\theta\lambda)} - \frac{\theta^2\Gamma(2\lambda - 1)}{\Gamma^2(\lambda)} - \frac{2\Gamma((\theta + 1)\lambda)}{\lambda\Gamma(\theta\lambda)\Gamma(\lambda)} - (\theta - 1)^2 \right].$$

Verifica-se ainda, para qualquer $\rho < 0$ e $\theta > 1$, que existe um valor $\lambda_0 \equiv \lambda_0^{(\theta)}(\rho)$ tal que $\lambda_0 \overline{\mu}_{\lambda_0\theta}^{(2)}(\rho) - (\lambda_0 - 1) \overline{\mu}_{\lambda_0-1}^{(2)}(\rho) = 0$, ou seja, o termo dominante de viés de $\widehat{\gamma}_n^{G(\lambda,\theta)}$ é nulo, mesmo que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda \neq 0$, $n \rightarrow \infty$.

Demonstração.

A demonstração da distribuição assintótica de $\widehat{\gamma}_n^{G(\lambda,\theta)}(k)$ é bastante simples, bastando para isso aplicar o resultado da Proposição 3.1.1.

A segunda parte do teorema resulta de

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1} b_\theta(\lambda) &= \frac{1 - (1 - \rho)^\theta}{\theta\rho(1 - \rho)^\theta} \geq 0, & \forall \rho < 0, \quad \forall \theta > 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} b_\theta(\lambda) &= \frac{\theta - 1}{\rho\theta} < 0, & \forall \rho < 0, \quad \theta > 1, \end{aligned}$$

e o facto de $b_\theta(\lambda)$ ser contínua, onde $b_\theta(\lambda) = \lambda \overline{\mu}_{\lambda\theta}^{(2)}(\rho) - (\lambda - 1) \overline{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho)$. Pode-se assegurar para $\theta > 1$, a existência de pelo menos um valor $\lambda_0 \in [1; +\infty[$ para o qual $b_\theta(\lambda_0) = 0$.

Para provar a unicidade de λ_0 é ainda necessário estudar a monotonia da função $b_\theta(\lambda)$. Como para $\theta > 1$ (fixo), $b_\theta(\lambda)$ é estritamente decrescente, fica provada a unicidade de λ_0 .

A existência de um valor λ_0 tal que $b_\theta(\lambda_0) = 0$ permite obter um estimador assintoticamente centrado, o que significa que fazendo $\lambda = \lambda_0$ provavelmente haverá trajectórias amostrais de “ $\widehat{\gamma}_n^{G(\theta,\lambda)}(k)$ vs k ” mais estáveis do que as do estimador de Hill ou qualquer outro estimador que não seja assintoticamente centrado. \square

Proposição 3.2.3. *Caso o valor ρ seja conhecido, λ_0 terá geralmente que ser obtido recorrendo a métodos numéricos. Apenas para os casos particulares $\theta = 1.5, 2, 3$ e 4 , isto é para as classes de estimadores $\widehat{\gamma}_n^{G(1.5,\lambda)}(k)$, $\widehat{\gamma}_n^{G(2,\lambda)}(k)$, $\widehat{\gamma}_n^{G(3,\lambda)}(k)$ e para $\widehat{\gamma}_n^{G(4,\lambda)}(k)$ conseguimos calcular analiticamente os seguintes valores λ_0 ,*

$$\begin{aligned}\lambda_0^{(1.5)}(\rho) &= -\frac{2 \ln \left[(1 - \rho) \left(\frac{1}{2} + \cos \left(\frac{\arctan\left(-\frac{1}{8}((1-\rho)^3-2), \frac{1}{4}\sqrt{(1-\rho)^3-1}\right) + 4\pi}{3} \right) \right) \right]}{\ln(1 - \rho)}, \\ \lambda_0^{(2)}(\rho) &= -\frac{\ln \left[1 - \rho - \sqrt{(1 - \rho)^2 - 1} \right]}{\ln(1 - \rho)}, \\ \lambda_0^{(3)}(\rho) &= -\frac{\ln \left[2\sqrt{1 - \rho} \cos \left(\frac{\arctan\left(-1, \sqrt{(1-\rho)^3-1}\right) + 4\pi}{3} \right) \right]}{\ln(1 - \rho)}, \\ \lambda_0^{(4)}(\rho) &= -\frac{\ln \left[\frac{\sqrt{u}}{2} \left(1 - \sqrt{2\sqrt{1 - 12/u^2} - 1} \right) \right]}{\ln(1 - \rho)}, \\ u &= 2(1 - \rho)^{2/3} \left[\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - (1 - \rho)^{-4}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - (1 - \rho)^{-4}}} \right].\end{aligned}$$

Nas expressões anteriores, $\arctan(x, y) = \arctan(y/x) \in [0, 2\pi[$ é o argumento do número complexo $x + iy$.

Demonstração.

Quando $\theta = 2$ a resolução da equação $b_2(\lambda_0) = 0$ é bastante simples, uma vez que

consiste em obter as raízes de um polinómio de segundo grau na variável $x = (1 - \rho)^{-\lambda_0}$:

$$b_2(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow (2\rho)^{-1} \left[(1 - \rho)^{-2\lambda_0} - 2(1 - \rho)^{1-\lambda_0} + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 = -\frac{\ln[(1 - \rho) \pm \sqrt{(1 - \rho)^2 - 1}]}{\ln(1 - \rho)}. \quad (3.35)$$

Como $\lambda \geq 1$, só interessa a solução positiva, e escolhe-se o sinal “-” em (3.35). Para os outros valores de θ a demonstração faz-se de forma análoga através da resolução de equações polinomiais de grau 3 e 4. \square

Tabela 3.1: Alguns valores de $\lambda_0 : b_\theta(\lambda_0) = 0$ como função do parâmetro ρ .

ρ	-0.01	-0.1	-0.25	-0.5	-1	-1.25	-1.5	-2	-3	$-\infty$
$\lambda_0^{(1.5)}(\rho)$	19.755	6.259	4.070	3.031	2.355	2.195	2.081	1.927	1.756	1
$\lambda_0^{(2)}(\rho)$	14.201	4.654	3.106	2.374	1.900	1.789	1.710	1.605	1.488	1
$\lambda_0^{(3)}(\rho)$	10.211	3.470	2.385	1.877	1.557	1.483	1.432	1.364	1.291	1
$\lambda_0^{(4)}(\rho)$	8.428	2.933	2.057	1.654	1.405	1.350	1.311	1.261	1.207	1

Tabela 3.2: Tabela com $\sigma_{\theta, \lambda_0}^2$ para alguns valores de θ .

ρ	$\theta = 1.5$		$\theta = 2$		$\theta = 3$		$\theta = 4$	
	λ_0	$\sigma_{1.5, \lambda_0}^2$	λ_0	σ_{2, λ_0}^2	λ_0	σ_{3, λ_0}^2	λ_0	σ_{4, λ_0}^2
-0.1	6.259	32561.053	4.654	17833.760	3.470	35399.104	2.933	118115.452
-0.25	4.070	368.022	3.106	277.828	2.385	459.256	2.057	1085.987
-0.5	3.031	43.638	2.374	38.752	1.877	61.245	1.654	128.191
-0.75	2.600	18.087	2.071	17.211	1.671	27.117	1.493	54.975
-1	2.355	11.028	1.900	10.919	1.557	17.281	1.405	34.675
-1.25	2.195	8.002	1.789	8.133	1.483	12.951	1.350	25.909
-1.5	2.081	6.380	1.710	6.609	1.432	10.588	1.311	21.178
-2	1.927	4.721	1.605	5.019	1.364	8.128	1.261	16.295
-2.5	1.827	3.894	1.536	4.211	1.321	6.878	1.229	13.830
-3	1.756	3.402	1.488	3.725	1.291	6.125	1.207	12.349
$-\infty$	1.000	1.065	1.000	1.250	1.000	2.111	1.000	4.313

Na Tabela 3.1 apresentamos, para alguns valores de ρ , os respectivos valores do parâmetro λ_0 que anulam o termo dominante de viés assintótico. Neste tipo de estimadores “assintoticamente centrados” existe sempre um aumento da variância associado à redução de viés.

A Tabela 3.2 contém, para alguns valores de ρ o valor λ_0 e a respectiva variância assintótica de $\widehat{\gamma}_n^{G(\theta, \lambda_0)}(k)/\gamma$, com $\theta = 1.5, 2, 3$ e 4 . As variâncias mais pequenas são obtidas quando $\theta = 1.5$ ou $\theta = 2$. Caso se pretenda utilizar apenas λ como parâmetro de controlo é conveniente substituir θ por 2 , já que é na região $\rho > -2$ que os estimadores clássicos do índice de valores extremos apresentam piores resultados.

3.2.2 Estimação do parâmetro de segunda ordem, ρ

Os estimadores do índice de valores extremos “assintoticamente centrados” até agora introduzidos dependem do valor do parâmetro de segunda ordem ρ . Ainda recentemente, era muito difícil estimar correctamente este parâmetro de segunda ordem. Existe actualmente uma classe de estimadores, introduzida em Fraga Alves *et al.* [21], que apresenta bons resultados e é definida por:

$$\widehat{\rho}_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) := t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}^{\leftarrow}(T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)), \quad (3.36)$$

onde

$$t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) := \frac{d_{\alpha, 1, \theta_1}(\rho)}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}, \quad \text{e} \quad T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) := \frac{D_n^{(\alpha, 1, \theta_1, \tau)}(k)}{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)},$$

$$\text{com } \frac{\theta_1 - 1}{|\theta_2 - \theta_1|} \leq \left| T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) \right| \leq \frac{\theta_2(\theta_1 - 1)}{|\theta_2 - \theta_1|}.$$

Em seguida apresentam-se alguns resultados assintóticos presentes em Fraga Alves *et al.* [21].

Proposição 3.2.4. *Se se verificar a condição de segunda ordem, (2.41), com $\rho < 0$ e se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$ então*

$$T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) \xrightarrow{\mathbb{P}} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho). \quad (3.37)$$

Se também se verificar a condição de terceira ordem, (2.43),

$$\begin{aligned} T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) &\stackrel{d}{=} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \left[\frac{\gamma(W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)})}{\sqrt{k}A(n/k)d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} + \right. \\ &\quad + \frac{a_{\alpha, 1, \theta_1, \tau}(\rho) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}(\rho)}{2\gamma d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} A(n/k) \\ &\quad \left. + \frac{d_{\alpha, 1, \theta_1}(\rho + \rho') - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} B(n/k) \right] (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

onde $W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$ e $a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}(\rho)$ estão definidos em (3.21) e (3.22), respectivamente.

Demonstração.

Como

$$T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) = \frac{D_n^{(\alpha, 1, \theta_1, \tau)}(k)}{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)} = \frac{D_n^{(\alpha, 1, \theta_1, \tau)}(k) / (\alpha \tau \gamma^{\tau \alpha - 1} A(n/k))}{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) / (\alpha \tau \gamma^{\tau \alpha - 1} A(n/k))},$$

basta aplicar o resultado da Proposição 3.1.2, e a aproximação assintótica $(c+x)^{-1} = c^{-1} - c^{-2}x + o(x)$, $x \rightarrow 0$, resultando

$$\begin{aligned} T_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) &\stackrel{d}{=} t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) + \left[\frac{\gamma(W_k^{(\alpha, 1, \theta_1)} - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)})}{\sqrt{k}A(n/k)d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} + \right. \\ &\quad + \frac{a_{\alpha, 1, \theta_1, \tau}(\rho) - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}(\rho)}{2\gamma d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} A(n/k) \\ &\quad \left. + \frac{d_{\alpha, 1, \theta_1}(\rho + \rho') - t_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} B(n/k) \right] (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

tal como se pretendia demonstrar. \square

Na literatura tem sido utilizado o estimador que se obtém substituindo $(\alpha, \theta_1, \theta_2)$ por $(1, 2, 3)$. O estimador possui apenas um parâmetro de controlo, τ , que se for devidamente escolhido apresenta elevada estabilidade das trajectórias amostrais junto ao verdadeiro valor de ρ , para uma vasta região de valores elevados de k . Passa-se a denotar este estimador por

$$\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k) \equiv \hat{\rho}_n^{(1, 2, 3, \tau)}(k) = -\frac{3(T_n^{(\tau)}(k) - 1)}{T_n^{(\tau)}(k) - 3}. \quad (3.38)$$

Proposição 3.2.5. *Se se verificar a condição de segunda ordem, (2.41), com $\rho < 0$ e se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$ então $\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k) \xrightarrow{\mathbb{P}} \rho$. Se também se verificar a condição de terceira ordem, (2.43), $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, finitos, então $\sqrt{k}A(n/k) \left(\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k) - \rho \right)$ é assintoticamente normal com variância assintótica*

$$\gamma^2 \left(\frac{(1-\rho)^3}{\rho} \right)^2 (2\rho^2 - 2\rho + 1), \quad (3.39)$$

e viés assintótico dado por $\lambda_A v_1 + \lambda_b v_2$ onde

$$v_1 = \frac{\rho [\tau(1-2\rho)^2(3-\rho)(3-2\rho) + 6\rho(4(2-\rho)(1-\rho)^2 - 1)]}{12\gamma(1-\rho)^2(1-2\rho)^2} \quad (3.40)$$

e

$$v_2 = \rho' \left(1 + \frac{\rho'}{\rho}\right) \left(\frac{1-\rho}{1-\rho-\rho'}\right)^3. \quad (3.41)$$

Demonstração.

Utilizando o método delta,

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}_n^{(\tau)}(k) &\equiv \widehat{\rho}_n^{(1,2,3,\tau)}(k) = t_{1,2,3}^{\leftarrow}(T_n^{(1,2,3,\tau)}(k)) \\ &= t_{1,2,3}^{\leftarrow}(t_{1,2,3}(\rho)) + \left(T_n^{(1,2,3,\tau)}(k) - t_{1,2,3}(\rho)\right) t_{1,2,3}^{\leftarrow'}(t_{1,2,3}(\rho))(1 + o_p(1)) \\ &\stackrel{d}{=} \rho - \frac{1}{t'_{1,2,3}(\rho)} \left[\frac{\gamma(W_k^{(1,1,2)} - t_{1,2,3}(\rho)W_k^{(1,2,3)})}{\sqrt{k}A(n/k)d_{1,2,3}(\rho)} + \right. \\ &\quad + \frac{a_{1,1,2}(\rho) - t_{1,2,3}(\rho)a_{1,2,3}(\rho)}{2\gamma d_{1,2,3}(\rho)} A(n/k) \\ &\quad \left. + \frac{d_{1,1,2}(\rho + \rho') - t_{1,2,3}(\rho)d_{1,2,3}(\rho + \rho')}{d_{1,2,3}(\rho)} B(n/k) \right] (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

Denotando $\overline{P}_k^{(\alpha)} := \frac{P_k^{(\alpha)}}{\mu_\alpha^{(1)}} = \overline{\sigma}_\alpha^{(1)} Z_k^{(\alpha)}$, pode-se escrever

$$\frac{W_k^{(1,1,2)} - t_{1,2,3}(\rho)W_k^{(1,2,3)}}{t'_{1,2,3}(\rho)d_{1,2,3}(\rho)} = \frac{(1-\rho)^3}{\rho} \left[(3-\rho)\overline{P}_k^{(1)} - (3-2\rho)\overline{P}_k^{(2)} + (1-\rho)\overline{P}_k^{(3)} \right].$$

Resulta que

$$W_k^{(\rho)} = \frac{1}{\sigma_\rho} \left(\frac{W_k^{(1,1,2)} - t_{1,2,3}(\rho)W_k^{(1,2,3)}}{t'_{1,2,3}(\rho)d_{1,2,3}(\rho)} \right)$$

é uma variável assintoticamente normal padrão e

$$\sigma_\rho^2 = \left(\frac{(1-\rho)^3}{\rho} \right)^2 (2\rho^2 - 2\rho + 1).$$

Como

$$\begin{aligned} d_{1,1,2}(\rho) &= -\frac{\rho}{2(1-\rho)^2}, & d_{1,2,3}(\rho) &= -\frac{(3-\rho)\rho}{6(1-\rho)^3}, \\ t_{1,2,3}(\rho) &= \frac{3(1-\rho)}{3-\rho}, & t'_{1,2,3}(\rho) &= -\frac{6}{(3-\rho)^2}, \\ a_{1,1,2}(\rho) &= -\frac{\rho[\rho(14-11\tau)-4(1-\tau)-\rho^2(8-6\tau)]}{(1-\rho)^4(1-2\rho)}, \\ a_{1,2,3}(\rho) &= -\frac{\rho[36(1-\rho)+3\rho(67\tau-82)-6\rho^2(67\tau-86)+\rho^3(353\tau-402)-4\rho^4(35\tau-27)+20\rho^5\tau]}{36(1-\rho)^6(1-2\rho)^2} \end{aligned}$$

obtem-se a representação

$$\widehat{\rho}_n^{(\tau)}(k) \stackrel{d}{=} \rho + \left(\frac{\gamma\sigma_\rho W_k^\rho}{\sqrt{k}A(n/k)} + v_1A(n/k) + v_2B(n/k) \right) (1 + o_p(1)),$$

os seja

$$\sqrt{k}A(n/k) \left(\widehat{\rho}_n^{(\tau)}(k) - \rho \right) \stackrel{d}{=} \left(\gamma\sigma_\rho W_k^\rho + v_1\sqrt{k}A^2(n/k) + v_2\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \right) (1 + o_p(1)),$$

onde v_1 e v_2 estão definidos em (3.40) e (3.41), respectivamente. \square

Corolário 3.2.2. *Se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, ambos finitos (eventualmente nulos), então*

$$\widehat{\rho}_n^{(\tau)}(k) - \rho = O_p \left(\frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)} \right). \quad (3.42)$$

Contudo se se avançar para níveis tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$ e $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \infty$ ou $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \infty$, então $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(A(n/k))$ ou $1/(\sqrt{k}A(n/k)) = o(B(n/k))$, resultando

$$\widehat{\rho}_n^{(\tau)}(k) - \rho = \begin{cases} O_p(A(n/k)), & \rho \geq \rho' \\ O_p(B(n/k)), & \rho < \rho' \end{cases}. \quad (3.43)$$

Observação 3.2.3. *O resultado da Proposição 3.2.5 mostra que o parâmetro de controlo, τ , apenas afecta o termo dominante de viés assintótico de $\widehat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$. Os resultados presentes em Fraga Alves et al. [21] e em Gomes e Martins [28] levam a que se utilize*

$\tau = 0$ para $\rho \in [-1, 0[$ e $\tau = 1$ para $\rho \in]-\infty, -1[$.

Como é óbvio, numa situação onde o verdadeiro valor de ρ é desconhecido, o ideal é representar graficamente, para vários valores de τ , trajectórias amostrais de $\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$ vs. k e escolher a que apresentar maior estabilidade.

Observação 3.2.4. Ao longo deste trabalho será utilizado o nível elevado

$$k_1 = \lceil n^{0.995} \rceil, \quad (3.44)$$

onde $\lceil x \rceil$ representa a parte inteira de x , para estimar o parâmetro de segunda ordem ρ . Esta decisão resulta dos comentários em Gomes e Martins [28] relativos à vantagem da estimação externa do parâmetro de segunda ordem relativamente à estimação interna no mesmo nível k . A estimação simultânea de parâmetros de primeira e segunda ordem no mesmo nível k produz uma elevada volatilidade nas trajectórias do valor médio e erro médio quadrático.

Observação 3.2.5. Se $\rho > -49.75$ pode-se garantir que $\sqrt{k_1}A^2(n/k_1) \rightarrow \infty$ e consequentemente

$$\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k_1) - \rho = \begin{cases} O_p(A(n/k_1)) = O_p(n^{0.005\rho}), & \rho \geq \rho' \\ O_p(B(n/k_1)) = O_p(n^{0.005\rho'}), & \rho < \rho' \end{cases}, \quad (3.45)$$

ou seja $(\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k_1) - \rho) = O_p(n^{0.005\rho^{\max}})$, onde $\rho^{\max} = \max(\rho, \rho')$.

É ainda possível verificar que para qualquer nível intermédio, k ,

$$(\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k_1) - \rho) \ln(n/k) = o_p(1) \quad (3.46)$$

e

$$\sqrt{k}A(n/k)(\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k_1) - \rho) \ln(n/k) = o_p(1), \quad (3.47)$$

sempre que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito.

3.3 Estimadores baseados nos espaçamentos escalados das log-observações

Em modelos onde $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, tal como acontece em todos os modelos pertencentes à classe de Hall, Feuerverger and Hall [19] utilizaram os espaçamentos escalados das log observações, definidos em (3.2), na estimação conjunta de (γ, ρ, β) . Nesse trabalho, e admitindo uma condição de segunda ordem, os autores mostraram que os espaçamentos, U_i , são aproximadamente exponenciais independentes de valor médio $\gamma \exp \{\beta(i/n)^{-\rho}\}$, isto é,

$$\begin{aligned} U_i &\stackrel{d}{=} \gamma E_i + i \frac{e^{\rho E_i/i} - 1}{\rho} A(n/i)(1 + o_p(1)) \\ &\stackrel{d}{=} \gamma E_i \{1 + \beta (n/i)^\rho\} (1 + o_p(1)) \stackrel{d}{=} \gamma E_i \exp \{-\beta (i/n)^{-\rho}\} (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

A verosimilhança associada aos k log espaçamentos, U_i , $1 \leq i \leq k$, é,

$$\begin{aligned} \ln L &= \sum_{i=1}^k \ln \left[\frac{1}{\gamma \exp \{\beta(i/n)^{-\rho}\}} \exp \left(-\frac{1}{\gamma \exp \{\beta(i/n)^{-\rho}\}} U_i \right) U_i \right] \\ &= -k \ln \gamma - \beta \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{n} \right)^{-\rho} - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k U_i \exp \left\{ -\beta \left(\frac{i}{n} \right)^{-\rho} \right\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Não é aconselhável fazer a estimação conjunta de γ , ρ e β utilizando os estimadores que resultam de (3.48). A sua estimação requer a resolução computacional de um sistema de equações não lineares, onde existem problemas de convergência.

No caso de conhecermos os valores dos parâmetros de segunda ordem, ρ e β , conseguimos obter uma expressão explícita para o estimador de máxima verosimilhança de γ ,

$$\hat{\gamma}_n^{ML}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i e^{-\beta \left(\frac{i}{n} \right)^{-\rho}}. \quad (3.49)$$

Se admitirmos que apenas conhecemos o valor do parâmetro ρ , os estimadores de máxima verosimilhança são obtidos através da resolução do sistema de equações,

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i e^{-\beta \left(\frac{i}{n} \right)^{-\rho}} \\ \sum_{i=1}^k i^{-\rho} U_i e^{-\beta \left(\frac{i}{n} \right)^{-\rho}} = \gamma \sum_{i=1}^k i^{-\rho} \end{cases}.$$

Não é possível escrever explicitamente os estimadores dos parâmetros γ e β . A estimação destes parâmetros terá de ser feita recorrendo a métodos numéricos. Utilizando a aproximação de primeira ordem $e^x = 1 + x + o(x)$, $x \rightarrow 0$, proposta em Gomes e Martins [28], conseguimos resolver o sistema de equações em ordem a γ e β , obtendo os estimadores de “máxima verosimilhança”,

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\gamma} = \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i^{-\rho} U_i}{\frac{\left(\sum_{i=1}^k i^{-\rho}\right) \sum_{i=1}^k U_{i-k} - \sum_{i=1}^k i^{-2\rho} U_i}{\left(\sum_{i=1}^k i^{-\rho}\right) \sum_{i=1}^k i^{-\rho} U_{i-k}}} \\ \hat{\beta} = \frac{1}{n^\rho} \frac{\left(\sum_{i=1}^k i^{-\rho}\right) \sum_{i=1}^k U_{i-k} - \sum_{i=1}^k i^{-\rho} U_i}{\left(\sum_{i=1}^k i^{-\rho}\right) \sum_{i=1}^k i^{-\rho} U_{i-k} - \sum_{i=1}^k i^{-2\rho} U_i} \end{cases}$$

Assim, se $\hat{\rho}$ representar um estimador consistente de ρ , vamos considerar os estimadores

$$\hat{\gamma}_n^{ML(\hat{\rho})}(k) = ML(k) := N_n^{(1)}(k) - N_n^{(1-\hat{\rho})}(k) \frac{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \binom{i}{k}^{-\hat{\rho}}\right) N_n^{(1)}(k) - N_n^{(1-\hat{\rho})}(k)}{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \binom{i}{k}^{-\hat{\rho}}\right) N_n^{(1-\hat{\rho})}(k) - N_n^{(1-2\hat{\rho})}(k)} \quad (3.50)$$

e

$$\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k) := \left(\frac{k}{n}\right)^{\hat{\rho}} \frac{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \binom{i}{k}^{-\hat{\rho}}\right) N_n^{(1)}(k) - N_n^{(1-\hat{\rho})}(k)}{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \binom{i}{k}^{-\hat{\rho}}\right) N_n^{(1-\hat{\rho})}(k) - N_n^{(1-2\hat{\rho})}(k)}. \quad (3.51)$$

Em seguida apresentamos algumas propriedades assintóticas destes estimadores.

Teorema 3.3.1. *Para k intermédio, $\hat{\gamma}_n^{ML(\rho)}(k)$ é consistente para a estimação do índice de valores extremos γ . Se também se verificar a condição de variação regular de terceira ordem, $\hat{\gamma}_n^{ML(\rho)}(k)$ tem a seguinte distribuição assintótica:*

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_n^{ML(\rho)}(k) &\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma \sigma_{ML}}{\sqrt{k}} Z_k^{ML} \\ &+ (1-\rho) \left(\frac{A^2(n/k)}{(1-2\rho)(1-3\rho)\gamma} - \frac{\rho' A(n/k) B(n/k)}{\rho(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')} \right) (1+o_p(1)) \end{aligned}$$

onde

$$Z_k^{ML} = \frac{1}{\sigma_{ML}} \left[\left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^2 \bar{Z}_k^{(1)} - \frac{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{\rho^2} \bar{Z}_k^{(1-\rho)} \right],$$

é uma v.a. assintoticamente normal padrão, e

$$\sigma_{ML}^2 = \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^2.$$

Demonstração.

Podemos escrever

$$\widehat{\gamma}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k) = N_n^{(1)} - N_n^{(1-\rho)}(k) \frac{\varphi_1(k)}{\varphi_2(k)}.$$

Utilizando o resultado presente no Teorema 3.1.1, resulta que

$$\begin{aligned} \varphi_1(k) &= \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{-\rho} \right) N_n^{(1)}(k) - N_n^{(1-\rho)}(k) \\ &\stackrel{d}{=} \frac{1}{1-\rho} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \left(\overline{Z}_k^{(1)} - \frac{1-\rho}{\sqrt{1-2\rho}} \overline{Z}_k^{(1-\rho)} \right) - \frac{\rho^2}{(1-\rho)(1-2\rho)} A(n/k) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho(\rho+\rho')}{(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')} A(n/k)B(n/k) \right\} (1 + o_p(1)), \end{aligned} \quad (3.52)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_2(k) &= \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k} \right)^{-\rho} \right) N_n^{(1-\rho)}(k) - N_n^{(1-2\rho)}(k) \\ &\stackrel{d}{=} \frac{\gamma\rho^2}{(1-\rho)^2(1-2\rho)} + \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \left(\frac{\overline{Z}_k^{(1-\rho)}}{\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}} - \frac{\overline{Z}_k^{(1-2\rho)}}{\sqrt{1-4\rho}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\rho^2 A(n/k)}{(1-\rho)(1-2\rho)(1-3\rho)} - \frac{\rho(2\rho+\rho')A(n/k)B(n/k)}{(1-\rho)(1-2\rho-\rho')(1-3\rho-\rho')} \right\} (1 + o_p(1)). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Recorrendo à aproximação (2.45) podemos garantir a seguinte representação assintótica,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1(k)}{\varphi_2(k)} &\stackrel{d}{=} - \frac{(1-\rho)(1-2\rho)}{\gamma\rho^2} \left[\left(\overline{Z}_k^{(1)} - \frac{1-\rho}{\sqrt{1-2\rho}} \overline{Z}_k^{(1-\rho)} \right) - \frac{\rho^2 A(n/k)}{(1-\rho)(1-2\rho)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho(\rho+\rho')A(n/k)B(n/k)}{(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')} + \frac{2\rho^2 A^2(n/k)}{\gamma(1-2\rho)(1-3\rho)} \right] (1 + o_p(1)). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Como

$$\begin{aligned} N_n^{(1-\rho)}(k) \frac{\varphi_1(k)}{\varphi_2(k)} &\stackrel{d}{=} - \frac{(1-2\rho)}{\rho^2} \left[\left(\overline{Z}_k^{(1)} - \frac{1-\rho}{\sqrt{1-2\rho}} \overline{Z}_k^{(1-\rho)} \right) - \frac{\rho^2 A(n/k)}{(1-\rho)(1-2\rho)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho(\rho+\rho')A(n/k)B(n/k)}{(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')} + \frac{(1-\rho)\rho^2 A(n/k)}{(1-2\rho)^2(1-3\rho)\gamma} \right] (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_n^{ML(\rho)}(k) \stackrel{d}{=} & \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \left[\left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^2 \overline{Z}_k^{(1)} - \frac{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{\rho^2} \overline{Z}_k^{(1-\rho)} \right] \\ & + (1-\rho) \left(\frac{A^2(n/k)}{(1-2\rho)(1-3\rho)\gamma} - \frac{\rho' A(n/k)B(n/k)}{\rho(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')} \right) (1+o_p(1)), \end{aligned}$$

tal como se queria demonstrar. \square

Observação 3.3.1. *Para muitos dos modelos de cauda pesada, introduzidos na secção 2.4, o parâmetro de terceira ordem ρ' é igual ao parâmetro de segunda ordem ρ . Nestas condições, o termo dominante de viés de $\widehat{\gamma}_n^{ML(\rho)}(k)$ é*

$$\frac{A(n/k)}{(1-2\rho)(1-3\rho)} \left(\frac{A(n/k)}{\gamma} - B(n/k) \right).$$

Verifica-se ainda para alguns modelos, tais como o Burr, o GP ou o Log-Logístico, onde não só $\rho' = \rho$, mas também $A(t) = \gamma B(t)$, que o termo dominante de viés assintótico é nulo.

Observação 3.3.2. *O resultado enunciado no Corolário 3.2.1 também é válido para $\widehat{\gamma}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k)$.*

Proposição 3.3.1 (Gomes and Martins [28]). *Se se verificar a condição de segunda ordem, (2.42), com $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, $\rho < 0$, se $k = k_n$ é uma sequência intermédia, (2.17), e se $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$, o estimador $\widehat{\beta}$ é consistente para β . Pode-se ainda demonstrar que:*

$$\widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k) \stackrel{d}{=} \beta + \frac{\gamma\beta(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{\rho\sqrt{k}A(n/k)} W_k^\beta + R_k^\beta, \quad \text{com } R_k^\beta = o_p(1),$$

onde

$$W_k^\beta := \frac{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{|\rho|} \left(\frac{\overline{Z}_k^{(1)}}{1-\rho} - \frac{\overline{Z}_k^{(1-\rho)}}{\sqrt{1-2\rho}} \right)$$

é assintoticamente normal padrão.

Se também se verificar a condição de variação regular de terceira ordem (2.43) podemos

obter mais informação acerca do termo de viés, R_k^β , isto é obtemos a representação em distribuição,

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k) \stackrel{d}{=} & \beta + \frac{\gamma\beta(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{\rho\sqrt{k}A(n/k)} W_k^\beta \\ & + \beta(1-\rho) \left(\frac{(1-2\rho)(\rho+\rho')B(n/k)}{\rho(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')} - \frac{2A(n/k)}{\gamma(1-3\rho)} \right) (1 + o_p(1)). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Demonstração.

Apenas será demonstrado o último resultado, (3.55). De modo análogo à demonstração do Teorema 3.3.1, e usando a hipótese $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, podemos escrever

$$\widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k) = \left(\frac{k}{n}\right)^\rho \frac{\varphi_1(k)}{\varphi_2(k)} = \frac{\gamma \beta}{A(n/k)} \times \frac{\varphi_1(k)}{\varphi_2(k)},$$

onde $\varphi_1(k)$ e $\varphi_2(k)$ estão definidos em (3.52) e (3.53), respectivamente. Utilizando a representação em distribuição de $\varphi_1(k)/\varphi_2(k)$, (3.54), verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k) \stackrel{d}{=} & \beta + \frac{\gamma\beta(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{\rho\sqrt{k}A(n/k)} W_k^\beta \\ & + \beta(1-\rho) \left(\frac{(1-2\rho)(\rho+\rho')B(n/k)}{\rho(1-\rho-\rho')(1-2\rho-\rho')} - \frac{2A(n/k)}{\gamma(1-3\rho)} \right) (1 + o_p(1)). \end{aligned}$$

□

Observação 3.3.3. Se $\sqrt{k}A^2(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda_B$, ambos finitos, então

$$\sqrt{k}A(n/k) \left(\frac{\widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k) - \beta}{\beta} \right) \stackrel{d}{\sim} N(\lambda_A u_\beta + \lambda_B u_\beta, \gamma^2 \sigma_\beta^2) \quad (3.56)$$

Observação 3.3.4. Nas condições indicadas na Observação 3.3.1, ou seja, para modelos de cauda pesada onde $\rho' = \rho$, o termo dominante de viés de $\widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k)$ é

$$\frac{2\beta(1-\rho)}{1-3\rho} \left(B(n/k) - \frac{A(n/k)}{\gamma} \right).$$

Para modelos como, por exemplo, Burr, GP, ou Log-Logístico, onde $A(t) = \gamma B(t)$ o termo dominante de viés assintótico de $\widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k)$ é nulo.

Caso se pretenda estimar ρ no mesmo nível k usado para estimar β podemos dar mais informações relativas ao comportamento assintótico de $\widehat{\beta}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k)$.

Teorema 3.3.2. *Nas condições do Teorema anterior e sempre que se considerar um estimador de ρ tal que*

$$\widehat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n), \quad n \longrightarrow \infty, \quad (3.57)$$

então $\widehat{\beta}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k)$ é consistente para a estimação de β . É ainda possível garantir assintoticamente a seguinte representação em distribuição

$$\widehat{\beta}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k) - \beta \sim -\beta \ln(n/k) (\widehat{\rho} - \rho).$$

Consequentemente se $\sqrt{k}A^2(n/k) \longrightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \longrightarrow \lambda_B$, finitos podemos garantir que

$$\widehat{\beta}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k) - \beta = O_p\left(\frac{\ln(n/k)}{\sqrt{k}A(n/k)}\right).$$

Se $\sqrt{k}A^2(n/k) \longrightarrow \infty$ ou $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \longrightarrow \infty$ então

$$\widehat{\beta}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k) - \beta = \begin{cases} O_p(\ln(n/k)A(n/k)), & \rho \geq \rho' \\ O_p(\ln(n/k)B(n/k)), & \rho < \rho' \end{cases}. \quad (3.58)$$

Demonstração.

Podemos representar o estimador da seguinte forma,

$$\widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k) = \left(\frac{k}{n}\right)^\rho \varphi(\rho).$$

Então

$$\frac{\partial \widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k)}{\partial \rho} = \left(\frac{k}{n}\right)^\rho \left[\ln\left(\frac{k}{n}\right) \varphi(\rho) + \varphi'(\rho) \right] \sim \left(\frac{k}{n}\right)^\rho \ln\left(\frac{k}{n}\right) \varphi(\rho).$$

Consequentemente, aplicando o método delta, obtemos

$$\widehat{\beta}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k) \stackrel{d}{=} \widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k) - \widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k)(\widehat{\rho} - \rho) \ln(n/k)(1 + o_p(1)).$$

Os resultados (3.55) e (3.57) permitem garantir a consistência de $\widehat{\beta}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k)$ para a estimação de β e garantir a seguinte representação assintótica,

$$\widehat{\beta}_n^{ML(\widehat{\rho})}(k) \stackrel{d}{=} \beta - \beta(\widehat{\rho}(k) - \rho) \ln(n/k)(1 + o_p(1)).$$

□

Observação 3.3.5. *Se considerarmos $\widehat{\beta} := \widehat{\beta}_n^{ML(\widehat{\rho}(k_1))}(k_1)$, onde $\widehat{\rho}$ é o estimador introduzido em (3.38), e k_1 o nível dado em (3.44) podemos garantir que $\widehat{\beta} - \beta = O_p(\ln(n/k_1)(\widehat{\rho} - \rho))$, que é no máximo da ordem $(\widehat{\rho} - \rho) \ln n$.*

Capítulo 4

Estudo detalhado de uma classe de estimadores semi paramétrica, de viés reduzido, do índice de valores extremos

A estimação semi-paramétrica do índice de valores extremos positivo, γ , é um tema importante na Teoria de Valores Extremos. Devido à existência de uma componente de viés elevada, estimadores clássicos tal como, por exemplo, o estimador de Hill nem sempre são os mais indicados para estimar o índice de valores extremos. A maior dificuldade resulta do escolha do nível k a utilizar. Assim, na secção 4.1 começamos por introduzir uma classe de estimadores semi-paramétricos “assintoticamente” centrados, isto é, com componente dominante de viés nula, de modo a reduzir o erro médio quadrático (enquanto função de k). Esta classe tem um parâmetro de controlo, $\lambda > 1$, que depende do parâmetro de segunda ordem ρ , e que deverá ser correctamente estimado. Nas secções 4.2 e 4.3 abordamos o comportamento assintótico da referida classe de estimadores sob condições de variação regular de terceira ordem. Na secção 4.2 admitimos que o parâmetro ρ é conhecido, enquanto que na secção 4.3 admitimos que é estimado externamente utilizando o estimador especificado em (3.38). Recorrendo ao método de Monte Carlo, apresentamos na secção 4.4, resultados para amostras de dimensão finita, da classe de estimadores introduzida neste capítulo, para alguns modelos de cauda pesada pertencentes à classe de Hall, (2.62).

4.1 Nova classe de estimadores semi-paramétricos

Os estimadores clássicos do índice de valores extremos positivo permitem o cálculo das estimativas com enorme facilidade e rapidez, mas apresentam propriedades teóricas que dificultam a escolha do nível k . A escolha deste nível k não é fácil porque se por um lado a variância assintótica diminui à medida que k aumenta, por outro, o quadrado do viés aumenta. Por esta razão têm surgido nos últimos anos vários trabalhos na literatura relativos à redução de viés. Podemos destacar Peng [38], Beirlant *et al.* [3], Gomes *et al.* [25], Gomes e Martins [26] ou Caeiro e Gomes [5]). Alguns dos novos estimadores presentes nestes trabalhos têm a componente dominante de viés nula. Como consequência, as trajetórias amostrais das estimativas costumam ser mais estáveis, junto ao verdadeiro valor do índice de valores extremos, tornando a escolha do nível k mais simples.

Considere-se a classe de estimadores semi-paramétricos estudada em Caeiro e Gomes [5], sob condições de segunda ordem, e mais tarde em Caeiro *et al.* [6], sob condições de terceira ordem,

$$\widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) = \frac{\mu_{\lambda-1}^{(1)}}{M_n^{(\lambda-1)}(k)} \left(\frac{M_n^{(2\lambda)}(k)}{\mu_{2\lambda}^{(1)}} \right)^{1/2}, \quad (4.1)$$

onde $M_n^{(\lambda)}(k)$ é a estatística introduzida em (3.3) e $\mu_{\lambda}^{(1)} = \Gamma(\lambda + 1)$. Esta classe é um caso particular de (3.34) ($\theta = 2$). Se $\rho < 0$ o parâmetro de controlo λ pode ser escolhido de modo a eliminar o termo dominante de viés assintótico. Vamos assim considerar que o parâmetro $\lambda = \lambda(\rho)$ é estimado externamente num nível k_1 mais elevado do que o nível k utilizado para estimar o índice de valores extremos. Logo, vamos considerar e estudar num contexto de terceira ordem, a classe de estimadores assintoticamente centrados, baseada na estimação externa dos parâmetros λ e ρ ,

$$\widehat{\gamma}_n^{CG(\widehat{\lambda})}(k) = \frac{\mu_{\widehat{\lambda}-1}^{(1)}}{M_n^{(\widehat{\lambda}-1)}(k)} \left(\frac{M_n^{(2\widehat{\lambda})}(k)}{\mu_{2\widehat{\lambda}}^{(1)}} \right)^{1/2}, \quad (4.2)$$

onde

$$\widehat{\lambda} = - \frac{\ln \left[1 - \widehat{\rho} - \sqrt{(1 - \widehat{\rho})^2 - 1} \right]}{\ln(1 - \widehat{\rho})}$$

e $\hat{\rho}$ representa genericamente um estimador consistente de ρ .

Observação 4.1.1. A escolha do parâmetro de controlo λ poderá também ser feita com base na estabilidade das trajectórias amostrais. Pode-se representar graficamente, para vários valores de λ , trajectórias amostrais e escolher a que apresentar maior estabilidade. Como ilustração, apresentamos na Figura 4.1 estimativas de $\hat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k)$, calculadas a partir de uma amostra de dimensão 5000 do modelo $Burr(\gamma, \rho)$, (2.49).

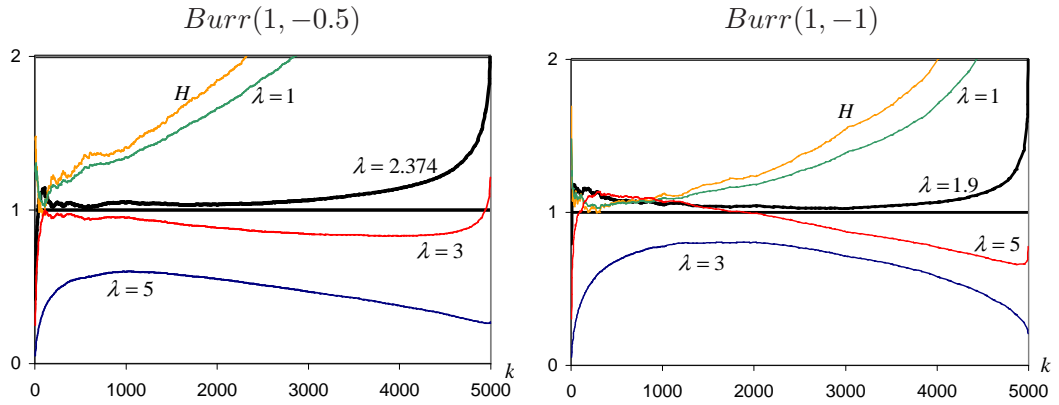


Figura 4.1: Trajectórias amostrais de $\hat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k)$ calculadas a partir de uma amostra de dimensão $n = 5000$ do modelo $Burr$. Os valores $\lambda = 2.374$ (esquerda) e $\lambda = 1.9$ (direita) foram escolhidos de acordo com a Tabela 3.1 e são os que anulam a componente dominante de viés assintótico.

4.2 Propriedades assintóticas

Teorema 4.2.1. Se admitirmos que k é uma sequência intermédia verificando (2.17), e que se verifica a condição de variação regular de terceira ordem para a cauda, (2.43), podemos garantir a seguinte representação assintótica em distribuição,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) &\stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma \sigma_{CG(\lambda)}}{\sqrt{k}} Z_k^{CG(\lambda)} + \left(\lambda \bar{\mu}_{2\lambda}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho) \right) A(n/k) + \\ &+ \frac{1}{2\gamma} \left(\lambda(2\lambda - 1) \bar{\mu}_{2\lambda}^{(3)}(\rho) - \lambda^2 (\bar{\mu}_{2\lambda}^{(2)}(\rho))^2 + 2(\lambda - 1)^2 (\bar{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho))^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\lambda - 1)(\lambda - 2) \bar{\mu}_{\lambda-1}^{(3)}(\rho) - 2\lambda(\lambda - 1) \bar{\mu}_{2\lambda}^{(2)}(\rho) \bar{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho) \right) A^2(n/k) (1 + o_p(1)) + \\ &+ \left(\lambda \bar{\mu}_{2\lambda}^{(2)}(\rho + \rho') - (\lambda - 1) \bar{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho + \rho') \right) A(n/k) B(n/k) (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

onde

$$Z_k^{CG(\lambda)} = \frac{1}{\sigma_{CG(\lambda)}} \left(\frac{\bar{\sigma}_{2\lambda}^{(1)}}{2} Z_k^{(2\lambda)} - \bar{\sigma}_{\lambda-1}^{(1)} Z_k^{(\lambda-1)} \right),$$

é assintoticamente normal padrão, e

$$\sigma_{CG(\lambda)}^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{\Gamma(4\lambda)}{\lambda\Gamma^2(2\lambda)} + \frac{4\Gamma(2\lambda-1)}{\Gamma^2(\lambda)} - \frac{2\Gamma(3\lambda)}{\lambda\Gamma(2\lambda)\Gamma(\lambda)} - 1 \right].$$

Demonstração.

Este resultado é um caso particular do resultado presente no Teorema 3.2.2. \square

Observação 4.2.1. O termo dominante de viés de $\hat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k)$ é

$$b_\lambda(\rho) = \lambda\bar{\mu}_{2\lambda}^{(2)}(\rho) - (\lambda-1)\bar{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho) \\ = \begin{cases} \frac{1}{2\rho} [(1-\rho)^{-2\lambda} - 2(1-\rho)^{-\lambda+1} + 1], & \rho < 0; \\ 1, & \rho = 0. \end{cases}$$

De acordo com o resultado indicado na Proposição 3.2.3, se $\rho < 0$, então $b_{\lambda_0}(\rho) = 0$, onde

$$\lambda_0 = \lambda_0(\rho) = -\frac{\ln \left[1 - \rho - \sqrt{(1-\rho)^2 - 1} \right]}{\ln(1-\rho)}.$$

Proposição 4.2.1. No caso de, no estimador em (4.1), se escolher $\lambda = \lambda_0$ de modo a anular o termo dominante de viés, ou seja, de modo a verificar

$$\lambda_0\bar{\mu}_{2\lambda_0}^{(2)}(\rho) - (\lambda_0-1)\bar{\mu}_{\lambda_0-1}^{(2)}(\rho) = 0,$$

e se admitir a validade da condição de terceira ordem, (2.43), obtém-se a seguinte distribuição limite,

$$\hat{\gamma}_n^{CG(\lambda_0)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \left(\frac{\bar{\sigma}_{2\lambda_0}^{(1)}}{2} Z_k^{(2\lambda_0)} - \bar{\sigma}_{\lambda_0-1}^{(1)} Z_k^{(\lambda_0-1)} \right) + \\ + \left[\frac{1}{2\gamma} \left(\lambda(2\lambda-1)\bar{\mu}_{2\lambda}^{(3)}(\rho) - \lambda^2(\bar{\mu}_{2\lambda}^{(2)}(\rho))^2 - (\lambda-1)(\lambda-2)\bar{\mu}_{\lambda-1}^{(3)}(\rho) \right) A(n/k) \right. \\ \left. + \left(\lambda\bar{\mu}_{2\lambda}^{(2)}(\rho + \rho') - (\lambda-1)\bar{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho + \rho') \right) B(n/k) \right] A(n/k)(1 + o_p(1)). \quad (4.3)$$

Consequentemente, $\sqrt{k}\{\hat{\gamma}_n^{CG(\lambda_0)}(k) - \gamma\}$ é assintoticamente normal não só quando $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow 0$, mas também quando $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$ (finito ou infinito), desde que $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow 0$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow 0$.

Se $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, ambos finitos, existe um termo de viés assintótico não nulo dado por,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_A}{2\gamma} \left(\lambda(2\lambda - 1)\bar{\mu}_{2\lambda}^{(3)}(\rho) - \lambda^2(\bar{\mu}_{2\lambda}^{(2)}(\rho))^2 - (\lambda - 1)(\lambda - 2)\bar{\mu}_{\lambda-1}^{(3)}(\rho) \right) \\ & + \lambda_B \left(\lambda\bar{\mu}_{2\lambda}^{(2)}(\rho + \rho') - (\lambda - 1)\bar{\mu}_{\lambda-1}^{(2)}(\rho + \rho') \right). \end{aligned}$$

4.3 Propriedades assintóticas do estimador do índice de valores extremos, baseado na estimação externa de ρ

No que se segue considere-se a seguinte notação:

$$\bar{\mu}_\lambda^{(1)} := \frac{\mu_\lambda'^{(1)}}{\mu_\lambda^{(1)}}, \quad \text{com} \quad \mu_\lambda'^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu_\lambda^{(1)}; \quad (4.4)$$

$$\bar{\sigma}_\lambda^{(1)} := \frac{\sigma_\lambda'^{(1)}}{\sigma_\lambda^{(1)}}, \quad \text{com} \quad \sigma_\lambda'^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \sigma_\lambda^{(1)}; \quad (4.5)$$

$$\bar{\mu}_\lambda^{(j)}(\rho) := \frac{\mu_\lambda^{(j)}(\rho)'}{\mu_\lambda^{(j)}(\rho)}, \quad \text{com} \quad \mu_\lambda^{(j)}(\rho)' = \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu_\lambda^{(j)}(\rho), \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (4.6)$$

$$\bar{\sigma}_\lambda^{(j)}(\rho) := \frac{\sigma_\lambda^{(j)}(\rho)'}{\sigma_\lambda^{(j)}(\rho)}, \quad \text{com} \quad \sigma_\lambda^{(j)}(\rho)' = \frac{\partial}{\partial \lambda} \sigma_\lambda^{(j)}(\rho), \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (4.7)$$

Começamos por apresentar uma proposição que será necessária para apresentarmos propriedades do estimador.

Proposição 4.3.1. *Sob a validade da condição de terceira ordem em (2.43) e para k intermédio, podemos escrever,*

$$\begin{aligned}
M_n^{(\lambda)}(k) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} M_n^{(\lambda)}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_{ik}^\lambda \ln V_{ik} \\
&\stackrel{d}{=} \gamma \lambda \mu_\lambda^{(1)} \left\{ \ln \gamma + \bar{\mu}_\lambda^{(1)} + \left[\frac{\dot{\bar{\sigma}}_\lambda}{\sqrt{k}} \dot{Z}_k^{(\lambda)} + \left((1 + \lambda \ln \gamma) \bar{\mu}_\lambda^{(2)}(\rho) + \lambda \bar{\mu}_\lambda^{(2)}(\rho) \right) \frac{A(n/k)}{\gamma} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left((1 + \lambda \ln \gamma) \bar{\mu}_\lambda^{(2)}(\rho + \rho') + \lambda \bar{\mu}_\lambda^{(2)}(\rho + \rho') \right) \frac{A(n/k)B(n/k)}{\gamma} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left((2\lambda - 1 + \lambda(\lambda - 1) \ln \gamma) \bar{\mu}_\lambda^{(3)}(\rho) + \lambda(\lambda - 1) \bar{\mu}_\lambda^{(3)}(\rho) \right) \frac{A^2(n/k)}{2\gamma^2} \right] (1 + o_p(1)) \right\},
\end{aligned}$$

onde $V_{ik} = \ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n}$, $1 \leq i \leq k < n$, são os excessos das log-observações, definidos em (3.1),

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_\lambda &:= \sqrt{\ln^2(\gamma)(\sigma_\lambda^{(1)})^2 + 2 \ln(\gamma)(\mu_{2\lambda}^{(1)} - \mu_\lambda^{(1)} \mu_\lambda^{\prime(1)}) + \mu_{2\lambda}^{\prime(1)} - (\mu_\lambda^{\prime(1)})^2}, \\
\dot{\bar{\sigma}}_\lambda &:= \frac{\dot{\sigma}_\lambda}{\mu_\lambda^{(1)}},
\end{aligned}$$

e

$$\dot{Z}_k^{(\lambda)} := \frac{\sqrt{k}}{\dot{\sigma}_\lambda} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^\lambda \ln(\gamma E_i) - (\mu_\lambda^{(1)} \ln \gamma + \mu_\lambda^{\prime(1)}) \right),$$

é assintoticamente normal padrão.

Temos também,

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_n^{(\lambda)}(k) &:= \frac{\mu_\lambda^{(1)} M_n^{(\lambda)}(k) - \mu_\lambda^{\prime(1)} M_n^{(\lambda)}(k)}{(\mu_\lambda^{(1)})^2} \left(\frac{M_n^{(\lambda)}(k)}{\mu_\lambda^{(1)}} \right)^{-1} \stackrel{d}{=} \gamma \lambda \left[-\ln \gamma + \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \widetilde{Z}_k^{(\lambda)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma} g_\lambda(\rho) A(n/k) + \frac{1}{\gamma} g_\lambda(\rho + \rho') A(n/k) B(n/k) + \frac{1}{2\gamma^2} h_\lambda(\gamma, \rho) A^2(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right],
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}_k^{(\lambda)} &= (\bar{\mu}_\lambda^{(1)} - \ln \gamma) \bar{\sigma}_\lambda^{(1)} Z_k^{(\lambda)} - \dot{\bar{\sigma}}_\lambda^{(1)} \dot{Z}_k^{(\lambda)}, \\
g_\lambda(\rho) &= (\lambda \bar{\mu}_\lambda^{(1)} - 1) \bar{\mu}_\lambda^{(2)}(\rho) - \lambda \bar{\mu}_\lambda^{(2)}, \\
h_\lambda(\rho) &= \left(\lambda(\lambda - 1) \bar{\mu}_\lambda^{\prime(1)} - 2\lambda + 1 \right) \bar{\mu}_\lambda^{(3)}(\rho) - \lambda(\lambda - 1) \bar{\mu}_\lambda^{\prime(3)}(\rho) - 2\lambda^2 \ln \gamma \left(\bar{\mu}_\lambda^{(2)}(\rho) \right)^2.
\end{aligned}$$

Teorema 4.3.1. *Nas condições do teorema anterior, se substituirmos ρ por um estimador consistente, obtemos a seguinte representação em distribuição,*

$$\widehat{\gamma}_n^{CG(\widehat{\lambda})}(k) \stackrel{d}{=} \widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) + (\widehat{\rho} - \rho) \phi(k) (1 + o_p(1)),$$

onde $\phi(k) = O_p(1/\sqrt{k}) + O_p(A(n/k)) + O_p(A^2(n/k)) + O_p(A(n/k)B(n/k))$.

Demonstração.

Utilizando o método delta, podemos escrever,

$$\widehat{\gamma}_n^{CG(\widehat{\lambda})}(k) = \widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) + (\widehat{\rho} - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) \right) (1 + o_p(1)).$$

O cálculo da derivada, $\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) \right)$, poderá ser mais simples se utilizarmos a regra da derivada da função composta,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \rho},$$

com

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = \lambda'(\rho) = -\frac{1 + \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho(\rho-2)}}}{\ln(1-\rho) \times (1-\rho - \sqrt{\rho(\rho-2)})} - \frac{\ln(1-\rho - \sqrt{\rho(\rho-2)})}{(1-\rho) \times \ln^2(1-\rho)}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) \right) &= \frac{\mu_{\lambda-1}^{(1)} M_n^{(\lambda-1)}(k) - \mu_{\lambda-1}^{(1)} M_n'^{(\lambda-1)}(k)}{\left(M_n^{(\lambda-1)}(k) \right)^2} \left(\frac{M_n^{(2\lambda)}(k)}{\mu_{2\lambda}^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\mu_{\lambda-1}^{(1)}}{M_n^{(\lambda-1)}(k)} \left(\frac{M_n^{(2\lambda)}(k)}{\mu_{2\lambda}^{(1)}} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\mu_{2\lambda}^{(1)} M_n'^{(2\lambda)}(k) - \mu_{2\lambda}^{(1)} M_n^{(2\lambda)}(k)}{\left(\mu_{2\lambda}^{(1)} \right)^2} \times 2 \\ &= \left(\frac{M_n^{(\lambda-1)}(k)}{\mu_{\lambda-1}^{(1)}} \right)^{-1} \left(\frac{M_n^{(2\lambda)}(k)}{\mu_{2\lambda}^{(1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{\mu_{\lambda-1}^{(1)} M_n^{(\lambda-1)}(k) - \mu_{\lambda-1}^{(1)} M_n'^{(\lambda-1)}(k)}{\left(\mu_{\lambda-1}^{(1)} \right)^2} \left(\frac{M_n^{(\lambda-1)}(k)}{\mu_{\lambda-1}^{(1)}} \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_{2\lambda}^{(1)} M_n'^{(2\lambda)}(k) - \mu_{2\lambda}^{(1)} M_n^{(2\lambda)}(k)}{\left(\mu_{2\lambda}^{(1)} \right)^2} \left(\frac{M_n^{(2\lambda)}(k)}{\mu_{2\lambda}^{(1)}} \right)^{-1} \right] \\ &= \widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) \left[\widetilde{M}_n^{(\lambda-1)}(k) - \widetilde{M}_n^{(2\lambda)}(k) \right], \end{aligned}$$

onde $\widetilde{M}_n^{(\lambda)}(k)$ é a v.a. definida na Proposição anterior. Resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) \right) &\stackrel{d}{=} \widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) \left(\frac{W_k^{*(\lambda)}}{\sqrt{k}} + \frac{g_\lambda^*(\rho)}{\gamma} A(n/k) + \frac{g_\lambda^*(\rho + \rho')}{\gamma} A(n/k)B(n/k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\gamma^2} h_\lambda^*(\gamma, \rho) A^2(n/k)(1 + o_p(1)) \right) \\ &\stackrel{d}{=} \left(\frac{W_k^{*(\lambda)}}{\sqrt{k}} + g_\lambda^*(\rho) A(n/k) + g_\lambda^*(\rho + \rho') A(n/k)B(n/k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_\lambda^*(\gamma, \rho)}{2\gamma} A^2(n/k)(1 + o_p(1)) \right), \end{aligned}$$

onde

$$g_\lambda^*(\rho) = g_{\lambda-1}(\rho) - g_{2\lambda}(\rho), \quad h_\lambda^*(\gamma, \rho) = h_{\lambda-1}(\gamma, \rho) - h_{2\lambda}(\gamma, \rho).$$

□

Observação 4.3.1. *O resultado do Teorema anterior permite-nos garantir que se $\widehat{\rho}$ é consistente para ρ , então $\widehat{\gamma}_n^{CG(\widehat{\lambda})}(k)$ é consistente para a estimação de γ . A consistência verifica-se com $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito ou infinito.*

É ainda possível garantir a normalidade assintótica de $\sqrt{k} \left(\widehat{\gamma}_n^{CG(\widehat{\lambda})}(k) - \gamma \right)$. O resultado do Teorema anterior permite verificar que

$$\begin{aligned} \sqrt{k} \left(\widehat{\gamma}_n^{CG(\widehat{\lambda})}(k) - \gamma \right) &= \sqrt{k} \left(\widehat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k) - \gamma \right) + \sqrt{k} \left\{ O_p(1/\sqrt{k}) + O_p(A(n/k)) \right. \\ &\quad \left. + O_p(A^2(n/k)) + O_p(A(n/k)B(n/k)) \right\} (\widehat{\rho} - \rho). \end{aligned}$$

Para garantir a normalidade assintótica é necessário que

$$\sqrt{k}(\widehat{\rho} - \rho) \left(O_p(1/\sqrt{k}) + O_p(A(n/k)) + O_p(A^2(n/k)) + O_p(A(n/k)B(n/k)) \right) = o_p(1).$$

Se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito, então resulta que $A(n/k) = O(1/\sqrt{k})$. Para se ter a normalidade assintótica é necessário que $\widehat{\rho} - \rho = o_p(1)$.

Se $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$ mas $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, podemos desprezar o termo de ordem $1/\sqrt{k}$, já que $1/\sqrt{k} = o(A(n/k))$ e é necessário exigir que $(\widehat{\rho} - \rho) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)}\right)$.

Se utilizarmos o estimador introduzido em (3.38), num nível elevado k_1 , duas situações podem ocorrer:

1. $\hat{\rho} - \rho = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{k_1 A(n/k_1)}}\right)$; Neste caso basta exigir que $k = o(k_1)$ para que se possa garantir a normalidade assintótica.
2. $\hat{\rho} - \rho = O_p(A(n/k_1))$; É preciso que $k = o\left(\left(\frac{n^2}{k_1}\right)^{-2\rho/(1-2\rho)}\right)$. Neste caso muito dificilmente se garante a normalidade assintótica, já que a hipótese $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$ obriga a que k seja de ordem superior a $n^{-2\rho/(1-2\rho)}$.

4.4 Comportamento exacto dos estimadores - estudo de simulação

Nesta secção serão utilizados os seguintes modelos pertencentes à classe de Hall, (2.63),

- modelo *Fréchet*, em (2.48), com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$);
- modelo *Burr*, em (2.49), com $\gamma = 1$ e $\rho \in \{-2, -1, -0.5\}$;
- modelo *t* de Student, em (2.53), com $\nu = 1, 2$ e 4 .

No caso do modelo *t* de Student apenas se consideraram os valores positivos da amostra.

Observação 4.4.1. Para os modelos *Fréchet* e *Burr* e para qualquer dos estimadores considerados, $Vies/\gamma$ e MSE/γ^2 são independentes de γ . Não existe necessidade de incluir na simulação o modelo *GP*, (2.51), porque

$$\mathbb{E}[\hat{\gamma}_n(k)|GP(\gamma)] = \gamma \times \mathbb{E}[\hat{\gamma}_n(k)|Burr(\gamma = 1, \rho = -\gamma)]$$

e

$$MSE[\hat{\gamma}_n(k)|GP(\gamma)] = \gamma^2 \times MSE[\hat{\gamma}_n(k)|Burr(\gamma = 1, \rho = -\gamma)].$$

A simulação não se baseou apenas no estimador em estudo $\hat{\gamma}_n^{CG(\lambda(\hat{\rho}))}(k)$ definido em (4.1). Para comparar os resultados deste novo estimador obtiveram-se também resultados para os estimadores $\gamma_n^H(k)$ em (3.5) e $\hat{\gamma}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$ em (3.50).

O estudo baseou-se numa simulação multi-amostra de dimensão $10000 = 10(\text{réplicas}) \times 1000(\text{“runs”})$ de modo a obter para os modelos referidos as estimativas,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_n^\bullet(k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \widehat{MSE}[\hat{\gamma}_n^\bullet(k)], \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ k_0^\bullet = \arg \min_k \widehat{MSE}[\hat{\gamma}_n^\bullet(k)], \\ \hat{\gamma}_n^\bullet = \hat{\gamma}_n^\bullet(k_0), \end{aligned}$$

onde \bullet representa um dos estimadores em estudo (“ H ”, “ CG ” ou “ ML ”). Os novos estimadores são também comparados com o estimador de Hill nos respectivos níveis óptimos, isto é, nos níveis onde o respectivo erro médio quadrático é mínimo, utilizando a medida de eficiência de $\hat{\gamma}_n^\bullet$ relativamente a $\hat{\gamma}_n^H$,

$$Efic_{\hat{\gamma}_n^\bullet | \hat{\gamma}_n^H} = \sqrt{\frac{\widehat{MSE}[\hat{\gamma}_n^H(k_0)]}{\widehat{MSE}[\hat{\gamma}_n^\bullet(k_0)]}}.$$

A utilização de 10 réplicas possibilitou o cálculo de intervalos de confiança a 95% para os parâmetros a estimar. No entanto devido à elevada quantidade de valores a apresentar, apenas indicamos os intervalos de confiança para a eficiência relativa.

Apresentamos resultados para $\hat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k)$ e $\hat{\gamma}_n^{ML(\rho)}(k)$ não só com ρ conhecido, mas também admitindo ρ desconhecido e estimado num nível mais baixo, $k_1 = [n^{0.995}]$, utilizando o estimador introduzido em (3.38), com o parâmetro de controlo τ escolhido de acordo com a Observação 3.2.3.

Nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 pode-se consultar, para os modelos e estimadores indicados, o nível óptimo, valor médio e erro médio quadrático simulados, nos respectivos níveis óptimos. Nas Tabelas 4.4 e 4.5 apresentamos, para cada modelo, as eficiências relativas de $\hat{\gamma}_n^{CG(\lambda)}(k)$, $\hat{\gamma}_n^{CG(\hat{\lambda})}(k)$, $\hat{\gamma}_n^{ML(\rho)}(k)$ e $\hat{\gamma}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$. Apresentamos na Figuras 4.2–4.8 os valores médios simulados e os respectivos erros médio quadráticos para os modelos Burr, Fréchet e t de Student.

Tabela 4.1: Fracção óptima da amostra simulada, k_0/n , dos estimadores do índice de valores extremos, H , CG e ML .

	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$								
H	0.415	0.320	0.282	0.254	0.208	0.187	0.164	0.134
$CG(\lambda)$	0.919	0.874	0.845	0.810	0.762	0.723	0.688	0.634
$CG(\hat{\lambda})$	0.887	0.809	0.768	0.727	0.663	0.622	0.572	0.512
$ML(\rho)$	0.990	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
$ML(\hat{\rho})$	0.915	0.790	0.725	0.675	0.584	0.521	0.464	0.399
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$								
H	0.227	0.143	0.115	0.093	0.070	0.056	0.047	0.034
$CG(\lambda)$	0.839	0.763	0.718	0.672	0.605	0.559	0.510	0.447
$CG(\hat{\lambda})$	0.896	0.837	0.805	0.770	0.726	0.689	0.659	0.620
$ML(\rho)$	0.990	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
$ML(\hat{\rho})$	0.990	0.923	0.796	0.669	0.537	0.430	0.358	0.267
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$								
H	0.104	0.052	0.036	0.027	0.018	0.014	0.010	0.007
$CG(\lambda)$	0.755	0.651	0.598	0.553	0.478	0.429	0.377	0.314
$CG(\hat{\lambda})$	0.515	0.389	0.330	0.277	0.208	0.175	0.140	0.099
$ML(\rho)$	0.990	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
$ML(\hat{\rho})$	0.791	0.425	0.325	0.238	0.155	0.123	0.123	0.085
modelo Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$								
H	0.336	0.217	0.180	0.143	0.107	0.087	0.072	0.052
$CG(\lambda)$	0.990	0.998	0.998	0.997	0.996	0.995	0.994	0.993
$CG(\hat{\lambda})$	0.975	0.917	0.893	0.848	0.776	0.712	0.631	0.501
$ML(\rho)$	0.947	0.803	0.741	0.679	0.593	0.536	0.463	0.409
$ML(\hat{\rho})$	0.899	0.789	0.782	0.790	0.786	0.799	0.802	0.807
modelo t de Student com $\nu = 1 (\gamma = 1, \rho = -2)$								
H	0.185	0.148	0.129	0.117	0.099	0.086	0.075	0.062
$CG(\lambda)$	0.350	0.378	0.365	0.348	0.324	0.305	0.286	0.261
$CG(\hat{\lambda})$	0.350	0.370	0.355	0.338	0.314	0.293	0.276	0.249
$ML(\rho)$	0.357	0.401	0.382	0.357	0.322	0.301	0.282	0.252
$ML(\hat{\rho})$	0.354	0.371	0.355	0.326	0.298	0.273	0.253	0.225
modelo t de Student com $\nu = 2 (\gamma = 0.5, \rho = -1)$								
H	0.104	0.066	0.054	0.044	0.033	0.028	0.020	0.016
$CG(\lambda)$	0.328	0.306	0.287	0.266	0.238	0.216	0.195	0.168
$CG(\hat{\lambda})$	0.350	0.363	0.352	0.340	0.323	0.310	0.300	0.289
$ML(\rho)$	0.364	0.353	0.320	0.293	0.250	0.221	0.194	0.163
$ML(\hat{\rho})$	0.369	0.431	0.447	0.459	0.475	0.483	0.485	0.485
modelo t de Student com $\nu = 4 (\gamma = 0.25, \rho = -0.5)$								
H	0.100	0.026	0.020	0.014	0.009	0.006	0.005	0.005
$CG(\lambda)$	0.262	0.236	0.214	0.196	0.170	0.149	0.130	0.107
$CG(\hat{\lambda})$	0.205	0.176	0.155	0.130	0.105	0.085	0.069	0.051
$ML(\rho)$	0.366	0.323	0.273	0.228	0.191	0.159	0.136	0.106
$ML(\hat{\rho})$	0.356	0.227	0.174	0.130	0.090	0.064	0.048	0.032

Tabela 4.2: Valor médio simulado, E , dos estimadores do índice de valores extremos, H , CG e ML , nos respectivos níveis ótimos.

	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$								
H	1.068	1.036	1.027	1.021	1.014	1.011	1.009	1.006
$CG(\lambda)$	1.046	1.029	1.023	1.017	1.011	1.008	1.006	1.004
$CG(\hat{\lambda})$	1.035	1.023	1.019	1.016	1.011	1.009	1.007	1.005
$ML(\rho)$	1.003	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$ML(\hat{\rho})$	1.031	1.022	1.018	1.015	1.011	1.009	1.007	1.005
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$								
H	1.140	1.078	1.061	1.049	1.036	1.028	1.024	1.017
$CG(\lambda)$	1.067	1.046	1.037	1.029	1.021	1.017	1.013	1.009
$CG(\hat{\lambda})$	1.045	1.031	1.025	1.019	1.013	1.009	1.006	1.004
$ML(\rho)$	1.002	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$ML(\hat{\rho})$	0.918	0.940	0.953	0.963	0.972	0.978	0.983	0.988
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$								
H	1.300	1.186	1.149	1.124	1.098	1.085	1.070	1.057
$CG(\lambda)$	1.094	1.069	1.058	1.050	1.039	1.032	1.026	1.020
$CG(\hat{\lambda})$	1.126	1.107	1.095	1.083	1.067	1.060	1.052	1.041
$ML(\rho)$	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$ML(\hat{\rho})$	1.224	1.143	1.119	1.099	1.077	1.067	1.067	1.054
modelo Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$								
H	1.107	1.062	1.050	1.039	1.029	1.023	1.019	1.013
$CG(\lambda)$	0.987	1.013	1.010	1.007	1.004	1.002	1.001	1.001
$CG(\hat{\lambda})$	0.986	1.010	1.015	1.017	1.017	1.015	1.013	1.010
$ML(\rho)$	0.921	0.961	0.970	0.977	0.984	0.988	0.991	0.994
$ML(\hat{\rho})$	0.952	0.993	0.998	1.001	1.002	1.001	1.001	1.000
modelo t de Student com $\nu = 1 (\gamma = 1, \rho = -2)$								
H	1.098	1.053	1.039	1.032	1.022	1.016	1.012	1.009
$CG(\lambda)$	0.994	1.041	1.033	1.027	1.019	1.014	1.010	1.007
$CG(\hat{\lambda})$	0.994	1.038	1.031	1.025	1.019	1.014	1.010	1.007
$ML(\rho)$	1.042	1.040	1.030	1.022	1.014	1.010	1.008	1.005
$ML(\hat{\rho})$	1.044	1.038	1.030	1.022	1.015	1.011	1.008	1.006
modelo t de Student com $\nu = 2 (\gamma = 0.5, \rho = -1)$								
H	0.605	0.556	0.544	0.536	0.526	0.522	0.516	0.512
$CG(\lambda)$	0.535	0.533	0.528	0.523	0.518	0.514	0.511	0.508
$CG(\hat{\lambda})$	0.498	0.520	0.517	0.513	0.509	0.506	0.504	0.502
$ML(\rho)$	0.543	0.532	0.524	0.519	0.513	0.510	0.507	0.505
$ML(\hat{\rho})$	0.483	0.486	0.489	0.491	0.496	0.499	0.500	0.500
modelo t de Student com $\nu = 4 (\gamma = 0.25, \rho = -0.5)$								
H	0.430	0.316	0.304	0.294	0.284	0.278	0.276	0.275
$CG(\lambda)$	0.270	0.274	0.271	0.269	0.266	0.263	0.261	0.259
$CG(\hat{\lambda})$	0.265	0.278	0.276	0.276	0.272	0.269	0.267	0.264
$ML(\rho)$	0.287	0.276	0.270	0.266	0.262	0.259	0.258	0.256
$ML(\hat{\rho})$	0.317	0.295	0.286	0.282	0.275	0.271	0.268	0.264

Tabela 4.3: Erro médio quadrático simulado, $MSE (\times 100)$, dos estimadores do índice de valores extremos, H , CG e ML , nos respectivos níveis óptimos.

	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$								
H	2.922	0.764	0.424	0.244	0.115	0.066	0.038	0.018
$CG(\lambda)$	2.157	0.633	0.363	0.207	0.097	0.054	0.030	0.014
$CG(\hat{\lambda})$	2.598	0.808	0.466	0.269	0.127	0.071	0.040	0.019
$ML(\rho)$	1.160	0.219	0.107	0.054	0.021	0.010	0.005	0.002
$ML(\hat{\rho})$	2.199	0.590	0.322	0.181	0.082	0.046	0.027	0.013
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$								
H	6.992	2.135	1.288	0.797	0.423	0.264	0.163	0.089
$CG(\lambda)$	2.793	0.984	0.615	0.379	0.197	0.120	0.072	0.037
$CG(\hat{\lambda})$	2.855	0.984	0.586	0.345	0.166	0.093	0.052	0.023
$ML(\rho)$	1.211	0.227	0.110	0.055	0.021	0.011	0.005	0.002
$ML(\hat{\rho})$	2.660	0.947	0.596	0.387	0.208	0.132	0.084	0.046
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$								
H	22.498	8.302	5.525	3.685	2.214	1.499	1.053	0.643
$CG(\lambda)$	3.843	1.646	1.125	0.760	0.452	0.303	0.201	0.115
$CG(\hat{\lambda})$	7.570	3.585	2.602	1.865	1.198	0.856	0.610	0.385
$ML(\rho)$	1.249	0.233	0.112	0.056	0.022	0.011	0.005	0.002
$ML(\hat{\rho})$	8.937	3.909	2.728	1.911	1.182	0.826	0.826	0.574
modelo Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$								
H	4.469	1.376	0.837	0.522	0.275	0.168	0.103	0.056
$CG(\lambda)$	2.044	0.406	0.214	0.115	0.048	0.024	0.012	0.005
$CG(\hat{\lambda})$	4.388	1.345	0.765	0.451	0.221	0.128	0.077	0.041
$ML(\rho)$	2.593	0.757	0.441	0.258	0.126	0.071	0.041	0.020
$ML(\hat{\rho})$	4.383	1.124	0.581	0.309	0.130	0.065	0.033	0.014
modelo t de Student com $\nu = 1 (\gamma = 1, \rho = -2)$								
H	6.947	1.685	0.941	0.540	0.256	0.143	0.080	0.040
$CG(\lambda)$	5.814	1.426	0.823	0.490	0.236	0.131	0.073	0.034
$CG(\hat{\lambda})$	5.678	1.514	0.886	0.531	0.257	0.143	0.080	0.037
$ML(\rho)$	5.493	0.946	0.512	0.285	0.129	0.070	0.038	0.017
$ML(\hat{\rho})$	5.666	1.150	0.624	0.352	0.158	0.086	0.046	0.021
modelo t de Student com $\nu = 2 (\gamma = 0.5, \rho = -1)$								
H	4.119	1.169	0.705	0.432	0.226	0.138	0.086	0.047
$CG(\lambda)$	1.650	0.566	0.360	0.235	0.127	0.077	0.047	0.024
$CG(\hat{\lambda})$	1.508	0.438	0.262	0.160	0.077	0.042	0.023	0.010
$ML(\rho)$	1.780	0.389	0.227	0.136	0.067	0.039	0.022	0.011
$ML(\hat{\rho})$	1.755	0.265	0.130	0.066	0.024	0.011	0.005	0.002
modelo t de Student com $\nu = 4 (\gamma = 0.25, \rho = -0.5)$								
H	4.686	1.096	0.706	0.465	0.280	0.191	0.132	0.089
$CG(\lambda)$	0.522	0.243	0.171	0.123	0.076	0.051	0.035	0.021
$CG(\hat{\lambda})$	0.918	0.390	0.274	0.205	0.133	0.095	0.069	0.044
$ML(\rho)$	0.615	0.171	0.109	0.070	0.038	0.024	0.016	0.009
$ML(\hat{\rho})$	1.344	0.472	0.306	0.212	0.127	0.089	0.063	0.040

Tabela 4.4: Eficiências relativas simulada, dos estimadores CG e ML , para os modelos $Fréchet$ e $Burr$.

	$CG(\lambda)$	$CG(\hat{\lambda})$	$ML(\rho)$	$ML(\hat{\rho})$
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$				
100	2.426 ± 0.060	1.728 ± 0.039	4.246 ± 0.062	1.587 ± 0.017
500	2.248 ± 0.028	1.523 ± 0.018	5.976 ± 0.095	1.457 ± 0.013
1000	2.219 ± 0.034	1.459 ± 0.022	7.020 ± 0.096	1.423 ± 0.007
2000	2.206 ± 0.038	1.408 ± 0.021	8.094 ± 0.180	1.389 ± 0.009
5000	2.217 ± 0.039	1.361 ± 0.023	10.138 ± 0.108	1.369 ± 0.014
10000	2.227 ± 0.027	1.325 ± 0.016	11.768 ± 0.171	1.348 ± 0.014
20000	2.290 ± 0.023	1.314 ± 0.012	13.978 ± 0.271	1.355 ± 0.012
50000	2.361 ± 0.027	1.291 ± 0.012	17.493 ± 0.257	1.334 ± 0.011
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$				
100	1.586 ± 0.040	1.568 ± 0.035	2.403 ± 0.023	1.622 ± 0.023
500	1.474 ± 0.019	1.474 ± 0.016	3.070 ± 0.046	1.502 ± 0.015
1000	1.448 ± 0.024	1.483 ± 0.022	3.427 ± 0.046	1.470 ± 0.013
2000	1.452 ± 0.024	1.522 ± 0.024	3.802 ± 0.084	1.435 ± 0.022
5000	1.468 ± 0.026	1.598 ± 0.030	4.473 ± 0.078	1.428 ± 0.023
10000	1.487 ± 0.020	1.685 ± 0.020	4.980 ± 0.091	1.415 ± 0.024
20000	1.500 ± 0.017	1.770 ± 0.020	5.544 ± 0.121	1.394 ± 0.024
50000	1.560 ± 0.019	1.963 ± 0.026	6.554 ± 0.076	1.396 ± 0.016
modelo Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$				
100	1.165 ± 0.024	1.061 ± 0.020	1.588 ± 0.014	1.153 ± 0.019
500	1.099 ± 0.015	0.973 ± 0.011	1.869 ± 0.024	1.138 ± 0.010
1000	1.081 ± 0.012	0.954 ± 0.010	1.990 ± 0.022	1.148 ± 0.010
2000	1.086 ± 0.018	0.952 ± 0.016	2.127 ± 0.030	1.161 ± 0.008
5000	1.088 ± 0.014	0.949 ± 0.012	2.346 ± 0.044	1.185 ± 0.012
10000	1.108 ± 0.021	0.963 ± 0.018	2.511 ± 0.040	1.196 ± 0.017
20000	1.123 ± 0.012	0.971 ± 0.011	2.702 ± 0.041	1.196 ± 0.009
50000	1.160 ± 0.016	0.991 ± 0.013	2.996 ± 0.043	1.213 ± 0.015
modelo Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$				
100	1.480 ± 0.033	1.010 ± 0.018	1.313 ± 0.015	1.010 ± 0.010
500	1.842 ± 0.043	1.011 ± 0.019	1.348 ± 0.018	1.106 ± 0.015
1000	1.979 ± 0.026	1.046 ± 0.009	1.378 ± 0.012	1.200 ± 0.011
2000	2.137 ± 0.040	1.076 ± 0.013	1.423 ± 0.021	1.301 ± 0.016
5000	2.382 ± 0.027	1.115 ± 0.010	1.474 ± 0.013	1.456 ± 0.013
10000	2.626 ± 0.026	1.142 ± 0.012	1.532 ± 0.021	1.605 ± 0.015
20000	2.924 ± 0.031	1.155 ± 0.010	1.581 ± 0.023	1.771 ± 0.021
50000	3.391 ± 0.028	1.179 ± 0.009	1.675 ± 0.020	2.037 ± 0.018

Tabela 4.5: Eficiências relativas simulada, dos estimadores CG e ML , para o modelo t de Student.

	$CG(\lambda)$	$CG(\hat{\lambda})$	$ML(\rho)$	$ML(\hat{\rho})$
modelo t de Student: $\nu = 1$ ($\gamma = 1, \rho = -2$)				
100	1.095 \pm 0.026	1.107 \pm 0.020	1.125 \pm 0.013	1.108 \pm 0.012
500	1.088 \pm 0.021	1.055 \pm 0.017	1.335 \pm 0.012	1.211 \pm 0.012
1000	1.070 \pm 0.012	1.031 \pm 0.009	1.357 \pm 0.012	1.228 \pm 0.009
2000	1.050 \pm 0.016	1.009 \pm 0.012	1.375 \pm 0.008	1.238 \pm 0.011
5000	1.043 \pm 0.013	1.000 \pm 0.012	1.410 \pm 0.007	1.274 \pm 0.006
10000	1.048 \pm 0.014	1.003 \pm 0.013	1.427 \pm 0.014	1.288 \pm 0.009
20000	1.047 \pm 0.010	1.002 \pm 0.010	1.457 \pm 0.020	1.318 \pm 0.015
50000	1.079 \pm 0.011	1.032 \pm 0.010	1.511 \pm 0.015	1.361 \pm 0.012
modelo t de Student: $\nu = 2$ ($\gamma = 0.5, \rho = -1$)				
100	1.585 \pm 0.043	1.656 \pm 0.036	1.522 \pm 0.016	1.533 \pm 0.019
500	1.439 \pm 0.028	1.634 \pm 0.029	1.734 \pm 0.024	2.101 \pm 0.027
1000	1.400 \pm 0.023	1.643 \pm 0.024	1.762 \pm 0.012	2.329 \pm 0.039
2000	1.356 \pm 0.024	1.647 \pm 0.028	1.781 \pm 0.017	2.565 \pm 0.035
5000	1.334 \pm 0.020	1.711 \pm 0.028	1.838 \pm 0.025	3.071 \pm 0.053
10000	1.345 \pm 0.019	1.814 \pm 0.024	1.892 \pm 0.021	3.540 \pm 0.046
20000	1.357 \pm 0.015	1.937 \pm 0.022	1.969 \pm 0.019	3.950 \pm 0.050
50000	1.386 \pm 0.018	2.164 \pm 0.035	2.040 \pm 0.025	2.886 \pm 0.047
modelo t de Student: $\nu = 4$ ($\gamma = 0.25, \rho = -0.5$)				
100	3.005 \pm 0.084	2.261 \pm 0.037	2.762 \pm 0.028	1.869 \pm 0.021
500	2.130 \pm 0.060	1.678 \pm 0.038	2.535 \pm 0.033	1.525 \pm 0.027
1000	2.037 \pm 0.043	1.606 \pm 0.024	2.548 \pm 0.020	1.519 \pm 0.017
2000	1.949 \pm 0.048	1.510 \pm 0.032	2.585 \pm 0.043	1.481 \pm 0.023
5000	1.916 \pm 0.042	1.454 \pm 0.025	2.699 \pm 0.053	1.483 \pm 0.025
10000	1.934 \pm 0.020	1.416 \pm 0.014	2.802 \pm 0.046	1.460 \pm 0.020
20000	1.939 \pm 0.037	1.383 \pm 0.023	2.889 \pm 0.046	1.442 \pm 0.016
50000	2.075 \pm 0.036	1.421 \pm 0.022	3.173 \pm 0.030	1.503 \pm 0.007

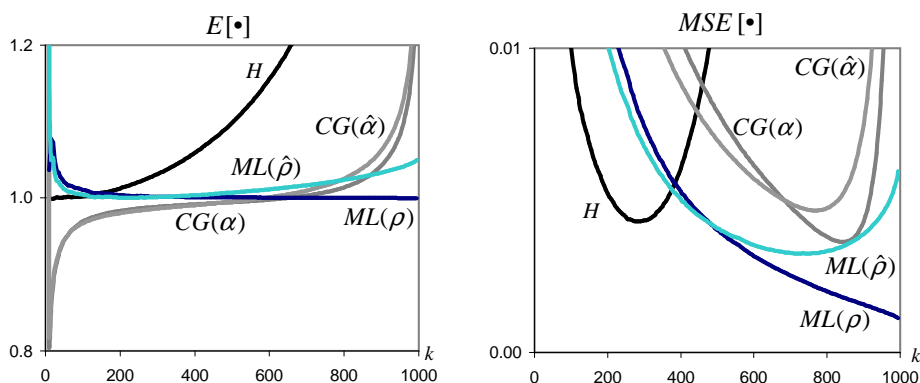


Figura 4.2: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -2$.

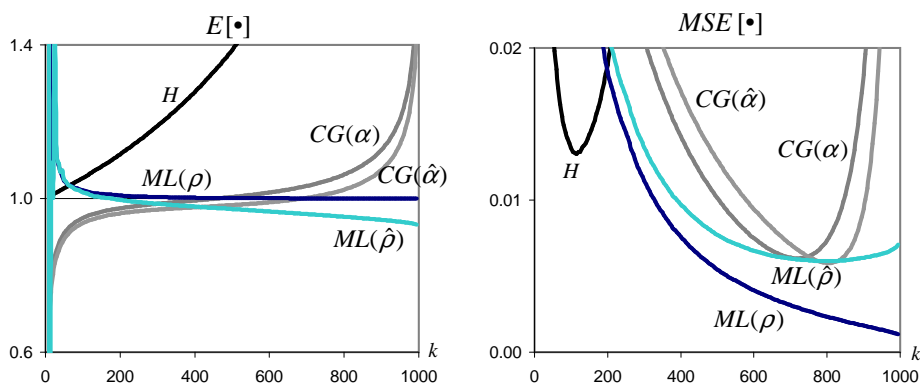


Figura 4.3: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -1$.

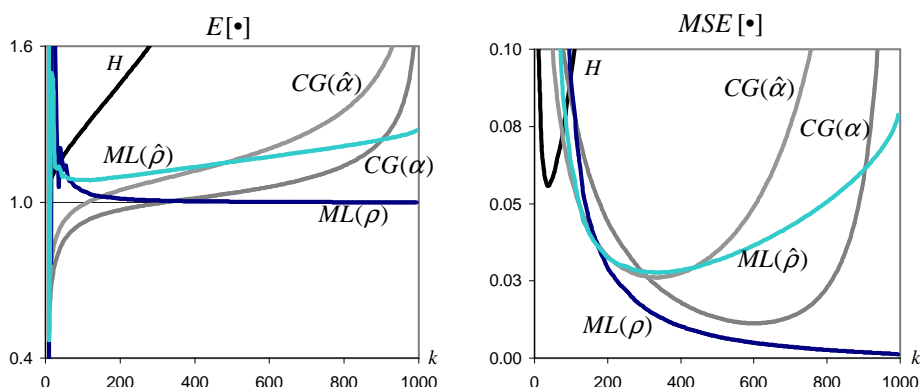


Figura 4.4: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5$.

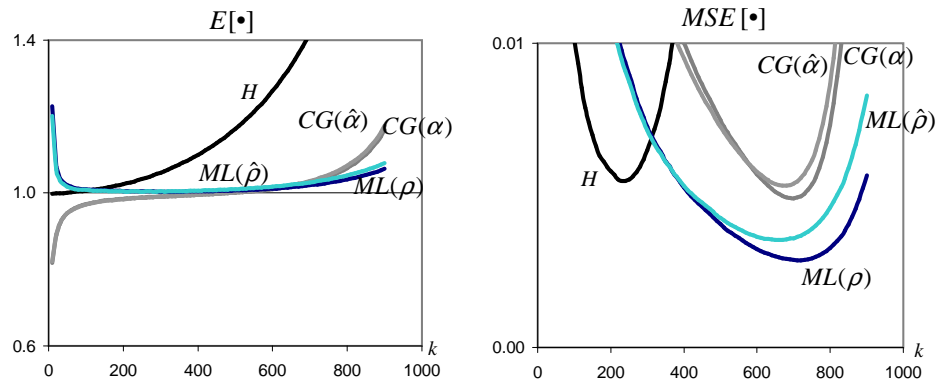


Figura 4.5: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 1$ ($\gamma = 1$ e $\rho = -2$).

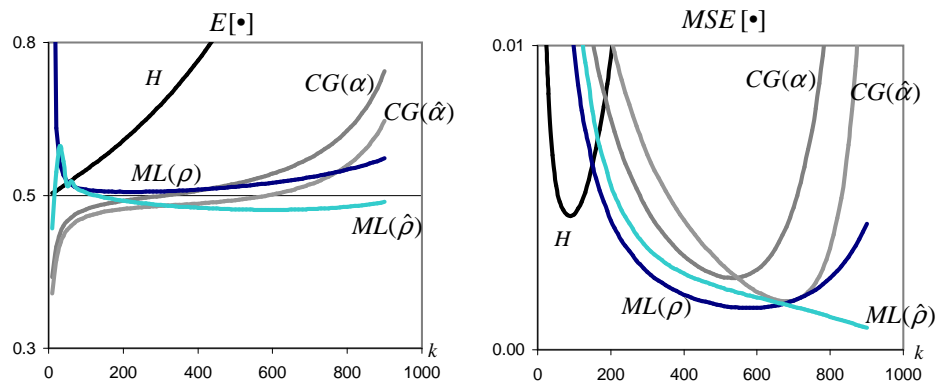


Figura 4.6: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 2$ ($\gamma = 0.5$ e $\rho = -1$).

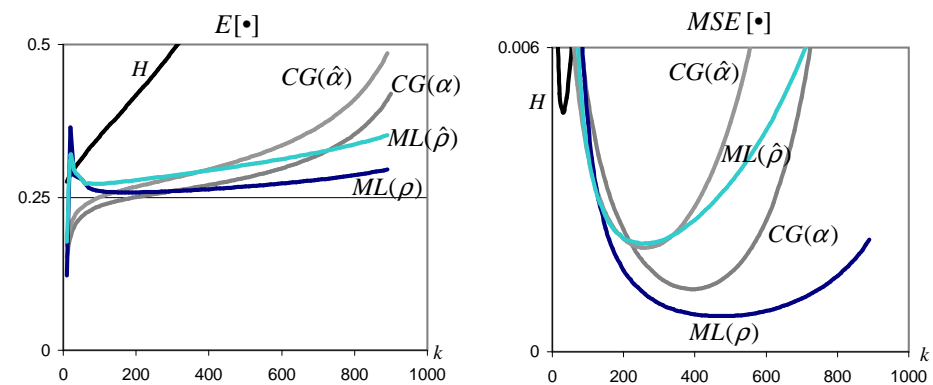


Figura 4.7: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 4$ ($\gamma = 0.25$ e $\rho = -0.5$).

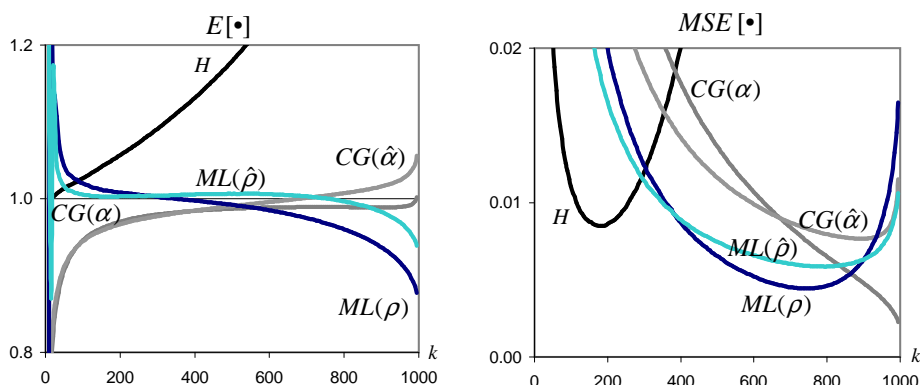


Figura 4.8: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Fréchet* com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$).

4.5 Alguns comentários e conclusões

1. De um modo geral, os estimadores “assintoticamente centrados” do índice de valores extremos apresentam um comportamento melhor que o do estimador de Hill. As Figuras apresentam trajectórias amostrais do valor médio dos novos estimadores, mais estáveis junto ao verdadeiro valor do índice de valores extremos. Verifica-se também, para um conjunto de níveis, que o erro médio quadrático dos estimadores CG e ML é inferior ao erro médio quadrático mínimo do estimador de Hill. Estes resultados verificaram-se também quando $\rho = -2$, um valor pertencente à região de valores $] -\infty; -1[$, onde o estimador de Hill costuma apresentar um bom desempenho.
2. Num problema prático não se conhece o verdadeiro valor do parâmetro de segunda ordem ρ . Por essa razão considerámos na simulação, os estimadores CG e ML , para saber se o comportamento dos estimadores se altera quando, em vez de se utilizar o verdadeiro valor de ρ , este é estimado. Nos exemplos apresentados, a estimação do parâmetro de segunda ordem afasta um pouco a trajectória amostral do valor médio do verdadeiro valor e acarreta um ligeiro aumento do erro médio quadrático.

3. No modelo Fréchet (Fig. 4.8, Tab. 4.4), e quando se admite o parâmetro de segunda ordem ρ conhecido, precisamos praticamente de todas as e.o. para atingir o nível ótimo de $CG(\lambda)$. Isto sugere que $CG(\lambda)$ praticamente não tem componente de viés. Quando se estima o parâmetro de segunda ordem, ρ , o estimador ML é o que apresenta um erro médio quadrático mais pequeno (no nível ótimo).
4. Nas Figuras referentes ao modelo Burr (Figs. 4.2, 4.3 e 4.4), o padrão do valor médio de $ML(\rho)$ coincide com o índice de valores extremos e o do erro médio quadrático é estritamente decrescente. Isto sugere que, neste modelo, este estimador não tem qualquer termo de viés, como já tinha sido referido na Observação 3.3.1. No entanto, quando estimamos o parâmetro de segunda ordem, ρ , nem sempre é $ML(\hat{\rho})$ o mais eficiente (Tab. 4.4).
5. Para modelos com ρ próximo de 0, a região mais problemática para o estimador de Hill, o padrão do gráfico do erro médio quadrático dos novos estimadores é em forma de “U”. Mesmo com a estimação do parâmetro de segunda ordem, os estimadores aqui considerados são mais eficiente que o estimador de Hill, não só quando considerados ambos nos respectivos níveis ótimos, mas também numa vasta região de valores de k .

Capítulo 5

Redução directa do viés do estimador de Hill

Tal como referimos no capítulo anterior, existem muitos trabalhos relativos à redução de viés na estimação semi-paramétrica do índice de valores extremos positivo, γ . Muitos dos estimadores introduzidos nesses trabalhos têm componente dominante de viés nula e variância assintótica superior à do estimador de Hill. Para $\rho > -2$, isto é, na situação onde o estimador de Hill não se comporta tão bem, apresentam geralmente erro médio quadrático inferior ao do estimador de Hill. Este comportamento deve-se à redução de viés, já que a variância é maior que a do estimador de Hill. Neste capítulo estamos interessados na estimação da componente dominante do estimador de Hill, de modo a removê-la de dois modos distintos (sem aumentar a variância). Começamos por introduzir, na secção 5.1, os dois estimadores de viés reduzido e na secção 5.2 abordamos o comportamento assintótico dos novos estimadores, sob condições de variação regular de terceira ordem. Se os parâmetros de segunda ordem forem estimados num nível adequado, k_1 , de ordem superior à do nível k utilizado no estimador de Hill, a variância assintótica dos novos estimadores não se altera e mantém-se igual à do estimador de Hill, isto é, igual a γ^2 , para níveis adequados k . De modo a ilustrar o comportamento, para amostras de dimensão finita, dos novos estimadores, apresentamos na secção 5.3 resultados de simulação através do método de Monte Carlo. Procedemos ainda, por simulação, à sua comparação com o clássico estimador de Hill.

5.1 Novos estimadores de viés reduzido

Vamos admitir neste capítulo, que F pertence à classe de Hall (2.62), isto é, que admite uma cauda do tipo,

$$1 - F(x) = Cx^{-1/\gamma}(1 + Dx^{\rho/\gamma} + Ex^{2\rho/\gamma} + o(x^{2\rho/\gamma})), \quad x \longrightarrow \infty,$$

onde $\gamma > 0$, $\rho < 0$, $C > 0$, $D \neq 0$ e $E \neq 0$. Consequentemente a função A , presente nas condições de variação regular de segunda e terceira ordem, (2.41) e (2.43), é assintoticamente equivalente a,

$$A(t) = \gamma \beta t^\rho. \quad (5.1)$$

De acordo com a Proposição 3.2.1, para k intermédio verificando (2.17) e admitindo a validade da condição de variação regular de terceira ordem (2.43), o estimador de Hill admite a seguinte representação em distribuição

$$H(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} Z_k^{(1)} + \frac{A(n/k)}{1 - \rho} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{1 - \rho - \rho'}(1 + o_p(1)),$$

onde $Z_k^{(1)}$ é uma v.a. assintoticamente normal padrão.

A componente dominante de viés do estimador de Hill, $A(n/k)/(1 - \rho)$, pode ser estimada através de $H(k)\widehat{\beta}(n/k)^{\widehat{\rho}}/(1 - \widehat{\rho})$, onde $\widehat{\rho}$ e $\widehat{\beta}$ são estimadores adequados de ρ e β , respectivamente. De modo a remover o termo dominante de viés, vamos considerar os estimadores,

$$\overline{H}_{\widehat{\beta}, \widehat{\rho}}(k) := H(k) \left(1 - \frac{\widehat{\beta}}{1 - \widehat{\rho}} \left(\frac{n}{k} \right)^{\widehat{\rho}} \right) \quad (5.2)$$

e

$$\overline{\overline{H}}_{\widehat{\beta}, \widehat{\rho}}(k) := H(k) \exp \left(- \frac{\widehat{\beta}}{1 - \widehat{\rho}} \left(\frac{n}{k} \right)^{\widehat{\rho}} \right) \quad (5.3)$$

introduzidos e estudados em Caeiro *et al.* [7], sob condições de variação regular de segunda ordem. A estimação dos parâmetro de segunda ordem β e ρ será feita externamente num nível mais elevado k_1 .

Observação 5.1.1. Como $\exp(-x) = 1 - x + o(x)$, $x \rightarrow \infty$, os dois estimadores apenas são assintoticamente equivalentes sob condições de primeira ou segunda ordem. Como se admite uma condição de variação regular de terceira ordem há uma diferença no termo dominante de viés assintótico e portanto os estimadores não são assintoticamente equivalentes.

5.2 Distribuição assintótica

Começamos por apresentar algumas propriedades assintóticas, para os novos estimadores, admitindo apenas que o índice de valores extremos, γ , é desconhecido.

Teorema 5.2.1. Supondo que se verifica a condição de terceira ordem, (2.43), que $A(t)$ é do tipo (5.1) e que k é uma sequência intermédia verificando, (2.17), $\overline{H}_{\beta,\rho}(k)$ e $\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}(k)$ admitem, respectivamente, uma representação assintótica em distribuição do tipo,

$$\overline{H}_{\beta,\rho}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} Z_k^{(1)} + A(n/k) \left(\frac{B(n/k)}{1 - \rho - \rho'} - \frac{A(n/k)}{\gamma(1 - \rho)^2} \right) (1 + o_p(1)), \quad (5.4)$$

$$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} Z_k^{(1)} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{1 - \rho - \rho'} (1 + o_p(1)) \quad (5.5)$$

onde $Z_k^{(1)}$ é a variável aleatória assintoticamente normal padrão definida em (3.17). Consequentemente $\sqrt{k}(\overline{H}_{\beta,\rho}(k) - \gamma)$ e $\sqrt{k}(\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}(k) - \gamma)$ são assintoticamente normais com valor médio 0 e variância γ^2 quando $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$ (finito ou infinito), $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow 0$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow 0$. Se avançarmos para níveis mais baixos (k mais elevado), ou seja, para níveis tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, finitos, o valor médio assintótico de $\sqrt{k}(\overline{H}_{\beta,\rho}(k) - \gamma)$ e $\sqrt{k}(\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}(k) - \gamma)$ passa a ser igual a $\frac{\lambda_B}{1 - \rho - \rho'} - \frac{\lambda_A}{\gamma(1 - \rho)^2}$ e $\frac{\lambda_B}{1 - \rho - \rho'}$, respectivamente.

Demonstração.

O resultado obtém-se facilmente a partir da distribuição assintótica do estimador de Hill, dada na Proposição 3.2.1,

$$\begin{aligned}
\overline{H}_{\beta,\rho}(k) &= H(k) \times \left(1 - \frac{\beta}{1-\rho} \left(\frac{n}{k}\right)^\rho\right) = H(k) \times \left(1 - \frac{A(n/k)}{\gamma(1-\rho)}\right) \\
&\stackrel{a}{=} \left(\gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} Z_k^{(1)} + \frac{A(n/k)}{1-\rho} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{1-\rho-\rho'}(1+o_p(1))\right) \times \left(1 - \frac{A(n/k)}{\gamma(1-\rho)}\right) \\
&\stackrel{a}{=} \gamma + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} Z_k^{(1)} + A(n/k) \left(\frac{B(n/k)}{1-\rho-\rho'} - \frac{A(n/k)}{\gamma(1-\rho)^2}\right) (1+o_p(1)).
\end{aligned}$$

Como $\exp\left(-\frac{A(n/k)}{\gamma(1-\rho)}\right) = 1 - \frac{A(n/k)}{\gamma(1-\rho)} + \frac{A^2(n/k)}{\gamma^2(1-\rho)^2}(1+o(1))$, a representação em distribuição para $\overline{H}_{\beta,\rho}(k)$, (5.5), obtém-se de forma análoga.

Resulta assim que

$$\sqrt{k}(\overline{H}_{\beta,\rho}(k) - \gamma) = \gamma Z_k^{(1)} + \sqrt{k}A(n/k) \left(\frac{B(n/k)}{1-\rho-\rho'} - \frac{A(n/k)}{\gamma(1-\rho)^2}\right) (1+o_p(1)),$$

e

$$\sqrt{k}(\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}(k) - \gamma) = \gamma Z_k^{(1)} + \frac{\sqrt{k}A(n/k)B(n/k)}{1-\rho-\rho'}(1+o_p(1)).$$

seguinte-se portanto o resultado pretendido. \square

Observação 5.2.1. *Nas condições do teorema anterior,*

$$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}(k) - \overline{H}_{\beta,\rho}(k) = \frac{A^2(n/k)}{\gamma(1-\rho)^2}(1+o_p(1)).$$

Portanto, só quando o viés de $\overline{H}_{\beta,\rho}(k)$ é positivo é que se pode garantir que este é inferior ao viés de $\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}(k)$.

No que se segue vamos admitir que os parâmetros ρ e β são estimados num nível k_1 através dos estimadores (3.38) e (3.51), respectivamente, e manter a notação $\hat{\rho} \equiv \hat{\rho}(k_1)$ e $\hat{\beta} \equiv \hat{\beta}(k_1)$.

Teorema 5.2.2. *Considere-se os estimadores do índice de valores extremos $\overline{H}_{\hat{\beta},\hat{\rho}}(k)$ e $\overline{\overline{H}}_{\hat{\beta},\hat{\rho}}(k)$ em (5.2) e (5.3), respectivamente, onde $\hat{\rho}$ e $\hat{\beta}$ são calculados num nível mais baixo, associado a um valor k_1 tal que $\sqrt{k_1}A(n/k_1) \rightarrow \infty$ e $(\hat{\rho} - \rho) \ln n = o_p(1)$. Se F verificar a condição de variação regular de terceira ordem e k representar uma*

sequência intermédia, então $\overline{H}_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$ e $\overline{\overline{H}}_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k)$ são consistentes para a estimação de γ .

Se também se verificar $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$, finito (eventualmente nulo), então podemos garantir que $\sqrt{k} \left(\overline{H}_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma \right)$ e $\sqrt{k} \left(\overline{\overline{H}}_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}(k) - \gamma \right)$ são assintoticamente normais com valor médio nulo e variância assintótica igual a γ^2 .

Podemos ainda avançar para níveis tais que $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, desde que se estime ρ num nível k_1 tal que $(\hat{\rho} - \rho) \ln n = o_p(1/\sqrt{k}A(n/k))$.

Demonstração.

Vamos apenas apresentar a demonstração para $\overline{H}_{\hat{\rho}, \hat{\beta}}(k)$. Para $\overline{\overline{H}}_{\hat{\rho}, \hat{\beta}}(k)$ faz-se analogamente. Utilizando uma expansão em série de Taylor para $\frac{\hat{\beta}}{1-\hat{\rho}} \left(\frac{n}{k} \right)^{\hat{\rho}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{H}_{\hat{\rho}, \hat{\beta}}(k) &\stackrel{d}{=} H(k) \times \left(1 - \frac{\beta}{1-\rho} \left(\frac{n}{k} \right)^{\rho} - (\hat{\beta} - \beta) \frac{1}{1-\rho} \left(\frac{n}{k} \right)^{\rho} (1 + o_p(1)) \right. \\ &\quad \left. - (\hat{\rho} - \rho) \frac{\beta}{1-\rho} \left(\frac{n}{k} \right)^{\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} + \ln(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right) \\ &\stackrel{d}{=} \overline{H}_{\rho, \beta}(k) - \frac{A(n/k)}{1-\rho} \left(\frac{\hat{\beta} - \beta}{\beta} + (\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) \right) \end{aligned}$$

Como nas condições do teorema, $\overline{H}_{\rho, \beta}(k)$ é consistente para γ e $(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p(1)$ permite garantir que $\frac{A(n/k)}{1-\rho} \left(\frac{\hat{\beta} - \beta}{\beta} + (\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) \right) = o_p(1)$, e resulta que $\overline{H}_{\hat{\rho}, \hat{\beta}}(k)$ é consistente para a estimação do índice de valores extremos γ .

Como

$$\sqrt{k} \left(\overline{H}_{\hat{\rho}, \hat{\beta}}(k) - \gamma \right) \stackrel{d}{=} \sqrt{k} \left(\overline{H}_{\rho, \beta}(k) - \gamma \right) - \sqrt{k} \frac{A(n/k)}{1-\rho} \left(\frac{\hat{\beta} - \beta}{\beta} + (\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) \right),$$

$\hat{\beta} - \beta \sim -\beta(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k_1)$, e estamos a admitir por hipótese que $(\hat{\rho} - \rho) \ln n = o_p(1)$, fica demonstrada a normalidade assintótica não só quando $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$ (finito), mas também quando $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \infty$, $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$, $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$, e se $\hat{\rho}$ verificar $(\hat{\rho} - \rho) \ln n = o_p(1/\sqrt{k}A(n/k))$. \square

Observação 5.2.2. Os parâmetros de segunda ordem poderiam também ser estimados no mesmo nível k , utilizado para estimar o índice de valores extremos. A decisão de

estimar externamente os parâmetros de segunda ordem ρ e β , resulta dos comentários em Gomes e Martins [28] sobre as vantagens deste tipo de estimação. Os resultados assintóticos presentes em Caeiro et al. [7] reforçam a decisão de estimar os parâmetros de segunda ordem num nível mais baixo. Nesse trabalho são dadas as expressões da variância assintótica de $\sqrt{k} \left(\overline{H}_{\hat{\beta}(k), \hat{\rho}(k)} - \gamma \right)$ e $\sqrt{k} \left(\overline{H}_{\hat{\beta}(k), \hat{\rho}(k)}(k) - \gamma \right)$. Assim no primeiro caso (β estimado no mesmo nível k) a variância é $\gamma^2 \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^2$, enquanto que no segundo (β e ρ estimados no mesmo nível k) é $\gamma^2 \left(\frac{(1-\rho)^2(2\rho^2-2\rho+1)}{\rho^2} \right)$. Em qualquer das situações a variância é superior a γ^2 , a variância que se obtém no Teorema 5.2.2, quando se faz a estimação externa dos parâmetros de segunda ordem ρ e β , e que é igual à variância do estimador de Hill.

5.3 Propriedades para amostras de dimensão finita

5.3.1 Modelos utilizados

Nesta secção serão considerados os seguintes modelos pertencentes à classe de Hall:

- modelo *Fréchet*, em (2.48), com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$);
- modelo *Burr*, em (2.49), com $\gamma = 1$ e $\rho = -2, -1, -0.5$;
- modelo *t* de *Student*, em (2.53), com $\nu = 1, 2$ e 4 (apenas os valores positivos).

5.3.2 O estudo de simulação

Implementámos uma simulação multi-amostra de dimensão $10000 = 1000$ (“runs”) \times 10 (réplicas) de modo a obter, para os modelos acima mencionados, o comportamento dos novos estimadores $\overline{H} \equiv \overline{H}_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}$, $\overline{\overline{H}} \equiv \overline{\overline{H}}_{\hat{\beta}, \hat{\rho}}$, introduzidos em (5.2) e (5.3), respectivamente. Para obter mais informações relativas à simulação multi-amostra aconselhamos Gomes and Oliveira [27]. Os parâmetros de segunda ordem ρ e β foram estimados no nível externo k_1 introduzido em (3.44), utilizando os estimadores (3.38) e (3.51), respectivamente. Na simulação também incluímos $H(k)$, $\overline{H}_{\beta, \rho}$, e $\overline{\overline{H}}_{\beta, \rho}$.

Denote-se por $\hat{\gamma}$ um dos estimadores considerados neste capítulo. Simulou-se para cada estimador/modelo o valor médio, E , erro médio quadrático, MSE , e nível óptimo,

$$k_0 \equiv k_0^{\hat{\gamma}}(n) := \arg \min_k MSE[\hat{\gamma}(k)],$$

isto é, o nível onde o erro médio quadrático é mínimo. Foi também simulado um indicador de eficiência que permite comparar o erro médio quadrático dos novos estimadores com o do estimador de Hill, quando ambos são considerados nos respectivos níveis óptimos. Consideramos o seguinte indicador de eficiência,

$$Efic_{\hat{\gamma}|H(k)} = \sqrt{\frac{\widehat{MSE}[H(k_0^H)]}{\widehat{MSE}[\hat{\gamma}(k_0^{\hat{\gamma}})]}}.$$

Quando este indicador é maior que um, isto representa uma “performance” melhor do que a do estimador de Hill.

5.3.3 Padrão do valor médio e erro médio quadrático

Nas Figuras 5.1–5.7 apresentamos, para os vários modelos considerados, trajectórias amostrais do valor médio e erro médio quadrático de $H(k)$, $\overline{H}(k)$ e $\overline{\overline{H}}(k)$. Incluímos também nestas Figuras $\overline{H}_{\beta,\rho}(k)$, para verificar se existe grande divergência entre os estimadores e as variáveis aleatórias. Se existir tal divergência, poderá ser necessário melhorar a estimação dos parâmetros de segunda ordem ρ e β .

Podemos fazer os seguintes comentários:

- Nos exemplos apresentados as trajectórias amostrais do valor médio e erro médio quadrático dos estimadores \overline{H} , $\overline{\overline{H}}$ introduzidos em (5.2) e (5.3), respectivamente, são semelhantes. Para valores de k pequenos (níveis elevados), praticamente coincidem.
- Comparando $\overline{H}_{\beta,\rho}$ e \overline{H} , isto é, comparando a diferença entre usar o verdadeiro valor ou estimar os parâmetros de segunda ordem, conclui-se que, usualmente a

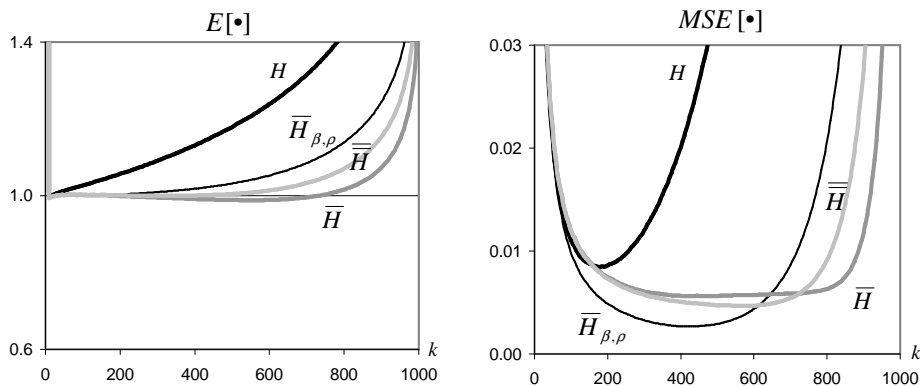


Figura 5.1: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo Fréchet com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$).

estimação destes parâmetros afasta mais a trajectória do valor médio, do verdadeiro valor a estimar e aumenta o erro médio quadrático. O modelo Burr com $(\gamma, \rho) = (1, -1)$ é o único entre os escolhidos onde não existem grandes diferenças nas trajectórias amostrais de $\overline{H}_{\beta, \rho}$ e \overline{H} .

Só na Figura 5.1, referente ao modelo Fréchet, a trajectória amostral \overline{H} é mais estável do que a de $\overline{H}_{\beta, \rho}$.

- Quando $\rho > -1$ (Figuras 5.4 e 5.7) os estimadores \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$ apresentam para qualquer nível k um viés positivo. Verifica-se para todos os níveis uma redução do erro médio quadrático, embora as trajectórias amostrais do valor médio não apresentem nenhuma região de estabilidade. Existe também uma grande discrepância entre as trajectórias amostrais de \overline{H} e $\overline{H}_{\beta, \rho}$. Existe a possibilidade de melhorar os resultados apresentados, desde que se consiga estimar os parâmetros de segunda ordem de modo mais eficiente.
- Apenas nos modelos com $\rho = -1$ (Figuras 5.1, 5.3 e 5.6) os valores mínimos do erro médio quadrático de \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$ diferem ligeiramente.

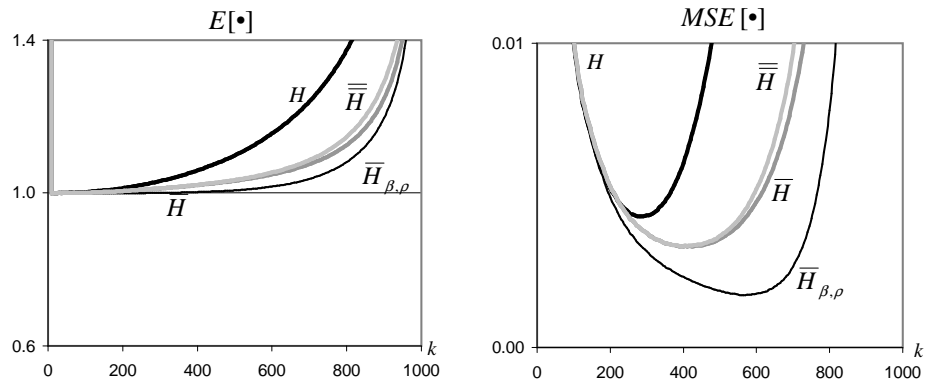


Figura 5.2: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \bar{H} e $\bar{\bar{H}}$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -2$.

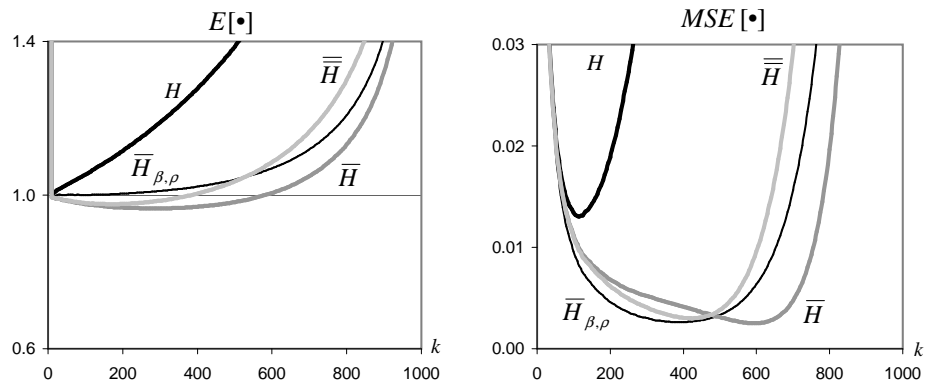


Figura 5.3: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \bar{H} e $\bar{\bar{H}}$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -1$.

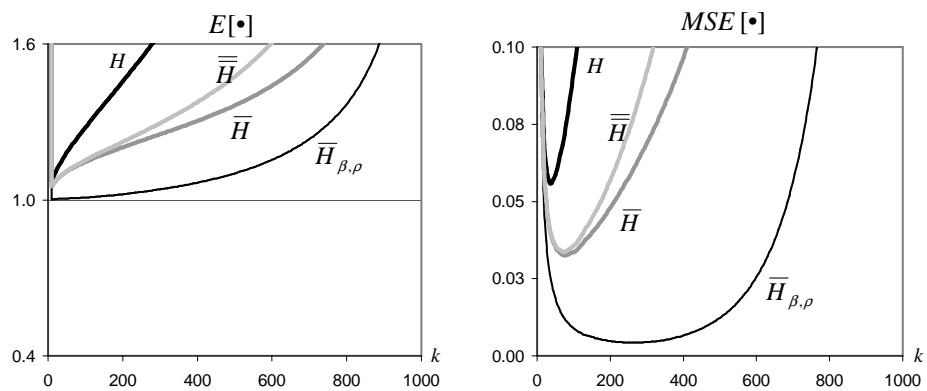


Figura 5.4: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \bar{H} e $\bar{\bar{H}}$, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5$.

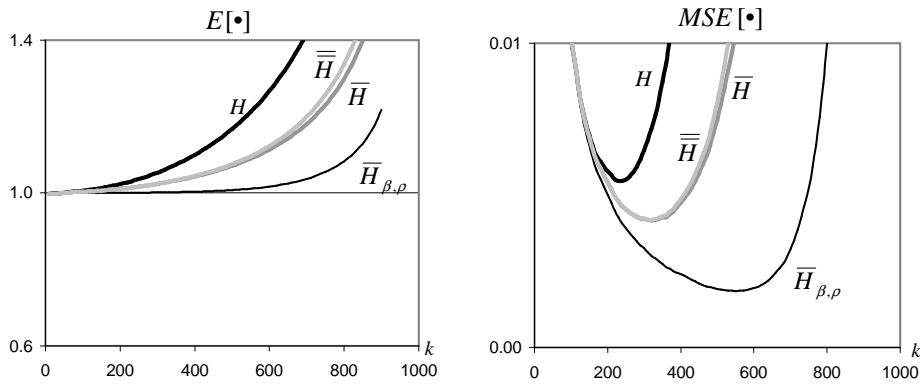


Figura 5.5: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \bar{H} e $\bar{\bar{H}}$, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 1$ ($\gamma = 1$ e $\rho = -2$).

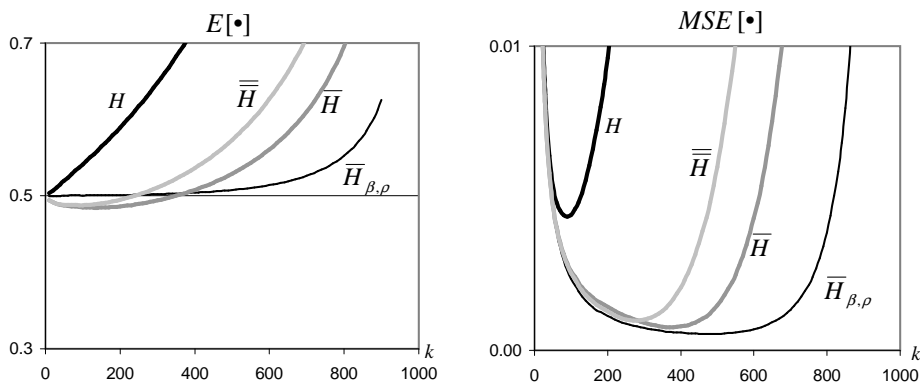


Figura 5.6: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \bar{H} e $\bar{\bar{H}}$, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 2$ ($\gamma = 0.5$ e $\rho = -1$).

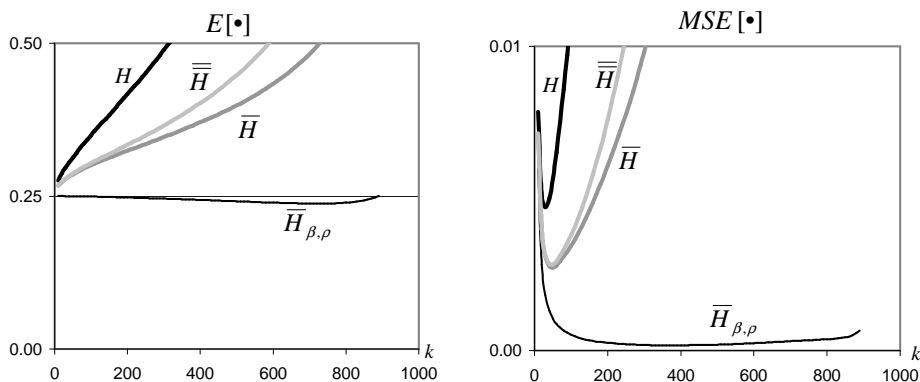


Figura 5.7: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do índice de valores extremos H , \bar{H} e $\bar{\bar{H}}$, para amostras de dimensão $n = 2000$ do modelo t de Student com $\nu = 4$ ($\gamma = 0.25$ e $\rho = -0.5$).

5.3.4 Valor médio, erro médio quadrático e eficiência relativa no nível ótimo

Os resultados obtidos por simulação, relativos ao nível ótimo e restantes estatísticas simuladas no nível ótimo encontram-se nas Tabelas 5.1-5.5. Na Tabela 5.1 apresentamos a fracção ótima da amostra simulada e nas Tabelas 5.2 e 5.3 o valor médio e erro médio quadrático simulados, nos respectivos níveis ótimos. De modo a comparar os novos estimadores, com o estimador de Hill, apresentamos nas Tabelas 5.4 e 5.5 a eficiência assintótica dos vários estimadores, relativamente ao estimador de Hill, nos respectivos níveis ótimos. Os resultados apresentados permitem fazer os seguintes comentários:

- Para qualquer dos modelos escolhidos, os novos estimadores necessitam de mais e.o.'s para atingir o nível ótimo, k_0 (Tabela 5.1).
- No nível ótimo, k_0 , o erro médio quadrático dos novos estimadores é sempre inferior ao do estimador de Hill (Tabela 5.3) e o respectivo valor médio apresenta-se muito mais próximo do verdadeiro valor de γ (Tabela 5.2).
- Na maioria dos exemplos apresentados, o erro médio quadrático $\overline{H}_{\beta,\rho}$ é inferior ao erro médio quadrático de $\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$ (nos respectivos níveis ótimos). O mesmo se verifica em grande parte dos exemplos apresentados para \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$. Estes resultados não são nenhuma surpresa porque as Figuras apresentadas indicam que o viés de $\overline{H}_{\beta,\rho}$ é quase sempre positivo. Nestas condições, e de acordo com a Observação 5.2.1, o viés de $\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$ é superior ao viés de $\overline{H}_{\beta,\rho}$.
- Só existem diferenças significativas, nos valores das eficiências relativas de \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$ (Tabelas 5.4, 5.5), quando $\rho = -1$. Isto não é também nenhuma surpresa porque as Figuras indicam que apenas para $\rho = -1$, há diferenças no valor do erro quadrático mínimo simulado dos estimadores \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$.

Tabela 5.1: Fracção óptima da amostra simulada, k_0/n , dos estimadores do índice de valores extremos, H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$.

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$								
H	0.415	0.320	0.282	0.254	0.208	0.187	0.164	0.134
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.678	0.603	0.562	0.535	0.487	0.459	0.436	0.393
\overline{H}	0.587	0.481	0.410	0.364	0.306	0.258	0.222	0.178
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.636	0.571	0.532	0.503	0.455	0.425	0.396	0.359
$\overline{\overline{H}}$	0.578	0.469	0.402	0.353	0.304	0.258	0.222	0.178
Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$								
H	0.227	0.143	0.115	0.093	0.070	0.056	0.047	0.034
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.510	0.431	0.387	0.347	0.310	0.272	0.240	0.210
\overline{H}	0.651	0.607	0.592	0.582	0.569	0.565	0.557	0.550
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.423	0.348	0.307	0.273	0.234	0.212	0.184	0.155
$\overline{\overline{H}}$	0.509	0.448	0.421	0.408	0.385	0.377	0.368	0.361
Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$								
H	0.104	0.052	0.036	0.027	0.018	0.014	0.010	0.007
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.399	0.296	0.265	0.219	0.190	0.153	0.128	0.097
\overline{H}	0.227	0.102	0.074	0.048	0.033	0.021	0.015	0.009
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.262	0.174	0.140	0.113	0.087	0.070	0.056	0.045
$\overline{\overline{H}}$	0.199	0.099	0.073	0.048	0.032	0.020	0.015	0.009
Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$								
H	0.336	0.217	0.180	0.143	0.107	0.087	0.072	0.052
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.586	0.450	0.421	0.380	0.320	0.295	0.264	0.219
\overline{H}	0.776	0.494	0.466	0.461	0.409	0.406	0.371	0.405
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.566	0.422	0.390	0.345	0.303	0.262	0.234	0.197
$\overline{\overline{H}}$	0.709	0.615	0.563	0.521	0.448	0.428	0.377	0.346
t de Student com $\nu = 1 (\gamma = 1, \rho = -2)$								
H	0.185	0.148	0.129	0.117	0.099	0.086	0.075	0.062
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.274	0.290	0.283	0.273	0.256	0.243	0.235	0.217
\overline{H}	0.234	0.195	0.178	0.157	0.136	0.122	0.103	0.088
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.257	0.256	0.249	0.240	0.220	0.204	0.190	0.174
$\overline{\overline{H}}$	0.233	0.192	0.177	0.156	0.134	0.122	0.102	0.087
t de Student com $\nu = 2 (\gamma = 0.5, \rho = -1)$								
H	0.104	0.066	0.054	0.044	0.033	0.028	0.020	0.016
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.230	0.244	0.247	0.243	0.227	0.199	0.185	0.167
\overline{H}	0.220	0.202	0.193	0.185	0.182	0.180	0.180	0.179
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.186	0.164	0.150	0.132	0.114	0.099	0.092	0.078
$\overline{\overline{H}}$	0.186	0.164	0.150	0.132	0.114	0.099	0.092	0.078
t de Student com $\nu = 4 (\gamma = 0.25, \rho = -1)$								
H	0.100	0.026	0.020	0.014	0.009	0.006	0.005	0.005
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.226	0.236	0.209	0.185	0.152	0.129	0.105	0.085
\overline{H}	0.109	0.053	0.039	0.023	0.016	0.012	0.008	0.005
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.113	0.081	0.069	0.058	0.043	0.035	0.030	0.022
$\overline{\overline{H}}$	0.101	0.049	0.035	0.022	0.016	0.011	0.007	0.005

Tabela 5.2: Valor médio simulado, E , dos estimadores do índice de valores extremos, H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, nos respectivos níveis ótimos.

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$								
H	1.068	1.036	1.027	1.021	1.014	1.011	1.009	1.006
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	1.037	1.018	1.012	1.009	1.006	1.005	1.004	1.002
\overline{H}	1.045	1.028	1.022	1.017	1.013	1.010	1.007	1.005
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	1.038	1.020	1.014	1.011	1.007	1.005	1.004	1.002
$\overline{\overline{H}}$	1.048	1.029	1.022	1.017	1.013	1.010	1.007	1.005
Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$								
H	1.140	1.078	1.061	1.049	1.036	1.028	1.024	1.017
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	1.049	1.027	1.020	1.015	1.011	1.008	1.006	1.004
\overline{H}	1.017	1.006	1.003	1.002	1.001	1.001	1.000	1.000
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	1.059	1.033	1.024	1.018	1.013	1.010	1.008	1.005
$\overline{\overline{H}}$	1.037	1.016	1.010	1.007	1.003	1.002	1.001	1.000
Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$								
H	1.300	1.186	1.149	1.124	1.098	1.085	1.070	1.057
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	1.075	1.040	1.033	1.024	1.020	1.014	1.012	1.008
\overline{H}	1.229	1.147	1.127	1.104	1.088	1.070	1.062	1.048
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	1.124	1.068	1.052	1.040	1.029	1.023	1.018	1.014
$\overline{\overline{H}}$	1.237	1.152	1.130	1.106	1.088	1.069	1.062	1.048
Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$								
H	1.107	1.062	1.050	1.039	1.029	1.023	1.019	1.013
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	1.053	1.024	1.020	1.016	1.010	1.009	1.007	1.004
\overline{H}	0.977	0.984	0.990	0.995	0.997	0.998	1.000	1.000
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	1.060	1.027	1.022	1.017	1.012	1.009	1.007	1.005
$\overline{\overline{H}}$	1.013	1.012	1.010	1.009	1.007	1.007	1.006	1.006
t de Student com $\nu = 1 (\gamma = 1, \rho = -2)$								
H	1.098	1.053	1.039	1.032	1.022	1.016	1.012	1.009
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	1.037	1.019	1.014	1.011	1.008	1.006	1.005	1.003
\overline{H}	1.079	1.044	1.034	1.026	1.019	1.015	1.010	1.007
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	1.043	1.023	1.018	1.015	1.010	1.007	1.005	1.004
$\overline{\overline{H}}$	1.082	1.044	1.035	1.026	1.018	1.015	1.010	1.007
t de Student com $\nu = 2 (\gamma = 0.5, \rho = -1)$								
H	0.605	0.556	0.544	0.536	0.526	0.522	0.516	0.512
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.521	0.509	0.508	0.507	0.505	0.504	0.503	0.502
\overline{H}	0.528	0.511	0.506	0.503	0.502	0.501	0.501	0.500
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.541	0.523	0.518	0.513	0.509	0.507	0.506	0.504
$\overline{\overline{H}}$	0.541	0.523	0.518	0.513	0.509	0.507	0.506	0.504
t de Student com $\nu = 4 (\gamma = 0.25, \rho = -0.5)$								
H	0.430	0.316	0.304	0.294	0.284	0.278	0.276	0.275
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.251	0.244	0.244	0.245	0.246	0.246	0.247	0.248
\overline{H}	0.326	0.297	0.290	0.284	0.278	0.275	0.271	0.268
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.291	0.272	0.268	0.264	0.260	0.258	0.257	0.255
$\overline{\overline{H}}$	0.337	0.300	0.290	0.284	0.279	0.275	0.271	0.268

Tabela 5.3: Erro médio quadrático simulado, $MSE (\times 100)$, dos estimadores do índice de valores extremos, H , \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, nos respectivos níveis óptimos.

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$								
H	2.922	0.764	0.424	0.244	0.115	0.066	0.038	0.018
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	1.440	0.321	0.170	0.093	0.040	0.021	0.012	0.005
\overline{H}	2.095	0.579	0.328	0.189	0.088	0.051	0.029	0.014
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	1.556	0.353	0.187	0.102	0.044	0.024	0.013	0.006
$\overline{\overline{H}}$	2.125	0.584	0.330	0.190	0.088	0.051	0.029	0.014
Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$								
H	6.992	2.135	1.288	0.797	0.423	0.264	0.163	0.089
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	1.935	0.472	0.258	0.146	0.066	0.038	0.022	0.010
\overline{H}	1.970	0.478	0.249	0.134	0.057	0.029	0.015	0.006
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	2.467	0.624	0.343	0.197	0.092	0.053	0.031	0.015
$\overline{\overline{H}}$	2.356	0.575	0.297	0.159	0.066	0.034	0.018	0.007
Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$								
H	22.498	8.302	5.525	3.685	2.214	1.499	1.053	0.643
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	2.714	0.726	0.416	0.248	0.126	0.077	0.047	0.025
\overline{H}	11.342	4.538	3.210	2.257	1.453	1.015	0.728	0.461
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	5.229	1.548	0.930	0.564	0.294	0.184	0.114	0.061
$\overline{\overline{H}}$	12.448	4.746	3.318	2.304	1.474	1.023	0.733	0.463
Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$								
H	4.469	1.376	0.837	0.522	0.275	0.168	0.103	0.056
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	1.874	0.471	0.263	0.150	0.070	0.039	0.022	0.010
\overline{H}	3.234	1.004	0.554	0.301	0.130	0.066	0.034	0.014
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	2.047	0.511	0.290	0.166	0.077	0.044	0.025	0.012
$\overline{\overline{H}}$	2.551	0.820	0.462	0.260	0.117	0.062	0.034	0.017
t de Student com $\nu = 1 (\gamma = 1, \rho = -2)$								
H	6.947	1.685	0.941	0.540	0.256	0.143	0.080	0.040
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	3.926	0.709	0.352	0.182	0.077	0.041	0.021	0.009
\overline{H}	5.356	1.296	0.719	0.413	0.191	0.107	0.059	0.028
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	4.160	0.793	0.410	0.216	0.095	0.050	0.027	0.012
$\overline{\overline{H}}$	5.421	1.305	0.724	0.416	0.192	0.108	0.059	0.028
t de Student com $\nu = 2 (\gamma = 0.5, \rho = -1)$								
H	4.119	1.169	0.705	0.432	0.226	0.138	0.086	0.047
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	1.123	0.200	0.101	0.052	0.023	0.012	0.006	0.003
\overline{H}	1.350	0.277	0.143	0.075	0.031	0.015	0.008	0.003
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	1.513	0.329	0.182	0.102	0.048	0.027	0.015	0.007
$\overline{\overline{H}}$	1.513	0.329	0.182	0.102	0.048	0.027	0.015	0.007
t de Student com $\nu = 4 (\gamma = 0.25, \rho = -0.5)$								
H	4.686	1.096	0.706	0.465	0.280	0.191	0.132	0.089
$\overline{H}_{\beta,\rho}$	0.277	0.052	0.029	0.017	0.008	0.005	0.003	0.002
\overline{H}	1.730	0.577	0.378	0.267	0.167	0.124	0.088	0.057
$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}$	0.757	0.196	0.116	0.070	0.037	0.022	0.014	0.007
$\overline{\overline{H}}$	1.910	0.615	0.398	0.275	0.171	0.125	0.089	0.057

Tabela 5.4: Eficiência relativa simulada, dos estimadores do índice de valores extremos, \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para os modelos *Burr* e *Fréchet*.

n	$\overline{H}_{\beta,\rho}(k)$	$\overline{H}(k)$	$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}(k)$	$\overline{\overline{H}}(k)$
Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$				
100	1.425 \pm 0.019	1.181 \pm 0.014	1.371 \pm 0.016	1.173 \pm 0.014
500	1.543 \pm 0.025	1.149 \pm 0.007	1.471 \pm 0.019	1.144 \pm 0.008
1000	1.579 \pm 0.018	1.137 \pm 0.012	1.504 \pm 0.015	1.134 \pm 0.012
2000	1.622 \pm 0.016	1.136 \pm 0.006	1.546 \pm 0.014	1.134 \pm 0.006
5000	1.703 \pm 0.028	1.142 \pm 0.012	1.619 \pm 0.026	1.140 \pm 0.012
10000	1.761 \pm 0.034	1.141 \pm 0.010	1.672 \pm 0.026	1.139 \pm 0.010
20000	1.810 \pm 0.022	1.137 \pm 0.009	1.716 \pm 0.017	1.137 \pm 0.009
50000	1.890 \pm 0.027	1.136 \pm 0.012	1.794 \pm 0.024	1.136 \pm 0.011
Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$				
100	1.902 \pm 0.031	1.885 \pm 0.033	1.684 \pm 0.021	1.724 \pm 0.028
500	2.127 \pm 0.025	2.113 \pm 0.025	1.850 \pm 0.022	1.928 \pm 0.022
1000	2.235 \pm 0.026	2.275 \pm 0.024	1.936 \pm 0.022	2.083 \pm 0.024
2000	2.339 \pm 0.044	2.438 \pm 0.045	2.014 \pm 0.030	2.240 \pm 0.033
5000	2.525 \pm 0.046	2.734 \pm 0.061	2.143 \pm 0.035	2.544 \pm 0.055
10000	2.633 \pm 0.040	3.011 \pm 0.049	2.229 \pm 0.038	2.784 \pm 0.048
20000	2.723 \pm 0.043	3.285 \pm 0.059	2.306 \pm 0.034	3.036 \pm 0.055
50000	2.919 \pm 0.028	3.813 \pm 0.061	2.450 \pm 0.039	3.500 \pm 0.052
Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$				
100	2.881 \pm 0.047	1.409 \pm 0.016	2.075 \pm 0.025	1.345 \pm 0.013
500	3.382 \pm 0.049	1.352 \pm 0.012	2.316 \pm 0.019	1.322 \pm 0.011
1000	3.643 \pm 0.031	1.312 \pm 0.011	2.438 \pm 0.023	1.290 \pm 0.012
2000	3.853 \pm 0.059	1.278 \pm 0.015	2.557 \pm 0.018	1.265 \pm 0.015
5000	4.190 \pm 0.060	1.234 \pm 0.006	2.745 \pm 0.039	1.225 \pm 0.006
10000	4.422 \pm 0.076	1.215 \pm 0.011	2.853 \pm 0.041	1.211 \pm 0.011
20000	4.719 \pm 0.062	1.203 \pm 0.007	3.042 \pm 0.035	1.199 \pm 0.007
50000	5.109 \pm 0.091	1.180 \pm 0.009	3.251 \pm 0.048	1.178 \pm 0.009
Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$				
100	1.545 \pm 0.029	1.176 \pm 0.011	1.478 \pm 0.027	1.324 \pm 0.017
500	1.709 \pm 0.025	1.170 \pm 0.019	1.641 \pm 0.020	1.295 \pm 0.023
1000	1.784 \pm 0.017	1.229 \pm 0.011	1.700 \pm 0.018	1.346 \pm 0.014
2000	1.871 \pm 0.039	1.317 \pm 0.019	1.776 \pm 0.033	1.418 \pm 0.024
5000	1.987 \pm 0.026	1.453 \pm 0.014	1.883 \pm 0.021	1.530 \pm 0.015
10000	2.072 \pm 0.032	1.593 \pm 0.018	1.953 \pm 0.036	1.640 \pm 0.018
20000	2.176 \pm 0.042	1.748 \pm 0.023	2.048 \pm 0.039	1.741 \pm 0.019
50000	2.328 \pm 0.029	2.018 \pm 0.020	2.189 \pm 0.031	1.850 \pm 0.011

Tabela 5.5: Eficiência relativa simulada, dos estimadores do índice de valores extremos, \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$, para o modelo t de Student.

n	$\overline{H}_{\beta,\rho}(k)$	$\overline{H}(k)$	$\overline{\overline{H}}_{\beta,\rho}(k)$	$\overline{\overline{H}}(k)$
t de Student com $\nu = 1$ ($\gamma = 1, \rho = -2$)				
100	1.330 \pm 0.010	1.139 \pm 0.007	1.292 \pm 0.009	1.132 \pm 0.006
500	1.543 \pm 0.015	1.141 \pm 0.011	1.458 \pm 0.010	1.137 \pm 0.010
1000	1.636 \pm 0.011	1.144 \pm 0.009	1.516 \pm 0.019	1.140 \pm 0.009
2000	1.721 \pm 0.016	1.143 \pm 0.010	1.579 \pm 0.009	1.140 \pm 0.010
5000	1.819 \pm 0.016	1.159 \pm 0.008	1.640 \pm 0.016	1.156 \pm 0.007
10000	1.881 \pm 0.039	1.156 \pm 0.010	1.686 \pm 0.024	1.153 \pm 0.010
20000	1.938 \pm 0.038	1.167 \pm 0.011	1.734 \pm 0.035	1.165 \pm 0.010
50000	2.047 \pm 0.028	1.185 \pm 0.007	1.825 \pm 0.027	1.183 \pm 0.007
t de Student com $\nu = 2$ ($\gamma = 0.5, \rho = -1$)				
100	1.915 \pm 0.019	1.747 \pm 0.023	1.650 \pm 0.023	1.590 \pm 0.023
500	2.417 \pm 0.048	2.055 \pm 0.041	1.886 \pm 0.028	1.834 \pm 0.027
1000	2.643 \pm 0.045	2.221 \pm 0.029	1.969 \pm 0.013	1.960 \pm 0.017
2000	2.870 \pm 0.022	2.402 \pm 0.031	2.057 \pm 0.027	2.115 \pm 0.032
5000	3.159 \pm 0.053	2.716 \pm 0.048	2.171 \pm 0.033	2.376 \pm 0.037
10000	3.404 \pm 0.052	3.004 \pm 0.042	2.276 \pm 0.032	2.612 \pm 0.040
20000	3.661 \pm 0.067	3.352 \pm 0.054	2.395 \pm 0.018	2.928 \pm 0.043
50000	3.987 \pm 0.048	3.839 \pm 0.046	2.520 \pm 0.033	3.342 \pm 0.047
t de Student com $\nu = 4$ ($\gamma = 0.25, \rho = -0.5$)				
100	4.114 \pm 0.044	1.646 \pm 0.009	2.489 \pm 0.014	1.566 \pm 0.007
500	4.573 \pm 0.060	1.379 \pm 0.020	2.363 \pm 0.044	1.335 \pm 0.018
1000	4.940 \pm 0.072	1.367 \pm 0.016	2.464 \pm 0.020	1.333 \pm 0.013
2000	5.285 \pm 0.107	1.319 \pm 0.018	2.578 \pm 0.052	1.301 \pm 0.017
5000	5.800 \pm 0.097	1.294 \pm 0.011	2.768 \pm 0.059	1.278 \pm 0.010
10000	6.175 \pm 0.107	1.242 \pm 0.011	2.944 \pm 0.053	1.233 \pm 0.011
20000	6.537 \pm 0.092	1.223 \pm 0.010	3.089 \pm 0.041	1.218 \pm 0.010
50000	7.504 \pm 0.097	1.254 \pm 0.004	3.474 \pm 0.043	1.250 \pm 0.004

5.4 Aplicação a dados reais

Em Matemática Financeira é muito frequente trabalhar com os log retornos, que se assumem estacionários, para o cálculo de probabilidades de acontecimentos raros, como por exemplo, o cálculo do “*Value at Risk*” (VaR), um quantil muito elevado dos log retornos negativos. Embora também se utilizem modelos normais, como o famoso modelo Black-Scholes, sabe-se que os modelos mais adequados dos log retornos têm cauda pesada.

Muitos dos resultados da TVE, incluindo os deste trabalho, são obtidos sob a hipótese da amostra ser i.i.d.. Neste tipo de dados financeiros não faz sentido admitir a independência. No entanto, sabemos que o comportamento dos estimadores semi-paramétricos de acontecimentos raros pode ser generalizado a observações com dependência fraca (Drees [14], [15]). Os estimadores semi-paramétricos de parâmetros associados à cauda são também consistentes e assintoticamente normais numa vasta classe de dados fracamente dependentes e podem ser utilizados neste tipo de dados.

5.4.1 Euro “versus” Libra

Iremos aqui ilustrar o comportamento dos estimadores em estudo através da análise das taxas de câmbio do Euro versus Libra Inglesa desde 4 de Janeiro de 1999, até 30 de Dezembro de 2005. Estes dados foram colecionados pelo Sistema Europeu de Bancos Centrais e foram obtidos em <http://www.bportugal.pt/>.

Na Figura 5.8 apresentamos a taxa de câmbio diária, x_t , durante o período acima mencionado e os $n = 1793$ log-retornos, $r_t = 100(\ln x_t - \ln x_{t-1})$, os dados a serem analisados.

5.4.1.1 Análise dos log retornos positivos

Na Figura 5.9, a análise dos $n^+ = 820$ log-retornos positivos, permitiu-nos obter as trajetórias amostrais seguintes, para os estimadores dos parâmetros de segunda ordem ρ e β em (3.38) e (3.51), respectivamente.

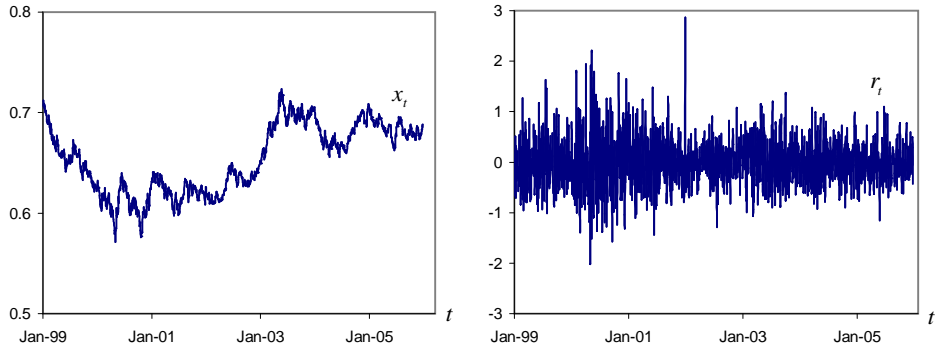


Figura 5.8: Câmbio diário Euro/Libra Inglesa (esquerda) e log-retorno diário (direita) do Euro versus a Libra Inglesa.

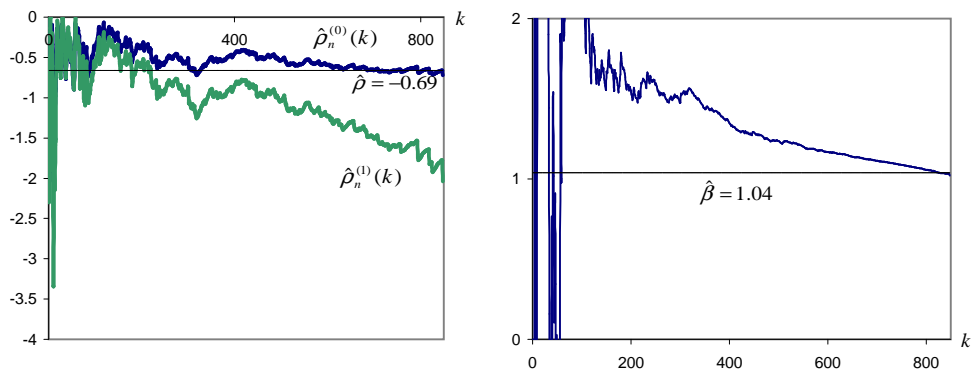


Figura 5.9: Estimativas do parâmetro de “forma” de segunda ordem ρ , através de $\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$ em (3.38), $\tau = 0$ e 1 (esquerda) e do parâmetro de “escala” de segunda ordem β , através de $\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$ em (3.51) (direita), para os log-retornos diários do Euro versus a Libra Inglesa.

As trajectórias amostrais dos estimadores de ρ associados a $\tau = 0$ e $\tau = 1$ levam-nos, com base em qualquer critério de estabilidade para valores elevados de k , à escolha da estimativa associada a $\tau = 0$. Escolhendo o nível $k_1 = \lceil 820^{0.995} \rceil = 849$ em (3.44), obtivemos $\hat{\rho} = \hat{\rho}_n^{(0)}(849) = -0.69$. A utilização de $\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$, calculado também no nível k_1 , conduz-nos à estimativa $\hat{\beta} = 1.04$.

As trajectórias amostrais associadas ao estimador clássico H em (3.5), e ao estimador de viés reduzido \overline{H} em (5.2), são apresentadas na Figura 5.10. A trajectória amostral de \overline{H} apresenta uma pequena região estável que nos permite obter a estimativa

$$\hat{\gamma} = 0.29.$$

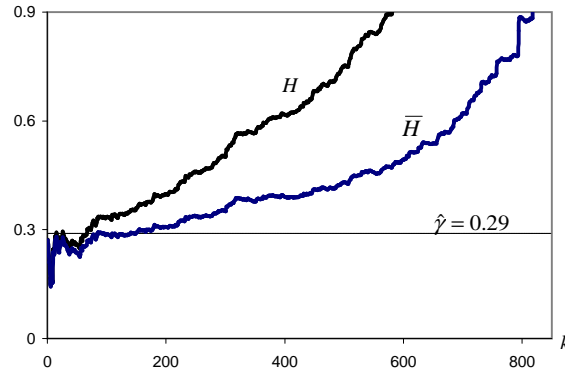


Figura 5.10: Estimativas fornecidas pelos estimadores de Hill, $H(k)$ e $\bar{H}(k)$ em (3.5) e (5.2), respectivamente.

5.4.1.2 Análise dos log retornos negativos

Se considerarmos os log retornos negativos apresentados na Figura 5.8, os valores extremos são os mais pequenos. De modo a aplicar os resultados já conhecidos para máximos, basta considerar os log retornos $r_t^* = -100(\ln x_t - \ln x_{t-1})$ e considerar apenas os valores positivos. Dos $n = 1793$ log retornos, apenas se podem utilizar $n^- = 919$ log retornos, r_t^* .

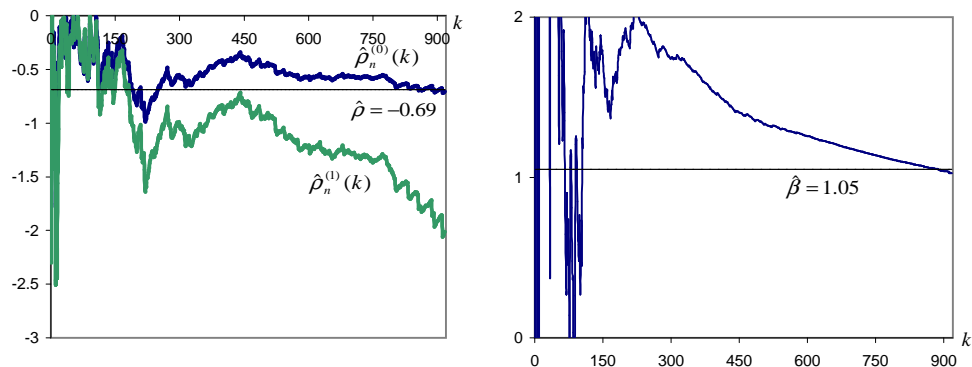


Figura 5.11: Estimativas do parâmetro de “forma” de segunda ordem ρ , através de $\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$ em (3.38), $\tau = 0$ e 1 (esquerda) e do parâmetro de “escala” de segunda ordem β , através de $\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$ em (3.51) (direita), para os log-retornos diários (negativos) do Euro versus a Libra Inglesa.

Utilizando novamente o mesmo nível k_1 em (3.44), e com base nas trajectórias amostrais de ρ associados a $\tau = 0$ e $\tau = 1$, podemos com base em qualquer critério de estabilidade para k elevado escolher a estimativa associada a $\tau = 0$. Obtivemos $\hat{\rho} = \hat{\rho}_n^{(0)}(888) = -0.69$. A utilização de $\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$, calculado também no nível k_1 em (3.44), conduz-nos à estimativa $\hat{\beta} = 1.05$.

Na Figura 5.12 apresentamos as trajectórias amostrais associadas ao estimador clássico H em (3.5), e ao estimador de viés reduzido \bar{H} em (5.2) do índice de valores extremos, γ . Com base na estabilidade da trajectória amostral de \bar{H} , para níveis elevados, obtemos a estimativa $\hat{\gamma} = 0.22$.

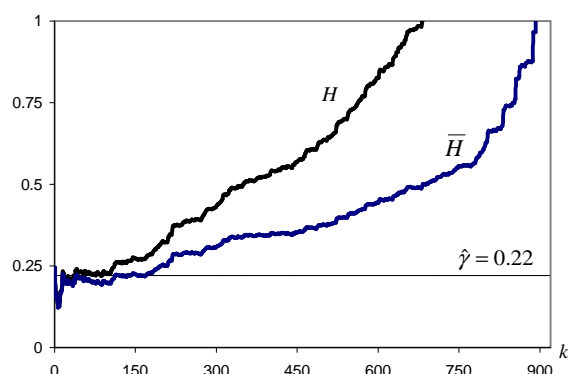


Figura 5.12: Estimativas do índice de valores extremos fornecidas pelos estimadores de Hill, $H(k)$ e $\bar{H}(k)$ em (3.5) e (5.2), respectivamente.

5.4.2 S&P500

No segundo exemplo iremos utilizar o índice financeiro S&P500, um dos mais importantes nos EUA, do qual fazem parte muitas das maiores empresas daquele país. Os dados referem-se a valores de fecho entre 2 de Janeiro de 1996 até 30 de Dezembro de 2005 e foram obtidos em <http://finance.yahoo.com/>.

Apresentamos na Figura 5.13 o valor de fecho do índice S&P500, x_t , durante o período acima mencionado e os respectivos log-retornos, $r_t = 100(\ln x_t - \ln x_{t-1})$, $t = 1, \dots, 2518$. Vamos fazer a inferência para as perdas, ou seja, utilizando os log retornos negativos.

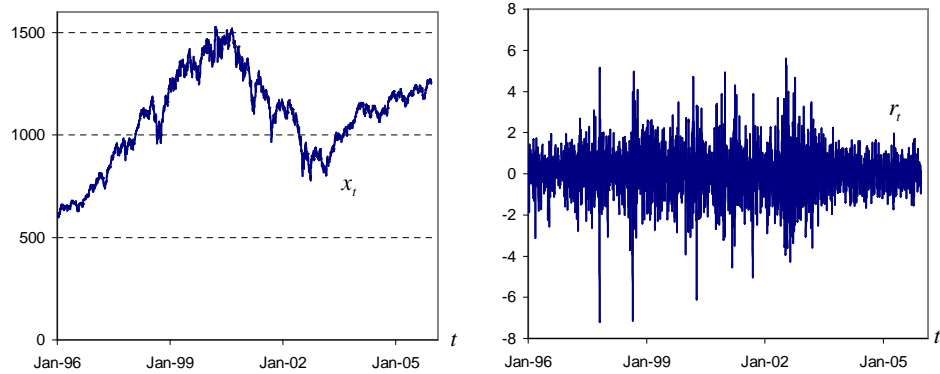


Figura 5.13: Índice S&P500 (esquerda) e respectivo log-retorno diário (direita) entre 2 de Janeiro de 1996 até 30 de Dezembro de 2005.

Utilizando os $n_0 = 2123$ log-retornos negativos (multiplicados por -1) apresentamos na Figura 5.14 as trajetórias amostrais de $\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$ (esquerda) enquanto função de k , para $\tau = 0$ e $\tau = 1$. Mais uma vez é a trajetória amostral associada ao parâmetro de controlo $\tau = 0$ a que apresenta maior estabilidade para k elevado. Obtemos as estimativas $\hat{\rho} = \hat{\rho}_n^{(0)}(k_1) = -0.68$, onde $k_1 = 1159$ é o nível introduzido em (3.44) e $\hat{\beta} = \hat{\beta}(k_1) = 1.04$.

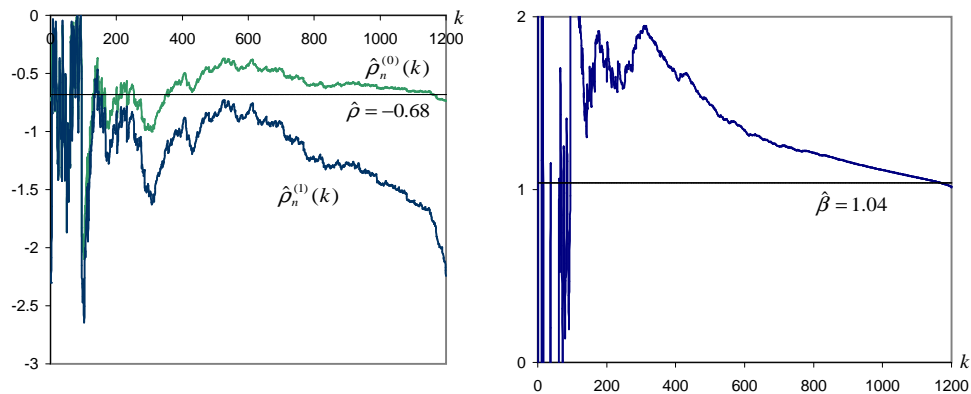


Figura 5.14: Estimativas do parâmetro de “forma” de segunda ordem ρ , através de $\hat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$ em (3.38), $\tau = 0$ e 1 (esquerda) e do parâmetro de “escala” de segunda ordem β , através de $\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$ em (3.51) (direita), para os log-retornos diários negativos do índice S&P500.

Na Figura 5.15 apresentamos as trajectórias amostrais do estimador de Hill H em (3.5), e do estimador de viés reduzido \overline{H} introduzido em (5.2). Com base em qualquer critério de estabilidade da trajectória amostral de \overline{H} , para valores moderados de k , obtemos a estimativa $\hat{\gamma} = 0.27$, também ilustrada na Figura 5.15.

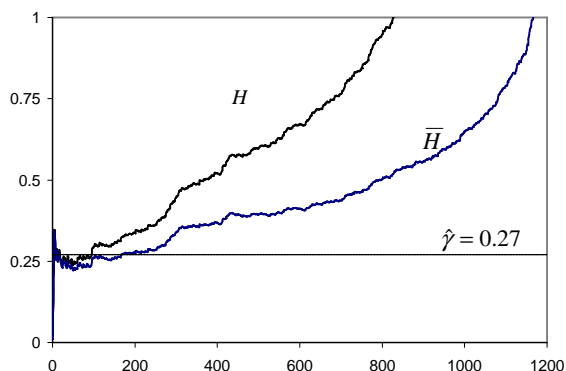


Figura 5.15: Estimativas fornecidas pelos estimadores de Hill, $H(k)$ e $\overline{H}(k)$ em (3.5) e (5.2), respectivamente.

5.5 Conclusões gerais

De um modo geral, poucas são as diferenças entre os estimadores \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$ introduzidos em (5.2) e (5.3), respectivamente. No entanto, quando confrontados com dados reais, é aconselhável representar as trajectórias amostrais dos novos estimadores de modo a escolher o mais adequado estimador do índice de valores extremos, γ .

Se conseguirmos estimar, de modo adequado, os parâmetros de segunda ordem, os novos estimadores \overline{H} e $\overline{\overline{H}}$ apresentam para qualquer nível k , um erro médio quadrático inferior ao do clássico estimador de Hill. A redução do erro médio quadrático verifica-se mesmo quando $\rho < -1$, uma região onde costuma ser difícil encontrar alternativas ao estimador de Hill. Nos exemplos apresentados com $\rho \leq -1$, os novos estimadores apresentam uma elevada estabilidade das trajectórias do valor médio, junto ao verdadeiro valor do índice de valores extremos, γ .

Capítulo 6

Estimação de um Parâmetro de escala de primeira ordem

Neste capítulo vamos considerar um modelo de cauda pesada, F , cuja função quantil é do tipo $U(t) = Ct^\gamma L(t)$, onde $L(t)$ é uma função de variação lenta, verificando $L(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$, e C o parâmetro de escala de primeira ordem. Existem já alguns trabalhos relativos à estimação deste parâmetro de escala C , embora pouca atenção tenha sido dada à remoção de viés. Os estimadores semi-paramétricos existentes, tal como os estimadores clássicos do índice cauda, dependem muito da escolha correcta do nível k , isto é, do número de estatísticas ordinais a utilizar. Se escolhermos um valor muito pequeno para k temos um viés pequeno mas uma variância elevada. No entanto, se optarmos por um valor k mais elevado já temos uma variância pequena, mas também um viés elevado.

Neste capítulo estamos interessados na remoção do termo dominante de viés, na estimação semi-paramétrica de C . Na secção 6.1 indicamos algumas propriedades assintóticas do estimador clássico do parâmetro de escala de primeira ordem. Depois, introduzimos novos estimadores semi-paramétricos deste parâmetro e na secção 6.2 apresentamos algumas propriedades assintóticas, num contexto de variação regular de terceira ordem. Por fim, estudamos na secção 6.3 o comportamento dos estimadores, para amostras de dimensão finita.

6.1 Estimadores do parâmetro de escala

De modo a obter informação sobre o viés dos estimadores admitimos neste capítulo que F é um modelo pertencente à classe de Hall em (2.63), com função quantil do tipo

$$U(t) = \mathcal{C}t^\gamma \left(1 + \frac{\gamma\beta}{\rho}t^\rho + \frac{\gamma\beta\beta'}{2\rho}t^{2\rho}(1 + o(1)) \right), \quad (6.1)$$

onde $\mathcal{C} > 0$ é o parâmetro de escala que interessa estimar, $\beta, \beta' \neq 0$ e $\rho < 0$.

Todos os modelos pertencentes a (6.1) verificam a condição de variação regular de terceira ordem, (2.43). Podemos assim escolher $A(t) = \gamma\beta t^\rho$ em (2.41), aqui parametrizada como função do índice de valores extremos γ , do parâmetro de “escala” de segunda ordem, β e do parâmetro de “forma”, $\rho < 0$. A função $B(t)$ e o parâmetro ρ' em (2.43) podem ser escolhidos como $(\beta' - \gamma\beta/\rho)t^\rho$ e ρ , respectivamente.

Observação 6.1.1. *O modelo apresentado em (6.1) corresponde a uma reparametrização de (2.63) e é também equivalente a*

$$U(t) = \mathcal{C}t^\gamma \left(1 + \frac{A(t)}{\rho} + \frac{A(t)}{2\rho} \left(B(t) + \frac{A(t)}{\rho} \right) (1 + o(1)) \right). \quad (6.2)$$

Como o parâmetro da condição de variação regular de terceira ordem ρ' é igual a ρ , então $B(t) = (\beta' - \gamma\beta/\rho)t^\rho = O(A(t))$.

O estimador clássico do parâmetro de escala, \mathcal{C} , proposto por Hall [33] para este tipo de modelos é

$$\mathcal{C}(k) \equiv \mathcal{C}_H(k) := \left(\frac{k}{n} \right)^{H(k)} X_{n-k:n}, \quad (6.3)$$

onde $H(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n}$ representa o estimador de Hill calculado no mesmo nível k . Para conhecermos o comportamento assintótico e obtermos informação relativa ao viés basta considerar uma condição de variação regular de segunda ordem.

Proposição 6.1.1. *Para k intermédio tal que $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$ (finito) e sob a condição de segunda ordem, (2.42), podemos garantir a validade da seguinte representação em distribuição,*

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln n} \left(\frac{C_H(k) - C}{C} \right) \stackrel{d}{=} \left\{ \left(\frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \left(\gamma Z_k^{(1)} + \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{1-\rho} \right) + \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{\rho \ln n} \right\} (1 + o_p(1)), \quad (6.4)$$

onde $Z_k^{(1)}$ é a variável aleatória normal padrão definida em (3.17).

As condições impostas permitem verificar que $\ln k / \ln n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -2\rho / (1 - 2\rho)$. Assim, pode-se garantir que o estimador é assintoticamente normal com viés eventualmente não nulo igual a $\frac{-\lambda}{(1-\rho)(1-2\rho)}$.

Observação 6.1.2. O erro médio quadrático deste estimador é proporcional ao do estimador de Hill, isto é, é proporcional a $\frac{\gamma^2}{k} + \left(\frac{A(n/k)}{1-\rho} \right)^2$. Por esta razão o comportamento de $C_H(k)$ não é muito diferente do comportamento do estimador de Hill. As trajectórias amostrais costumam ser bastante voláteis, não só devido à elevada variância para k pequeno, como também pelo viés elevado para k grande. É por isso que não é fácil escolhermos o nível k a utilizar em $C_H(k)$.

Observação 6.1.3. Na representação (6.4) aparecem dois termos de viés de ordem diferente. O termo dominante resulta de $\left(\frac{k}{n}\right)^{H(k)}$, isto é, da estimação do índice de valores extremos no mesmo nível k . Este termo pode ser removido se utilizarmos um estimador do índice de valores extremos “assintoticamente centrado”. Por outro lado há outro termo de viés que resulta da v.a. $X_{n-k:n}$ que, embora seja de ordem inferior, deverá também ser removido. Alguns resultados de simulação indicaram que mesmo a remoção dos dois termos de viés deste estimador não foram suficientes para que as trajectórias amostrais fossem mais estáveis. É por esta razão que se introduz neste trabalho um novo estimador para o parâmetro de escala C .

Como, para k intermédio, $(k/n)^\gamma X_{n-k:n} \xrightarrow{\mathbb{P}} C$, considere-se o seguinte estimador baseado nos espaçamentos $X_{n-[k\theta]:n} - X_{n-k:n}$, $0 < \theta < 1$,

$$\widehat{C}_{\widehat{\gamma}}(k; \theta) := \left(\frac{k}{n} \right)^{\widehat{\gamma}} \frac{X_{n-[k\theta]:n} - X_{n-k:n}}{\theta^{-\widehat{\gamma}} - 1}, \quad (6.5)$$

onde θ é um parâmetro de controlo. De modo a reduzir o viés, vamos considerar que o índice de valores extremos, γ , é estimado no mesmo nível k usando um qualquer estimador “assintoticamente centrado”. Caeiro [8] estuda o termo dominante de viés de $\widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k; \theta)$ e, com a parametrização $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, obtem explicitamente esse termo, o qual é dado por

$$\mathfrak{B}(\gamma, \beta, \rho, \theta) = \frac{\theta^{-\gamma+\rho} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \left(\frac{\gamma \beta (n/k)^\rho}{\rho} \right). \quad (6.6)$$

De modo a reduzir o viés assintótico é sensato também considerar o seguinte estimador semi-paramétrico de \mathcal{C} :

$$\widetilde{\mathcal{C}}_{\widehat{\gamma}}(k; \theta) := \left(\frac{k}{n} \right)^{\widehat{\gamma}} \frac{X_{n-[k\theta]:n} - X_{n-k:n}}{\theta^{-\widehat{\gamma}} - 1} \times \left(1 - \mathfrak{B}(\widehat{\gamma}, \widehat{\beta}, \widehat{\rho}, \theta) \right), \quad (6.7)$$

onde $\widehat{\rho}$ e $\widehat{\beta}$ são estimadores adequados dos parâmetros de segunda ordem ρ e β , respectivamente, baseados num número de e.o.’s de topo, k_1 , superior ao número de e.o.’s k usadas na estimação do índice de valores extremos e do parâmetro de escala, \mathcal{C} .

No que se segue, estes estimadores serão denotados $\widehat{\mathcal{C}}(k) = \widehat{\mathcal{C}}_{\widehat{\gamma}}(k)$ e $\widetilde{\mathcal{C}}(k) = \widetilde{\mathcal{C}}_{\widehat{\gamma}, \widehat{\rho}, \widehat{\beta}}(k)$.

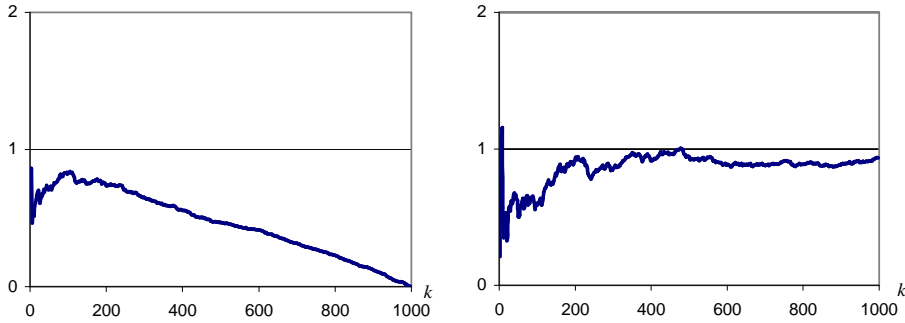


Figura 6.1: Trajectória amostral de $\mathcal{C}(k)$ (esquerda) e $\widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k)$ (direita) calculada a partir de uma amostra de dimensão 1000 do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -1$.

Na Figura 6.1 apresentamos trajectórias amostrais de $\mathcal{C}(k)$ e $\widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k)$ (sem a estimação de γ) para uma amostra do modelo *Burr*(1, -1), com f.d. $F(x) = 1 - (1 + x)^{-1}$, $x > 0$. Verifica-se que, a segunda trajectória amostral, relativa a um dos estimadores propostos, está muito mais próxima do verdadeiro valor $\mathcal{C} = 1$. Este exemplo sugere que o novo estimador do parâmetro de escala, \mathcal{C} , apresenta viés inferior ao do estimador clássico.

6.2 Propriedades assintóticas

Nesta secção pretendemos estudar os novos estimadores em contexto de terceira ordem. Será dado destaque ao estudo do viés e variância. Começamos por apresentar alguns resultados fundamentais para derivar as propriedades assintóticas dos estimadores introduzidos neste Capítulo.

Proposição 6.2.1. *Se k for uma sequência intermédia e F um modelo cuja cauda verifica (6.2), então*

$$\frac{X_{n-k:n}}{(n/k)^\gamma} \stackrel{d}{=} \mathcal{C} \left\{ 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} B_k + \frac{A(n/k)}{\rho} + \left(\frac{A(n/k)B(n/k)}{\rho} + \frac{A^2(n/k)}{2\rho^2} \right) (1 + o_p(1)) \right\}, \quad (6.8)$$

onde B_k é uma v.a. assintoticamente normal padrão com estrutura de covariância,

$$\text{Cov}(B_i, B_j) = \frac{\sqrt{i}\sqrt{j}(1-j/n)}{j-1}, \quad i < j. \quad (6.9)$$

Demonstração.

Como $X_{n-k:n} \stackrel{d}{=} U(Y_{n-k:n})$, onde Y representa uma v.a. Pareto padrão, e $U(t)$ admite uma expansão do tipo (6.2), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{X_{n-k:n}}{(n/k)^\gamma} \stackrel{d}{=} \mathcal{C} \left(\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \right)^\gamma & \left[1 + \frac{A(Y_{n-k:n})}{\rho} + \right. \\ & \left. \times \left(\frac{A(Y_{n-k:n})B(Y_{n-k:n})}{2\rho} + \frac{A^2(Y_{n-k:n})}{2\rho^2} \right) (1 + o(1)) \right]. \end{aligned}$$

Como por hipótese $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, de acordo com a Proposição 2.2.2 e a Observação 3.1.2, podemos garantir que

1. $\left(\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \right)^\gamma \stackrel{d}{=} 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} B_k (1 + o_p(1))$,
2. $A(Y_{n-k:n}) \stackrel{d}{=} A(n/k) \left(1 + O_p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right)$.

Portanto, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{X_{n-k:n}}{(n/k)^\gamma} \stackrel{d}{=} \mathcal{C} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} B_k (1 + o_p(1)) \right) & \times \left\{ 1 + \frac{A(n/k)}{\rho} \left(1 + O_p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{A(n/k)B(n/k)}{\rho} + \frac{A^2(n/k)}{2\rho^2} \right) (1 + o_p(1)) \right\}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

De acordo com a Observação 3.1.2, nos níveis que usualmente consideramos, o termo de ordem $O_p\left(\frac{A(n/k)}{\sqrt{k}}\right)$ pode ser desprezado, seguindo-se de forma quase imediata (6.8).

A covariância entre B_i e B_j com $i < j$ obtém-se facilmente a partir da covariância entre $Y_{i:n}$ e $Y_{j:n}$, que pode ser consultada na Tabela 2.1. □

Na Proposição que se segue vamos estudar o comportamento assintótico da v.a. baseada nos espaçamentos, $X_{n-[k\theta]:n} - X_{n-k:n}$,

$$\widehat{C}_\gamma(k; \theta) = \left(\frac{k}{n}\right)^\gamma \frac{X_{n-[k\theta]:n} - X_{n-k:n}}{\theta^{-\gamma} - 1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Proposição 6.2.2. *Admita-se válida a condição de terceira ordem, (2.43), com $\rho' = \rho$, que k é uma sequência intermédia e F com função quantil do tipo (6.1), com os parâmetros γ , β e ρ conhecidos. Nestas condições,*

$$\widehat{C}_\gamma(k; \theta) \stackrel{d}{=} \mathcal{C} \left[1 + \frac{\gamma \sigma_{\mathcal{C}, \theta}}{\sqrt{k}} Z_{k, \theta}^{\mathcal{C}} + \frac{\theta^{-(\gamma+\rho)} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} + \frac{\theta^{-(\gamma+2\rho)} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \left(\frac{A(n/k)B(n/k)}{2\rho} + \frac{A^2(n/k)}{2\rho^2} \right) (1 + o_p(1)) \right], \quad (6.11)$$

onde $0 < \theta < 1$, B_k é a v.a. assintoticamente normal padrão introduzida na Proposição 6.2.1,

$$\sigma_{\mathcal{C}, \theta}^2 = 1 + (\theta^{-1} - 1) \left(\frac{\theta^{-\gamma}}{\theta^{-\gamma} - 1} \right)^2 \quad (6.12)$$

e

$$Z_{k, \theta}^{\mathcal{C}} = \frac{\theta^{-(\gamma+1/2)} B_{k\theta} - B_k}{\sigma_{\mathcal{C}}(\theta^{-\gamma} - 1)} \quad (6.13)$$

é uma v.a. assintoticamente normal padrão.

Demonstração.

Utilizando o resultado (6.8), apresentado na Proposição 6.2.1, e como $A(n/k\theta) \sim$

$\theta^{-\rho}A(n/k)$,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k; \theta) &= \frac{1}{\theta^{-\gamma} - 1} \left(\frac{X_{n-k\theta:n}}{\left(\frac{n}{k\theta}\right)^\gamma} \theta^{-\gamma} - \frac{X_{n-k:n}}{\left(\frac{n}{k}\right)^\gamma} \right) \\ &\stackrel{d}{=} \frac{\mathcal{C}}{\theta^{-\gamma} - 1} \left[\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k\theta}} B_{k\theta} + \frac{A(n/k\theta)}{\rho} + \frac{A(n/k\theta)B(n/k\theta)}{2\rho} + \frac{A^2(n/k\theta)}{2\rho^2} \right) \theta^{-\gamma} \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} B_k + \frac{A(n/k)}{\rho} + \frac{A(n/k)B(n/k)}{2\rho} + \frac{A^2(n/k)}{2\rho^2} \right) \right] (1 + o_p(1)) \\ &= \mathcal{C} \left\{ 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \frac{\theta^{-(\gamma+1/2)} B_{k\theta} - B_k}{\theta^{-\gamma} - 1} + \frac{\theta^{-(\gamma+\rho)} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\theta^{-(\gamma+2\rho)} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \frac{A(n/k)B(n/k)}{2\rho} + \frac{\theta^{-(\gamma+2\rho)} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \frac{A^2(n/k)}{2\rho^2} \right) (1 + o_p(1)) \right\}.\end{aligned}$$

Como $Cov(B_{k\theta}, B_k) = \frac{\sqrt{k\theta}\sqrt{k(1-k/n)}}{k-1} \sim \sqrt{\theta}$, resulta que

$$\sigma_{\widehat{\mathcal{C}}_\gamma, \theta}^2 = Var [Z_{k, \theta}^{\mathcal{C}}] = \frac{\theta^{-(2\gamma+1)} - 2\theta^{-\gamma} + 1}{(\theta^{-\gamma} - 1)^2} = 1 + (\theta^{-1} - 1) \left(\frac{\theta^{-\gamma}}{\theta^{-\gamma} - 1} \right)^2,$$

e conclui-se que a representação em distribuição (6.11) é verdadeira. \square

Na Figura 6.2 apresentamos, para vários valores de γ e θ o desvio padrão de $\widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k; \theta)$. Podemos verificar que o valor de θ que minimiza o desvio padrão não é sempre o mesmo, isto é, depende de γ . No que se segue vamos considerar sempre $\theta = 1/2$, já que este parece ser um valor que permite obter um desvio padrão próximo do valor mínimo (para os valores de γ apresentados). Passamos também a denotar $\widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k) \equiv \widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k; 1/2)$ e $\widetilde{\mathcal{C}}_\gamma(k) \equiv \widetilde{\mathcal{C}}_\gamma(k; 1/2)$.

Corolário 6.2.1. *Nas condições da Proposição anterior,*

$$\begin{aligned}\sqrt{k} \left(\frac{\widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k) - \mathcal{C}}{\mathcal{C}} \right) &\stackrel{d}{=} \gamma \sigma_{\mathcal{C}} Z_k^{\mathcal{C}} + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^\gamma - 1} \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{\rho} + \frac{\theta^{-(\gamma+2\rho)} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \times \\ &\quad \times \left(\frac{A(n/k)B(n/k)}{2\rho} + \frac{A^2(n/k)}{2\rho^2} \right) (1 + o_p(1))\end{aligned}\tag{6.14}$$

e

$$\begin{aligned}\sqrt{k} \left(\frac{\widetilde{\mathcal{C}}_\gamma(k) - \mathcal{C}}{\mathcal{C}} \right) &\stackrel{d}{=} \gamma \sigma_{\mathcal{C}} Z_k^{\mathcal{C}} + \frac{\theta^{-(\gamma+2\rho)} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \times \\ &\quad \times \sqrt{k} \left(\frac{A(n/k)B(n/k)}{2\rho} + \frac{A^2(n/k)}{2\rho^2} \right) (1 + o_p(1)),\end{aligned}\tag{6.15}$$

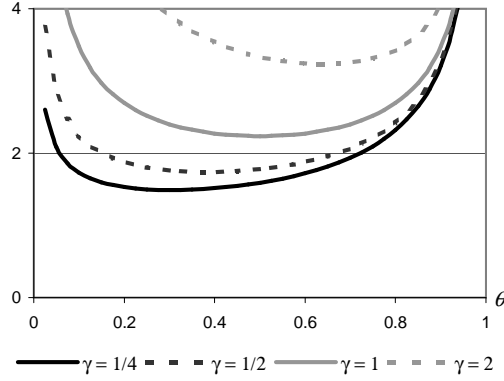


Figura 6.2: Gráfico de $\gamma\sigma_C$ para vários valores de γ .

onde

$$\sigma_C = \sqrt{1 + \left(\frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1}\right)^2}, \quad (6.16)$$

e

$$Z_k^C = \frac{2^{\gamma+1/2}B_{k/2} - B_k}{\sigma_C(2^\gamma - 1)}, \quad (6.17)$$

é uma v.a. assintoticamente normal padrão.

6.2.1 Propriedades assintóticas dos novos estimadores sem a estimação de parâmetros de segunda ordem

Considere-se um dos estimadores do índice de valores extremos “assintoticamente centrados” $\gamma^{GJ_3(\rho)}(k)$, $\gamma^{ML(\rho)}(k)$ ou $\gamma^{\overline{H}}(k) \equiv \overline{H}(k)$, definidos em (3.28), (3.50) e (5.2), respectivamente. De modo a simplificar a notação, denotamos estes estimadores por $\hat{\gamma}^\bullet(k)$ onde $\bullet = “GJ_3”$, $\bullet = “ML”$ ou $\bullet = “\overline{H}”$. Podemos representar genericamente, num contexto de terceira ordem,

$$\hat{\gamma}^\bullet(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma\sigma_\bullet}{\sqrt{k}}Z_k^\bullet + (b_{1,\bullet}A(n/k)B(n/k) + b_{2,\bullet}A^2(n/k))(1 + o_p(1)), \quad (6.18)$$

onde Z_k^\bullet é uma v.a. assintoticamente normal padrão, $\sigma_\bullet > 0$ e $b_{1,\bullet}$ e $b_{2,\bullet}$ são constantes que dependem do modelo.

Teorema 6.2.1. *Nas condições da Proposição 6.2.2, e admitindo que γ é estimado através de um dos estimadores assintoticamente centrados, e que os parâmetros de segunda ordem ρ e β são conhecidos,*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln n} \left(\frac{\widehat{\mathcal{C}}_{\widehat{\gamma}^\bullet}(k) - \mathcal{C}}{\mathcal{C}} \right) &\stackrel{d}{=} \left(\frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \gamma \sigma_\bullet Z_k^\bullet + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{(2^\gamma - 1)\rho} \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{\ln n} \\ &+ \left(\frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \left(b_{1,\bullet} \sqrt{k}A(n/k)B(n/k) + b_{2,\bullet} \sqrt{k}A^2(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \\ &+ \left(\widetilde{b}_{1,\bullet} \frac{\sqrt{k}A(n/k)B(n/k)}{\ln n} + \widetilde{b}_{2,\bullet} \frac{\sqrt{k}A^2(n/k)}{\ln n} \right) (1 + o_p(1)), \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde

$$\widetilde{b}_{i,\bullet} = \frac{2^{\gamma+2\rho} - 1}{(2^\gamma - 1)2^{\rho i}} - \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} b_{i,\bullet}, \quad i = 1, 2.$$

Demonstração.

Temos que,

$$\widehat{\mathcal{C}}_{\widehat{\gamma}^\bullet}(k) \stackrel{d}{=} \widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k) \frac{2^\gamma - 1}{2^{\widehat{\gamma}^\bullet} - 1} \left(\frac{k}{n} \right)^{\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma} = \widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k) \frac{2^\gamma - 1}{2^{\widehat{\gamma}^\bullet} - 1} e^{-(\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma) \ln(n/k)}$$

Aplicando o método delta, obtemos

$$\frac{1}{2^{\widehat{\gamma}^\bullet} - 1} = g(\widehat{\gamma}^\bullet) \sim g(\gamma) + g'(\gamma)(\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma) = \frac{1}{2^\gamma - 1} - \frac{2^\gamma \ln 2}{(2^\gamma - 1)^2} (\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma)$$

e

$$e^{-(\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma) \ln(n/k)} \stackrel{d}{=} 1 - (\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma) \ln(n/k) (1 + o_p(1)).$$

Logo,

$$\widehat{\mathcal{C}}_{\widehat{\gamma}^\bullet}(k) \stackrel{d}{=} \widehat{\mathcal{C}}_\gamma(k) \left\{ 1 - \frac{2^\gamma \ln 2}{2^\gamma - 1} (\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma) \right\} \times \{ 1 - \ln(n/k) (\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma) \}.$$

Como por hipótese a representação em distribuição de $\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma$ é do tipo

$$\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma \stackrel{d}{=} \frac{\gamma \sigma_\bullet}{\sqrt{k}} Z_k^\bullet + (b_{1,\bullet} A(n/k)B(n/k) + b_{2,\bullet} A^2(n/k)) (1 + o_p(1)),$$

resulta que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{C}}_{\widehat{\gamma}^\bullet}(k) &\stackrel{d}{=} \mathcal{C} \left\{ 1 + \frac{\gamma\sigma\mathcal{C}}{\sqrt{k}} Z_k^{\mathcal{C}} + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{(2^\gamma - 1)\rho} A(n/k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2^{\gamma+2\rho} - 1}{(2^\gamma - 1)2\rho} \left(A(n/k)B(n/k) + \frac{A^2(n/k)}{\rho} \right) (1 + o_p(1)) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 + \ln(k/n) \frac{\gamma\sigma^\bullet}{\sqrt{k}} Z_k^\bullet + \right. \\ &\quad \left. + \ln(k/n)(b_{1,\bullet}A(n/k)B(n/k) + b_{2,\bullet}A^2(n/k))(1 + o_p(1)) \right\}. \end{aligned}$$

Efectuando alguma operações elementares obtém-se a representação em distribuição (6.19). □

Concluimos que este estimador apresenta uma velocidade de convergência igual à do estimador proposto por Hall, em (6.3). No entanto, em relação ao viés podemos ter a componente dominante nula se $\gamma + \rho = 0$.

Teorema 6.2.2. *Nas condições do Teorema anterior,*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln n} \left(\frac{\widetilde{\mathcal{C}}_{\widetilde{\gamma}^\bullet}(k) - \mathcal{C}}{\mathcal{C}} \right) &\stackrel{d}{=} \left(\frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \gamma\sigma^\bullet Z_k^\bullet \\ &\quad + \left(\frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \left(b_{1,\bullet}\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) + b_{2,\bullet}\sqrt{k}A^2(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \\ &\quad + \left(\frac{\widetilde{b}_{1,\bullet}\sqrt{k}A(n/k)B(n/k)}{\ln n} + \frac{\widetilde{b}_{2,\bullet}\sqrt{k}A^2(n/k)}{\ln n} \right) (1 + o_p(1)). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Demonstração.

Como $\widetilde{\mathcal{C}}_{\widetilde{\gamma}^\bullet}(k) = \widehat{\mathcal{C}}_{\widehat{\gamma}^\bullet}(k) \times \left\{ 1 - \left(\frac{2^{\widehat{\gamma}^\bullet + \rho} - 1}{2^{\widehat{\gamma}^\bullet} - 1} \right) \frac{\widehat{\gamma}^\bullet \beta}{\rho} \left(\frac{n}{k} \right)^\rho \right\}$, e

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^{\widehat{\gamma}^\bullet + \rho} - 1}{2^{\widehat{\gamma}^\bullet} - 1} \right) \frac{\widehat{\gamma}^\bullet \beta}{\rho} \left(\frac{n}{k} \right)^\rho &\stackrel{d}{=} \left(\frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^\gamma - 1} \right) \frac{A(n/k)}{\rho} \\ &\quad - \left(\frac{2^\gamma \ln 2(2^\rho - 1) - 1}{(2^\gamma - 1)^2} + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{\gamma(2^\gamma - 1)} \right) \frac{A(n/k)}{\rho} (\widehat{\gamma}^\bullet - \gamma) \\ &\stackrel{d}{=} \left(\frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^\gamma - 1} \right) \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

o resultado é imediato. □

Mais uma vez a velocidade de convergência é igual à do estimador anterior e à do estimador proposto por Hall , em (6.3). No entanto em relação ao viés, a componente dominante é sempre nula, independentemente do valor de $\gamma + \rho$.

6.2.2 Propriedades assintóticas dos novos estimadores com a estimação de parâmetros de segunda ordem

Considerem-se agora os estimadores do índice de valores extremos “assintoticamente centrados” $\gamma^{GJ_3(\hat{\rho})}(k)$, $\gamma^{ML(\hat{\rho})}(k)$ ou $\gamma^{\overline{H}_{\hat{\rho},\hat{\beta}}}(k) \equiv \overline{H}_{\hat{\rho},\hat{\beta}}(k)$, definidos em (3.28), (3.50) e (5.2), respectivamente e onde $\hat{\rho}$ e $\hat{\beta}$ são estimadores consistentes dos parâmetros de segunda ordem ρ e β , estimados num nível k_1 de ordem superior ao nível k . De modo a simplificar a notação, denotamos estes estimadores por $\hat{\gamma}^*(k)$ onde $\star = “GJ_3(\hat{\rho})”$, $\star = “ML(\hat{\rho})”$ ou $\star = “\overline{H}_{\hat{\rho},\hat{\beta}}”$.

Observação 6.2.1. *Se admitirmos que $(\hat{\rho} - \rho) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)}\right)$ no caso dos estimadores $GJ_3(\hat{\rho})$ e $ML(\hat{\rho})$ ou que $(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)}\right)$ e $\hat{\beta} - \beta \stackrel{d}{=} \beta(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k)$ no caso do estimador $\overline{H}_{\hat{\rho},\hat{\beta}}$, podemos representar genericamente, num contexto de terceira ordem,*

$$\hat{\gamma}^*(k) - \gamma \stackrel{d}{=} \frac{\gamma\sigma_{\bullet}}{\sqrt{k}} Z_k^{\bullet} + (b_{1,\bullet}A(n/k)B(n/k) + b_{2,\bullet}A^2(n/k)) (1 + o_p(1)). \quad (6.21)$$

Proposição 6.2.3. *Admitindo válidas as condições da Observação anterior, que F é um modelo com função quantil do tipo (6.1), que k é uma sequência intermédia podemos garantir que $\hat{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^{\bullet}}(k)$ e $\hat{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^*}(k)$ têm assintoticamente a mesma representação em distribuição, isto é,*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln n} \left(\frac{\hat{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^*}(k) - \mathcal{C}}{\mathcal{C}} \right) &\stackrel{d}{=} \left(\frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \gamma\sigma_{\bullet} Z_k^{\bullet} + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{(2^{\gamma} - 1)\rho} \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{\ln n} \\ &+ \left(\frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \left(b_{1,\bullet} \sqrt{k}A(n/k)B(n/k) + b_{2,\bullet} \sqrt{k}A^2(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \\ &+ \left(\tilde{b}_{1,\bullet} \frac{\sqrt{k}A(n/k)B(n/k)}{\ln n} + \tilde{b}_{2,\bullet} \frac{\sqrt{k}A^2(n/k)}{\ln n} \right) (1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

Demonstração.

Como por hipótese, $\hat{\gamma}^*(k) \stackrel{d}{=} \hat{\gamma}^\bullet(k)$, a demonstração é análoga à do Teorema 6.2.1. \square

Proposição 6.2.4. *Admitindo que se verificam as condições da Proposição anterior e que $(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)}\right)$, independentemente do estimador do índice de valores extremos utilizado, então $\tilde{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^*}(k) \stackrel{d}{=} \tilde{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^\bullet}(k)$.*

Demonstração.

Usando o método delta,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^{\hat{\gamma}^* + \hat{\rho}} - 1}{2^{\hat{\gamma}^*} - 1}\right) \frac{\hat{\gamma}^* \hat{\beta}}{\hat{\rho}} \left(\frac{n}{k}\right)^{\hat{\rho}} &= \frac{2^{\gamma + \rho} - 1}{2^\gamma - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} \times \\ &\times \left[1 + \left(1 - \frac{\gamma 2^\gamma (2^\rho - 1)}{(2^\gamma - 1)(2^{\gamma + \rho} - 1)}\right) \frac{\hat{\gamma}^* - \gamma}{\gamma} + \frac{\hat{\beta} - \beta}{\beta} + (\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k)\right] \\ &\stackrel{d}{=} \left(\frac{2^{\gamma + \rho} - 1}{2^\gamma - 1}\right) \frac{A(n/k)}{\rho} \left[1 + \frac{\hat{\beta} - \beta}{\beta} + (\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) + o_p(1)\right]. \end{aligned}$$

Como por hipótese $\hat{\beta} - \beta \stackrel{d}{=} \beta(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k)$ e $(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{k}A(n/k)}\right)$,

$$\left(\frac{2^{\hat{\gamma}^* + \hat{\rho}} - 1}{2^{\hat{\gamma}^*} - 1}\right) \frac{\hat{\gamma}^* \hat{\beta}}{\hat{\rho}} \left(\frac{n}{k}\right)^{\hat{\rho}} \stackrel{d}{=} \left(\frac{2^{\gamma + \rho} - 1}{2^\gamma - 1}\right) \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^*}(k) &= \hat{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^*}(k) \left(\frac{2^{\hat{\gamma}^* + \hat{\rho}} - 1}{2^{\hat{\gamma}^*} - 1}\right) \frac{\hat{\gamma}^* \hat{\beta}}{\hat{\rho}} \left(\frac{n}{k}\right)^{\hat{\rho}} \\ &\stackrel{d}{=} \hat{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^\bullet}(k) \left(\frac{2^{\gamma + \rho} - 1}{2^\gamma - 1}\right) \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)) \stackrel{d}{=} \tilde{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^\bullet}(k), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln n} \left(\frac{\tilde{\mathcal{C}}_{\hat{\gamma}^*}(k) - \mathcal{C}}{\mathcal{C}}\right) &\stackrel{d}{=} \left(\frac{\ln k}{\ln n} - 1\right) \gamma \sigma_\bullet Z_k^\bullet \\ &+ \left(\frac{\ln k}{\ln n} - 1\right) \left(b_{1,\bullet} \sqrt{k} A(n/k) B(n/k) + b_{2,\bullet} \sqrt{k} A^2(n/k)\right) (1 + o_p(1)) \\ &+ \left(\tilde{b}_{1,\bullet} \frac{\sqrt{k} A(n/k) B(n/k)}{\ln n} + \tilde{b}_{2,\bullet} \frac{\sqrt{k} A^2(n/k)}{\ln n}\right) (1 + o_p(1)). \end{aligned} \tag{6.22}$$

\square

6.3 Propriedades para amostras de dimensão finita

Os resultados desta secção baseiam-se em simulações com 10×1000 amostras de dimensão n , com $n = 100, 500, 1000, 2000, 5000, 20000$ e 50000 . O índice de valores extremos, γ , foi estimado no mesmo nível k através dos estimadores $H(k)$, $GJ(k)$, $ML(k)$ e $\overline{H}(k)$ definidos em (3.5), (3.28), (3.50) e (5.2), respectivamente. Procurámos simular o nível óptimo ($k_0 = \arg \min_k MSE(k)$), valor médio (E) e erro médio quadrático (MSE) do estimador clássico, \mathcal{C} , e do estimador de viés reduzido, $\tilde{\mathcal{C}}_\gamma$, ou seja do seguinte conjunto de estimadores:

1. $\mathcal{C}_H \equiv \mathcal{C}_{H(k)}(k)$;
2. $\tilde{\mathcal{C}}_{GJ} \equiv \tilde{\mathcal{C}}_{GJ(k)}(k)$;
3. $\tilde{\mathcal{C}}_{ML} \equiv \tilde{\mathcal{C}}_{ML(k)}(k)$;
4. $\tilde{\mathcal{C}}_{\overline{H}} \equiv \tilde{\mathcal{C}}_{\overline{H}(k)}(k)$.

Não incluímos no estudo de simulação o estimador $\hat{\mathcal{C}}_\gamma(k)$, definido em (6.5), por apenas ser assintoticamente centrado quando $\gamma + \rho = 0$.

Os parâmetros de segunda ordem de forma, ρ , e de “escala”, β , foram estimados no nível fixo k_1 em (3.44). Para comparar a eficiência do novo estimador, $\tilde{\mathcal{C}}_\gamma$, relativamente ao estimador clássico, simulou-se a seguinte medida de eficiência,

$$Efic[\tilde{\mathcal{C}}_\bullet | \mathcal{C}_H] = \sqrt{\frac{\widehat{MSE}[\mathcal{C}_H(k_0^{\mathcal{C}})]}{\widehat{MSE}[\tilde{\mathcal{C}}_\bullet(k_0^\bullet)]}}.$$

Procuramos estudar o comportamento dos estimadores referidos, do parâmetro de escala \mathcal{C} , para os seguintes modelos:

1. modelo Fréchet, $F(x) = \exp(-x^{-1/\gamma})$, $x > 0$, com $\gamma = 0.5$, 1 ($\rho = -1$, $\beta = 0.5$, $\mathcal{C} = 1$);
2. modelo Burr, $F(x) = 1 - (1 + x^{-\rho/\gamma})^{1/\rho}$, $x > 0$, com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5, -1, -2$ ($\beta = 1$, $\mathcal{C} = 1$);

3. modelo Cauchy, $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$, onde $\gamma = 1$, $\rho = -2$, $\beta = \frac{2}{3}\pi^2$ e $\mathcal{C} = \frac{1}{\pi}$ (Apenas consideramos os valores positivos da amostra).

Apresentamos, nas Figuras 6.3-6.7, e 6.8, trajectórias amostrais do valor médio e do erro médio quadrático simulado dos estimadores considerados, para amostras de dimensão $n = 1000$ dos modelos Burr, Fréchet e Cauchy. Nas Tabelas 6.1-6.3 apresentamos, para os modelos e estimadores considerados, a fracção óptima da amostra e o valor médio e erro médio quadrático simulado, nos respectivos níveis óptimos. Por fim, as Tabelas 6.4 e 6.5 contém o valor da eficiência assintótica do novo estimador do parâmetro de escala \mathcal{C} , relativamente ao estimador clássico.

6.4 Considerações finais

As Figuras, usadas para ilustrar o comportamento do novo estimador $\tilde{\mathcal{C}}_\gamma(k)$ do parâmetro de escala de primeira ordem, apresentam trajectórias amostrais do valor médio muito mais estáveis que as do estimador clássico. A estabilidade das trajectórias amostrais torna menos relevante a escolha do nível k .

Relativamente ao padrão do erro médio quadrático, as Figuras mostram que, de um modo geral, o estimador assintoticamente centrado apresenta uma região de níveis k cujo erro médio quadrático é inferior ao erro médio quadrático óptimo (mínimo) do estimador clássico. Apenas para modelos com valores de ρ próximos de 0, como no caso do modelo Burr(1,-0.5), os novos estimadores, embora consigam reduzir o erro médio quadrático, apresentam trajectórias amostrais semelhantes à do estimador clássico.

A escolha do estimador assintoticamente centrado do índice de valores extremos pode afectar o padrão do valor médio e erro médio quadrático do estimador do parâmetro de escala, $\tilde{\mathcal{C}}_\gamma(k)$. Face a uma amostra é aconselhável representar trajectórias do estimador $\tilde{\mathcal{C}}_\gamma(k)$, utilizando vários estimadores do índice de valores extremos, e escolher a que apresentar maior estabilidade.

Da análise da Tabelas podemos destacar as seguintes observações:

- Na maior parte dos modelos escolhidos para o estudo de simulação, o nível óptimo de $\tilde{\mathcal{C}}_\gamma$ é sempre superior ao respectivo nível óptimo do estimador clássico.

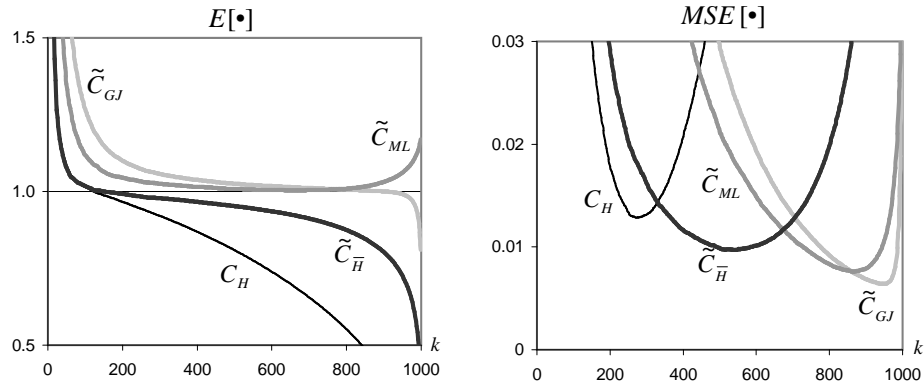


Figura 6.3: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -2$.

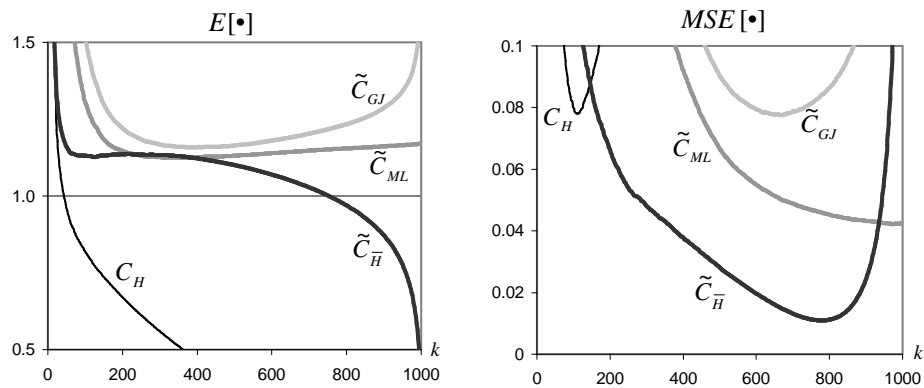


Figura 6.4: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -1$.

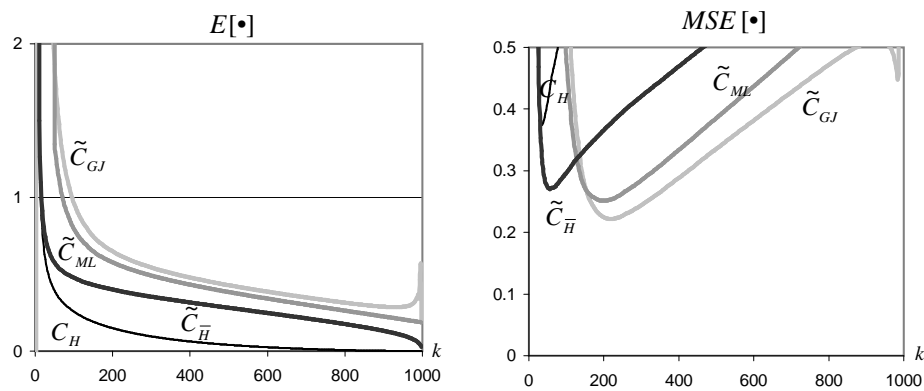


Figura 6.5: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Burr* com $\gamma = 1$ e $\rho = -0.5$.

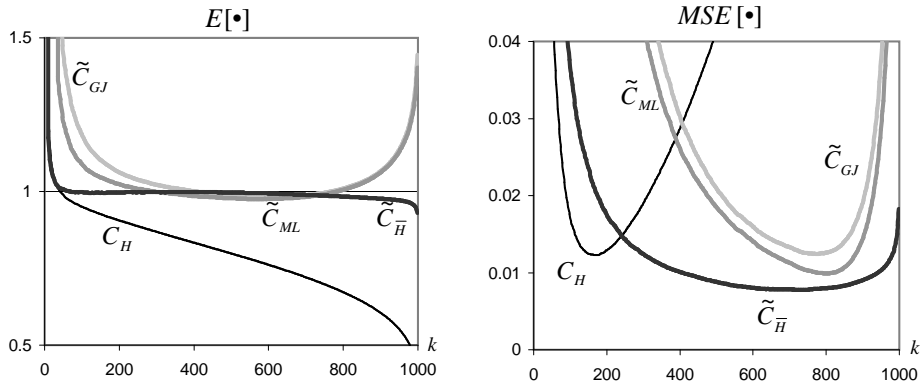


Figura 6.6: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Fréchet* com $\gamma = 0.5$ ($\rho = -1$).

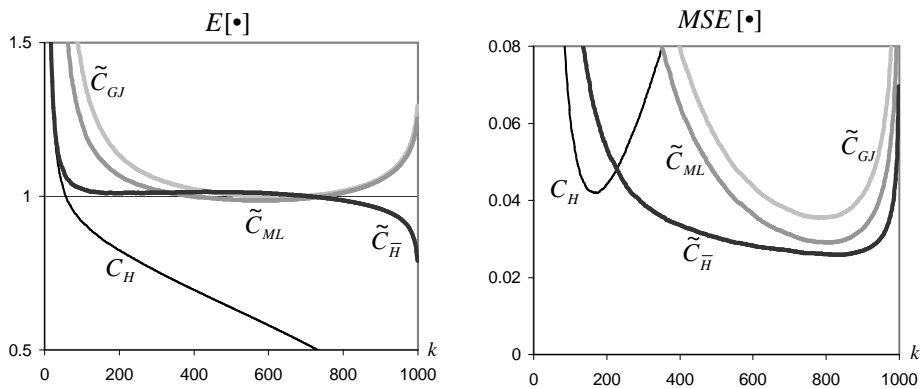


Figura 6.7: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Fréchet* com $\gamma = 1$ ($\rho = -1$).

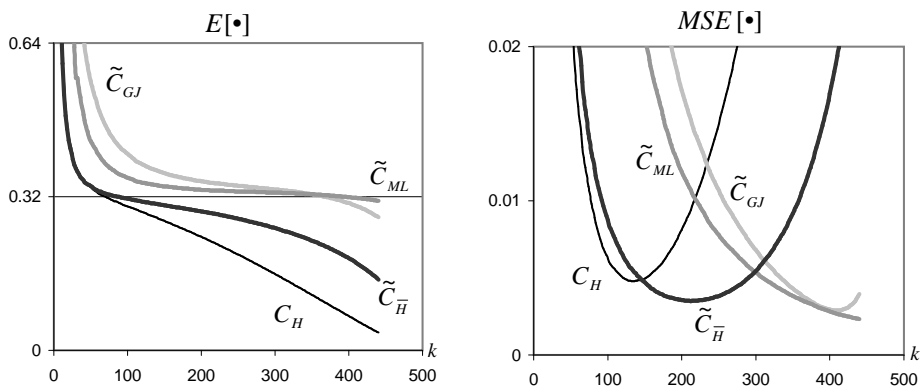


Figura 6.8: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, para amostras de dimensão $n = 1000$ do modelo *Cauchy* ($\gamma = 1$, $\rho = -2$).

Tabela 6.1: Fracção óptima da amostra simulada, k_0/n , dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem.

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$								
\mathcal{C}_H	0.415	0.318	0.280	0.247	0.204	0.181	0.160	0.130
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	0.980	0.961	0.946	0.929	0.906	0.885	0.867	0.823
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	0.942	0.888	0.867	0.844	0.825	0.812	0.799	0.788
$\tilde{\mathcal{C}}_{\overline{H}}$	0.900	0.814	0.785	0.759	0.736	0.724	0.714	0.704
Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$								
\mathcal{C}_H	0.223	0.139	0.112	0.086	0.067	0.053	0.044	0.033
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	0.818	0.718	0.654	0.577	0.480	0.397	0.333	0.247
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	0.980	0.990	0.973	0.820	0.552	0.438	0.359	0.243
$\tilde{\mathcal{C}}_{\overline{H}}$	0.900	0.814	0.785	0.759	0.736	0.724	0.714	0.704
Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$								
\mathcal{C}_H	0.102	0.046	0.035	0.025	0.016	0.012	0.008	0.005
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	0.518	0.284	0.214	0.160	0.119	0.086	0.067	0.043
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	0.452	0.255	0.202	0.148	0.103	0.081	0.057	0.037
$\tilde{\mathcal{C}}_{\overline{H}}$	0.190	0.081	0.057	0.041	0.025	0.018	0.013	0.008
Fréchet: $\gamma = 0.5 (\rho = -1)$								
\mathcal{C}_H	0.321	0.201	0.167	0.132	0.099	0.082	0.066	0.049
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	0.806	0.771	0.771	0.784	0.801	0.815	0.818	0.821
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	0.846	0.805	0.796	0.806	0.811	0.815	0.814	0.814
$\tilde{\mathcal{C}}_{\overline{H}}$	0.856	0.779	0.705	0.644	0.537	0.483	0.421	0.340
Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$								
\mathcal{C}_H	0.324	0.201	0.167	0.133	0.100	0.082	0.066	0.049
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	0.868	0.803	0.786	0.791	0.812	0.838	0.852	0.860
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	0.892	0.818	0.797	0.803	0.825	0.840	0.849	0.851
$\tilde{\mathcal{C}}_{\overline{H}}$	0.980	0.880	0.815	0.714	0.600	0.544	0.496	0.448
Cauchy ($\gamma = 1, \rho = -2$)								
\mathcal{C}_H	0.214	0.158	0.136	0.118	0.099	0.087	0.076	0.062
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	0.420	0.418	0.410	0.398	0.383	0.372	0.363	0.353
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	0.420	0.434	0.448	0.453	0.432	0.415	0.406	0.398
$\tilde{\mathcal{C}}_{\overline{H}}$	0.310	0.237	0.214	0.185	0.156	0.136	0.122	0.099

Tabela 6.2: Valor médio simulado dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, nos respectivos níveis ótimos.

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
Burr: $\gamma = 1, \rho = -2 (C = 1)$								
\mathcal{C}_H	0.866	0.915	0.931	0.944	0.959	0.967	0.973	0.980
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	0.983	0.994	0.993	0.994	0.993	0.993	0.993	0.994
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	1.092	1.033	1.020	1.013	1.008	1.005	1.003	1.001
$\tilde{\mathcal{C}}_{\bar{H}}$	0.928	0.972	0.982	0.990	0.996	0.998	0.999	1.000
Burr: $\gamma = 1, \rho = -1 (C = 1)$								
\mathcal{C}_H	0.676	0.763	0.798	0.832	0.859	0.882	0.899	0.917
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	1.404	1.230	1.191	1.158	1.124	1.100	1.084	1.061
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	1.234	1.180	1.150	1.140	1.115	1.096	1.082	1.060
$\tilde{\mathcal{C}}_{\bar{H}}$	0.928	0.972	0.982	0.990	0.996	0.998	0.999	1.000
Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5 (C = 1)$								
\mathcal{C}_H	0.341	0.466	0.493	0.530	0.590	0.619	0.655	0.694
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	0.534	0.607	0.636	0.665	0.683	0.715	0.733	0.769
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	0.483	0.559	0.582	0.617	0.658	0.682	0.720	0.757
$\tilde{\mathcal{C}}_{\bar{H}}$	0.466	0.546	0.575	0.602	0.643	0.672	0.695	0.732
Fréchet: $\gamma = 0.5 (\rho = -1, C = 1)$								
\mathcal{C}_H	0.863	0.907	0.920	0.933	0.947	0.955	0.962	0.969
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	1.150	1.020	1.001	0.994	0.993	0.996	0.997	0.999
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	1.108	1.020	1.004	1.000	0.998	0.998	0.999	0.999
$\tilde{\mathcal{C}}_{\bar{H}}$	1.054	0.997	0.991	0.985	0.985	0.984	0.985	0.985
Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1, C = 1)$								
\mathcal{C}_H	0.758	0.829	0.851	0.875	0.899	0.913	0.927	0.940
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	1.287	1.053	1.014	0.994	0.988	0.992	0.995	0.998
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	1.220	1.043	1.012	0.996	0.993	0.996	0.998	0.999
$\tilde{\mathcal{C}}_{\bar{H}}$	1.038	0.990	0.983	0.982	0.981	0.980	0.978	0.977
Cauchy ($\gamma = 1, \rho = -2, C = 1/\pi \simeq 0.318$)								
\mathcal{C}_H	0.236	0.267	0.278	0.287	0.294	0.299	0.303	0.307
$\tilde{\mathcal{C}}_{GJ}$	0.298	0.299	0.303	0.306	0.310	0.313	0.315	0.317
$\tilde{\mathcal{C}}_{ML}$	0.318	0.314	0.309	0.307	0.312	0.314	0.316	0.317
$\tilde{\mathcal{C}}_{\bar{H}}$	0.258	0.282	0.288	0.295	0.300	0.304	0.306	0.310

Tabela 6.3: Erro médio quadrático simulado, $MSE (\times 100)$, dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem, nos respectivos níveis ótimos.

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$								
C_H	5.068	1.933	1.265	0.833	0.471	0.312	0.203	0.115
\tilde{C}_{GJ}	4.299	1.151	0.638	0.358	0.158	0.087	0.049	0.023
\tilde{C}_{ML}	6.713	1.496	0.758	0.405	0.169	0.088	0.045	0.019
$\tilde{C}_{\overline{H}}$	7.060	1.987	1.088	0.606	0.264	0.141	0.075	0.032
Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$								
C_H	19.462	10.310	7.738	5.797	3.925	2.871	2.077	1.349
\tilde{C}_{GJ}	48.704	12.336	7.700	5.001	2.894	1.949	1.331	0.787
\tilde{C}_{ML}	17.779	5.885	4.013	3.196	2.150	1.562	1.128	0.708
$\tilde{C}_{\overline{H}}$	7.060	1.987	1.088	0.606	0.264	0.141	0.075	0.032
Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$								
C_H	56.095	42.101	37.141	32.211	26.109	22.264	19.010	14.890
\tilde{C}_{GJ}	35.150	25.003	21.710	18.794	15.575	13.186	11.222	8.760
\tilde{C}_{ML}	38.509	28.246	24.670	21.468	17.494	14.703	12.369	9.549
$\tilde{C}_{\overline{H}}$	37.764	28.609	25.489	22.453	18.735	16.074	13.899	11.059
Fréchet: $\gamma = 0.5 (\rho = -1)$								
C_H	3.419	1.654	1.212	0.889	0.575	0.411	0.294	0.191
\tilde{C}_{GJ}	19.271	2.541	1.228	0.648	0.281	0.146	0.077	0.032
\tilde{C}_{ML}	11.224	1.980	0.982	0.522	0.221	0.113	0.059	0.024
$\tilde{C}_{\overline{H}}$	5.981	1.386	0.768	0.442	0.216	0.127	0.080	0.047
Fréchet: $\gamma = 1 (\rho = -1)$								
C_H	10.595	5.518	4.148	3.120	2.069	1.503	1.091	0.718
\tilde{C}_{GJ}	47.900	7.157	3.522	1.865	0.823	0.432	0.233	0.098
\tilde{C}_{ML}	30.489	5.727	2.890	1.549	0.678	0.352	0.188	0.078
$\tilde{C}_{\overline{H}}$	16.959	4.543	2.572	1.498	0.704	0.393	0.237	0.134
Cauchy ($\gamma = 1, \rho = -2$)								
C_H	2.012	0.727	0.473	0.309	0.172	0.110	0.069	0.039
\tilde{C}_{GJ}	3.031	0.521	0.286	0.164	0.074	0.040	0.021	0.009
\tilde{C}_{ML}	3.353	0.473	0.228	0.123	0.054	0.029	0.015	0.006
$\tilde{C}_{\overline{H}}$	1.690	0.534	0.336	0.215	0.114	0.072	0.045	0.024

Tabela 6.4: Eficiência relativa dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem para os modelos *Burr* e *Cauchy*.

n	\tilde{C}_{GJ}	\tilde{C}_{ML}	$\tilde{C}_{\overline{H}}$
Burr: $\gamma = 1, \rho = -2$			
100	1.086 ± 0.012	0.869 ± 0.003	1.103 ± 0.009
500	1.297 ± 0.016	1.137 ± 0.008	1.152 ± 0.006
1000	1.409 ± 0.021	1.293 ± 0.021	1.169 ± 0.007
2000	1.527 ± 0.023	1.435 ± 0.020	1.179 ± 0.011
5000	1.726 ± 0.020	1.671 ± 0.026	1.189 ± 0.008
10000	1.892 ± 0.040	1.883 ± 0.030	1.195 ± 0.009
20000	2.045 ± 0.030	2.112 ± 0.029	1.198 ± 0.008
50000	2.259 ± 0.033	2.490 ± 0.048	1.208 ± 0.007
Burr: $\gamma = 1, \rho = -1$			
100	0.633 ± 0.009	1.047 ± 0.011	1.662 ± 0.024
500	0.915 ± 0.010	1.324 ± 0.012	2.280 ± 0.033
1000	1.003 ± 0.013	1.389 ± 0.017	2.670 ± 0.049
2000	1.077 ± 0.019	1.348 ± 0.026	3.097 ± 0.059
5000	1.165 ± 0.011	1.352 ± 0.013	3.864 ± 0.070
10000	1.214 ± 0.014	1.356 ± 0.017	4.515 ± 0.079
20000	1.249 ± 0.017	1.357 ± 0.018	5.265 ± 0.093
50000	1.310 ± 0.014	1.380 ± 0.011	6.499 ± 0.103
Burr: $\gamma = 1, \rho = -0.5$			
100	1.264 ± 0.014	1.207 ± 0.006	1.219 ± 0.005
500	1.298 ± 0.005	1.221 ± 0.002	1.213 ± 0.003
1000	1.308 ± 0.007	1.227 ± 0.007	1.207 ± 0.005
2000	1.309 ± 0.007	1.225 ± 0.008	1.198 ± 0.005
5000	1.295 ± 0.009	1.222 ± 0.006	1.181 ± 0.007
10000	1.300 ± 0.009	1.231 ± 0.010	1.177 ± 0.004
20000	1.302 ± 0.009	1.240 ± 0.009	1.169 ± 0.005
50000	1.304 ± 0.009	1.249 ± 0.007	1.160 ± 0.006
Cauchy ($\gamma = 1, \rho = -2$)			
100	0.815 ± 0.013	0.775 ± 0.013	1.092 ± 0.017
500	1.181 ± 0.013	1.241 ± 0.020	1.166 ± 0.010
1000	1.288 ± 0.011	1.441 ± 0.015	1.188 ± 0.010
2000	1.375 ± 0.013	1.584 ± 0.013	1.200 ± 0.009
5000	1.521 ± 0.019	1.777 ± 0.023	1.227 ± 0.008
10000	1.659 ± 0.011	1.959 ± 0.022	1.237 ± 0.006
20000	1.808 ± 0.019	2.145 ± 0.026	1.249 ± 0.009
50000	2.067 ± 0.026	2.485 ± 0.032	1.276 ± 0.010

Tabela 6.5: Eficiência relativa dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem para o modelo *Fréchet*.

n	\tilde{C}_{GJ}	\tilde{C}_{ML}	$\tilde{C}_{\overline{H}}$
Fréchet: $\gamma = 0.5$ ($\rho = -1$)			
100	0.423 ± 0.013	0.553 ± 0.012	0.757 ± 0.012
500	0.808 ± 0.017	0.916 ± 0.019	1.093 ± 0.014
1000	0.995 ± 0.017	1.112 ± 0.019	1.257 ± 0.016
2000	1.172 ± 0.015	1.309 ± 0.020	1.418 ± 0.012
5000	1.432 ± 0.012	1.615 ± 0.014	1.632 ± 0.018
10000	1.680 ± 0.022	1.908 ± 0.025	1.802 ± 0.019
20000	1.956 ± 0.032	2.231 ± 0.038	1.919 ± 0.018
50000	2.451 ± 0.043	2.801 ± 0.044	2.011 ± 0.018
Fréchet: $\gamma = 1$ ($\rho = -1$)			
100	0.471 ± 0.011	0.590 ± 0.012	0.791 ± 0.012
500	0.879 ± 0.016	0.983 ± 0.017	1.103 ± 0.015
1000	1.086 ± 0.017	1.199 ± 0.018	1.270 ± 0.013
2000	1.294 ± 0.016	1.420 ± 0.020	1.443 ± 0.015
5000	1.586 ± 0.015	1.748 ± 0.016	1.715 ± 0.019
10000	1.865 ± 0.023	2.067 ± 0.028	1.955 ± 0.018
20000	2.168 ± 0.036	2.412 ± 0.042	2.145 ± 0.024
50000	2.717 ± 0.045	3.032 ± 0.050	2.317 ± 0.019

- Para amostras de pequena dimensão, o erro médio quadrático de todos os estimadores utilizados no estudo de simulação é muito elevado.
- A eficiência relativa de \tilde{C}_γ é quase sempre maior que 1, independentemente do estimador do índice de valores extremos, γ , utilizado. As únicas exceções ocorrem para amostras de pequena dimensão.

Capítulo 7

Nova classe de estimadores de um parâmetro de “escala” de segunda ordem

Nos capítulos anteriores procurámos estimar correctamente parâmetros de primeira ordem do modelo F . Introduzimos novos estimadores “assintoticamente centrados”, isto é, com termo dominante de viés nulo e erro médio quadrático inferior ao dos estimadores clássicos. A remoção de viés depende da adequada estimação de parâmetro(s) de segunda ordem. Embora existam na literatura diversos trabalhos relativos à estimação do parâmetro de “forma”, ρ , poucos trabalhos tratam a estimação do parâmetro de “escala” β .

Neste capítulo, e num contexto semi-paramétrico, introduzimos na secção 7.1 uma nova classe de estimadores do parâmetro de “forma” β . Depois, na secção 7.2 estudamos o comportamento assintótico da classe de estimadores. Referimos quais as condições necessárias para garantir a consistência e normalidade assintótica e calculamos o valor da variância e termo dominante de viés assintótico. Finalmente, na secção 7.3, apresentamos alguns resultados de simulação que pretendem ilustrar o comportamento da classe de estimadores de β , para alguns modelos de cauda pesada.

7.1 Novos estimadores do parâmetro de escala de segunda ordem

Nos modelos de cauda pesada que verificam a condição de variação regular, de segunda ou terceira ordem, a função $A(t)$ controla a velocidade de convergência do máximo devidamente normalizado para uma distribuição limite não degenerada. Para muitos destes modelos esta função pode ser parametrizada como $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, com $\rho < 0$, e $\beta \in \mathbb{R}$, onde ρ é o parâmetro de “forma” e β o parâmetro de “escala” que interessa estimar.

Considere-se a seguinte classe de estatísticas,

$$\widehat{\beta}_{\widehat{\rho}}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) := \frac{2d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\widehat{\rho})}{\alpha\tau \{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\widehat{\rho})\}^2} \left(\frac{k}{n}\right)^{\widehat{\rho}} \frac{\left\{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)\right\}^2}{D_n^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)}, \quad (7.1)$$

onde D_n é a estatística introduzida em Fraga Alves *et al.* [21] para a estimação de ρ que se encontra definida em (3.19),

$$d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho) = \bar{\mu}_{\alpha\theta_1}^{(2)}(\rho) - \bar{\mu}_{\alpha\theta_2}^{(2)}(\rho) = \frac{1 - (1 - \rho)^{\alpha\theta_1}}{\alpha \theta_1 \rho (1 - \rho)^{\alpha\theta_1}} - \frac{1 - (1 - \rho)^{\alpha\theta_2}}{\alpha \theta_2 \rho (1 - \rho)^{\alpha\theta_2}},$$

e α , θ_1 , θ_2 ($> \theta_1$) e τ são parâmetros de controlo.

Escolhendo-se $\alpha = 1$, $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = 2$ obtemos uma classe de estimadores dependente apenas do parâmetro de controlo $\tau \neq 0$, com expressão funcional,

$$\widehat{\beta}_{\widehat{\rho}}^{(\tau)}(k) := -\frac{2(2 - \widehat{\rho})^2}{\tau\widehat{\rho}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\widehat{\rho}} \frac{\left\{\left(M_n^{(1)}(k)\right)^\tau - \left(M_n^{(2)}(k)/2\right)^{\tau/2}\right\}^2}{\left(M_n^{(2)}(k)/2\right)^\tau - \left(M_n^{(4)}(k)/24\right)^{\tau/2}}, \quad (7.2)$$

com o usual prolongamento por continuidade, para $\tau = 0$, dado por

$$\widehat{\beta}_{\widehat{\rho}}^{(0)}(k) := -\frac{2(2 - \widehat{\rho})^2}{\widehat{\rho}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\widehat{\rho}} \frac{\left\{\ln\left(M_n^{(1)}(k)\right) - \frac{1}{2} \ln\left(M_n^{(2)}(k)/2\right)\right\}^2}{\ln\left(M_n^{(2)}(k)/2\right) - \frac{1}{2} \ln\left(M_n^{(4)}(k)/24\right)}. \quad (7.3)$$

Observação 7.1.1. A escolha $\alpha = 1$, $\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = 2$ não obedece a qualquer critério de optimalidade. Contudo como a variância de $M_n^{(\alpha\theta_i)}(k)$ é “proporcional” a $\alpha\theta_i$ deve-se evitar escolher valores muito elevados para os parâmetros. Por outro lado, embora

não seja um factor muito importante, a escolha de valores inteiros para $\alpha\theta_i$ permite efectuar o cálculo das estimativas (para todos os níveis k) muito mais rapidamente.

7.2 Propriedades assintóticas

Começamos por apresentar propriedades assintóticas para a variável aleatória $\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$. A notação aqui usada é a que foi introduzida na secção 3.1.

Proposição 7.2.1 (Consistência). *Se se verificar a condição de variação regular de segunda ordem, (2.41), e se k é uma sequência intermédia verificando $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ com $A(t) = \gamma \beta t^\rho$, então $\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$ é consistente para β .*

Demonstração.

Os resultados da Proposição 3.1.2, permitem garantir que

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) &= \frac{2d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}{\alpha\tau \{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)\}^2} \left(\frac{k}{n}\right)^\rho \frac{\left\{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)\right\}^2}{D_n^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)} \\ &= \frac{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}{\{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)\}^2} \left(\frac{A(n/k)}{\gamma(n/k)^\rho}\right) \frac{\left\{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)/\alpha\tau\gamma^{\alpha\tau-1}A(n/k)\right\}^2}{D_n^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)/2\alpha\tau\gamma^{2\alpha\tau-1}A(n/k)} \\ &\xrightarrow{\mathbb{P}} \beta, \end{aligned}$$

tal como se pretendia demonstrar. □

Teorema 7.2.1 (Normalidade assintótica). *Se além das condições referidas na proposição anterior, também se verificar a condição de terceira ordem, (2.43), então $\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$ é assintoticamente normal.*

O valor médio de $\sqrt{k}A(n/k) \left(\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) - \beta\right)$ é nulo sempre que $\sqrt{k}A^2(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Se $\sqrt{k}A^2(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda_B$, ambos finitos e não nulos, o viés assintótico é

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{a_{2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{2d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right) \lambda_A + \left(\frac{2d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right) \lambda_{AB}.$$

A variância assintótica de $\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$ é dada por

$$\sigma^2 \left(\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) \right) = \left(\frac{\gamma\beta}{\alpha} \right)^2 \text{Var} \left[\frac{2W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{W_k^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{2d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right], \quad (7.4)$$

onde $W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$ é a v.a. introduzida em (3.21).

Demonstração.

Utilizando o resultado da Proposição 3.1.2,

$$\begin{aligned} \left(\frac{D_n^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}}{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)A(n/k)} \right)^{-1} &\stackrel{d}{=} (2\alpha\tau\gamma^{2\tau\alpha-1})^{-1} \left[1 - \frac{\gamma W_k^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{2\alpha\sqrt{k}A(n/k)d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_{2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{2\gamma d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} A(n/k) + \frac{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} B(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)A(n/k)} \right)^2 &\stackrel{d}{=} (\alpha\tau\gamma^{\tau\alpha-1})^2 \left[1 + \frac{2\gamma W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{\alpha\sqrt{k}A(n/k)d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{\gamma d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} A(n/k) + \frac{2d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} B(n/k) \right) (1 + o_p(1)) \right]. \end{aligned}$$

Resulta assim que

$$\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) = \frac{2(k/n)^\rho A(n/k)}{\alpha\tau} \times \frac{\left[\frac{D_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)A(n/k)} \right]^2}{D_n^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)/(2d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)A(n/k))}.$$

Como por hipótese, $A(t) = \gamma\beta t^\rho$, podemos substituir $\frac{2(k/n)^\rho A(n/k)}{\alpha\tau}$ por $\frac{2\gamma\beta}{\alpha\tau}$. Logo,

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) &\stackrel{d}{=} \beta \left[1 + \frac{2\gamma W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{\alpha d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}^{(\theta_1, \theta_2)}(\rho)\sqrt{k}A(n/k)} - \frac{\gamma W_k^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{2\alpha d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)\sqrt{k}A(n/k)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{a_{2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{2d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right) A(n/k)(1 + o_p(1)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right) B(n/k)(1 + o_p(1)) \right]. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \sqrt{k}A(n/k) \left(\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) - \beta \right) &\stackrel{d}{=} \beta \left(\frac{2\gamma W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{\alpha d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{\gamma W_k^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{2\alpha d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right) + \\ &+ \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{a_{2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{2d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right) \sqrt{k}A^2(n/k)(1 + o_p(1)) \\ &+ \beta \left(\frac{2d_\alpha^{(\theta_1, \theta_2)}(\rho + \rho')}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right) \sqrt{k}A(n/k)B(n/k)(1 + o_p(1)), \end{aligned}$$

sendo

$$\frac{2\gamma W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{\alpha d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{\gamma W_k^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{2\alpha d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \quad (7.5)$$

uma v.a. assintoticamente normal.

Logo, $\sqrt{k}A(n/k) \left(\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) - \beta \right)$ é assintoticamente normal com viés dado por

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{a_{\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{a_{2\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau}}{2d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right) \lambda_A + \left(\frac{2d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho + \rho')}{d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right) \lambda_{AB}.$$

A partir da covariância entre $W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$ e $W_k^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2)}$, $\sigma_{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$, que é dada no Corolário 3.1.2, e da variância de $W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}$, $\sigma_{W|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2$, dada na Proposição 3.1.2, obtém-se

$$\begin{aligned} Var \left[\frac{2 W_k^{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} - \frac{W_k^{(2\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{2d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)} \right] &= \frac{4\sigma_{W|\alpha, \theta_1, \theta_2}^2}{(d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho))^2} + \frac{\sigma_{W|2\alpha, \theta_1, \theta_2}^2}{4(d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho))^2} \\ &\quad - \frac{2\sigma_{(\alpha, \theta_1, \theta_2)}}{d_{\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)d_{2\alpha, \theta_1, \theta_2}(\rho)}, \end{aligned}$$

□

Observação 7.2.1. A variância de $\sqrt{k}A(n/k) \left(\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) - \beta \right)$ é independente do parâmetro de controle τ . Se $(\alpha, \theta_1, \theta_2) = (1, 1, 2)$, então

$$Var \left[\sqrt{k}A(n/k) \left(\widehat{\beta}_\rho^{(1, 1, 2, \tau)}(k) - \beta \right) \right] = (\gamma\beta)^2 \left(\frac{1 - \rho}{2 - \rho} \right)^2 \frac{21\rho^4 - 68\rho^3 + 86\rho^2 - 68\rho + 33}{\rho^2}.$$

Proposição 7.2.2. Se o parâmetro de segunda ordem ρ for estimado através de um estimador $\widehat{\rho}$ consistente, tem-se a validade da representação assintótica

$$\widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) \stackrel{d}{=} \widehat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) - \beta(\widehat{\rho} - \rho) \ln(n/k)(1 + o_p(1)). \quad (7.6)$$

Demonstração.

Como por hipótese, $\hat{\rho}$ é consistente para ρ , aplicando o método delta pode-se garantir que

$$\widehat{\beta}_{\hat{\rho}}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) \stackrel{d}{=} \widehat{\beta}_{\rho}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) + (\hat{\rho} - \rho)\xi(k)(1 + o_p(1)),$$

onde $\xi(k) = \frac{\partial \widehat{\beta}_{\hat{\rho}}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)}{\partial \rho} \sim -\ln(n/k)\widehat{\beta}_{\hat{\rho}}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$.

Como

$$-\widehat{\beta}_{\hat{\rho}}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) \stackrel{d}{=} -\beta(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k),$$

a equação (7.6) é verdadeira. □

Observação 7.2.2. *Portanto, para $\widehat{\beta}_{\hat{\rho}}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$ ser um estimador consistente para β é necessário k intermédio e $(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p(1)$. Para se poder garantir a normalidade assintótica de $\sqrt{k}A(n/k)(\widehat{\beta}_{\hat{\rho}}^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k) - \beta)$ em níveis k , que verifiquem $\sqrt{k}A^2(n/k) \rightarrow \lambda_A$ e $\sqrt{k}A(n/k)B(n/k) \rightarrow \lambda_B$ é necessário que $\sqrt{k}A(n/k)(\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) = o_p(1)$.*

7.3 Comportamento exacto - Estudo de simulação

Para estudar o comportamento de $\widehat{\beta}_{\hat{\rho}}^{(\tau)}(k) \equiv \widehat{\beta}_{\hat{\rho}}^{(1,1,2,\tau)}(k)$, realizou-se um estudo de simulação de Monte Carlo. Neste estudo incluiu-se também o estimador $\widehat{\beta}_{\hat{\rho}}^{ML}(k) \equiv \widehat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$ introduzido em (3.51).

Foram geradas 1000 amostras de dimensão n dos modelos Burr com $\gamma = 1$, $\rho = -2, -1, -0.5$, Fréchet com $\gamma = 1$ e t de Student com $\nu = 1$ (Cauchy). No modelo t de Student não se efectuou qualquer alteração na localização dos dados, e por isso, apenas se utilizaram os valores positivos da amostra. Obtivemos para estes modelos estimativas do valor médio e do erro médio quadrático para todos os níveis k . Estas estimativas permitiram posteriormente o cálculo do nível óptimo, k_0 , do valor médio e do erro médio quadrático, no respectivo nível óptimo. Este processo foi repetido 10

vezes, para os vários valores de n , de modo a obter intervalos com nível de confiança 95%. O parâmetro de “forma”, de segunda ordem ρ , foi estimado pelo estimador definido em (3.38), calculado no nível externo $k_1 = n^{0.995}$ introduzido em (3.44).

Observação 7.3.1. *Seja X um modelo com f.d. F invertível. Se*

$$F^{-1}(t) = (g(t))^\gamma, \quad (7.7)$$

usando o teorema da transformação uniformizante, resulta que

$$M_n^{(\alpha)}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \right)^\alpha \stackrel{d}{=} \frac{\gamma^\alpha}{k} \sum_{i=1}^k \left(\ln \frac{g(U_{n-i+1:n})}{g(U_{n-k:n})} \right)^\alpha,$$

e

$$N_n^{(\alpha)}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (i/k)^{\alpha-1} i \left(\ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-i:n}} \right) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{k} \sum_{i=1}^k (i/k)^{\alpha-1} i \left(\ln \frac{g(U_{n-i+1:n})}{g(U_{n-i:n})} \right),$$

onde U representa uma v.a. com distribuição uniforme em $[0, 1]$.

Nestas condições, resulta que $\hat{\rho}_n^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$, $\hat{\beta}_\rho^{(\alpha, \theta_1, \theta_2, \tau)}(k)$ e $\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k)$ são independentes do valor do índice de valores extremos, γ . Note-se que as f.d. dos modelos Fréchet e Burr verificam (7.7).

7.3.1 Padrão amostral e estimativas no nível óptimo

Apresentamos nas Figuras 7.1–7.5 os padrões simulados do valor médio e do erro médio quadrático, dos estimadores $\hat{\beta}_\rho^{(\tau)}(k)$ e $\hat{\beta}_\rho^{ML}(k)$, enquanto função do nível k . Na Tabela 7.1 apresentamos o valor da fracção óptima da amostra, e nas Tabelas 7.2–7.3 o valor médio e erro médio quadrático dos vários estimadores, no respectivo nível óptimo. De modo a tornar a notação das figuras e tabelas mais simples, apenas se indica o valor de τ usado em $\hat{\beta}_\rho^{(\tau)}(k)$ e ML para representar o estimador $\hat{\beta}_\rho^{ML}(k)$.

Observação 7.3.2. *Dos resultados apresentados podemos tirar as seguintes conclusões:*

- A trajectória amostral de $\hat{\beta}_\rho^{ML}(k)$ é menos volátil que a de $\hat{\beta}_\rho^{(\tau)}(k)$. Contudo, com uma escolha adequada de τ , $\hat{\beta}_\rho^{(\tau)}(k)$ exibe para valores k elevados, uma trajectória

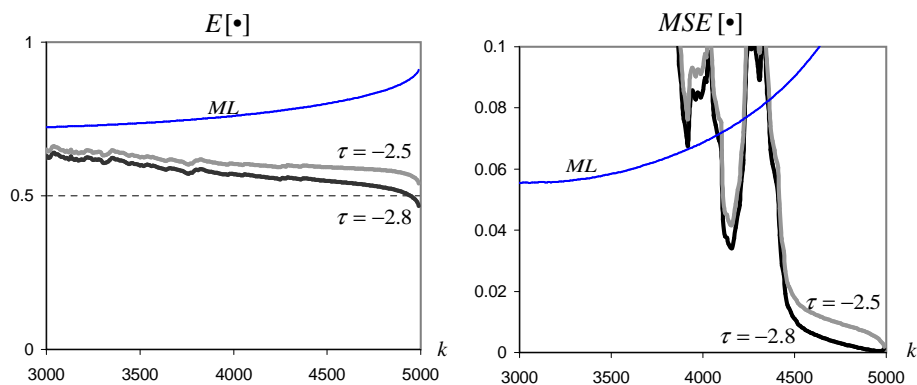


Figura 7.1: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 5000$ do modelo *Fréchet* ($\rho = -1$).

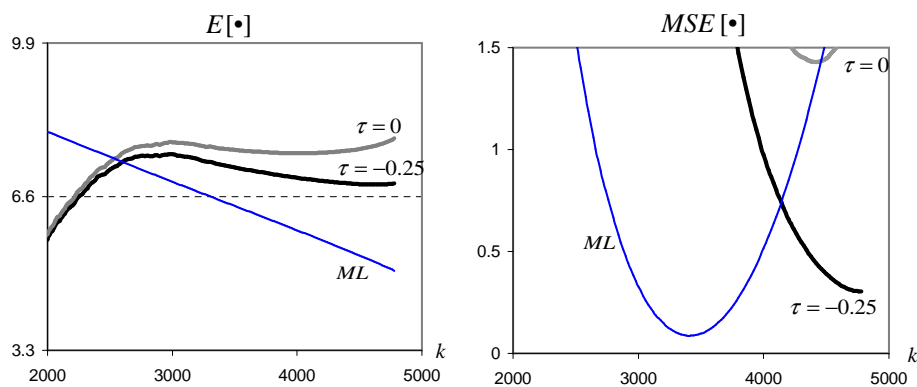


Figura 7.2: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 10000$ do modelo *Cauchy* ($\gamma = 1$, $\rho = -2$).

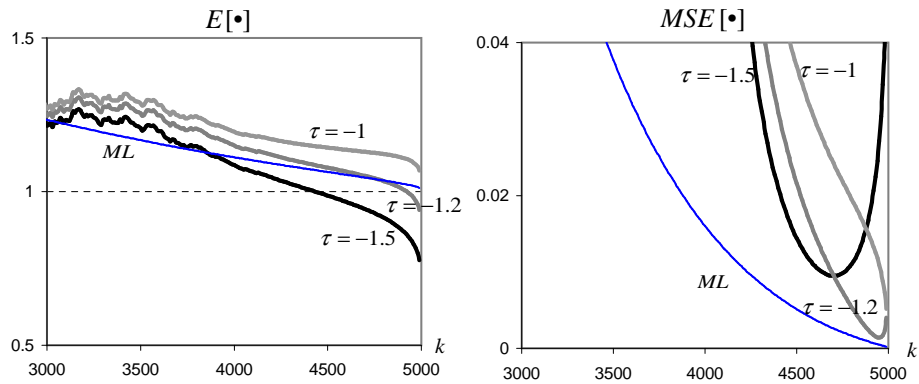


Figura 7.3: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 5000$ do modelo *Burr* com $\rho = -2$.

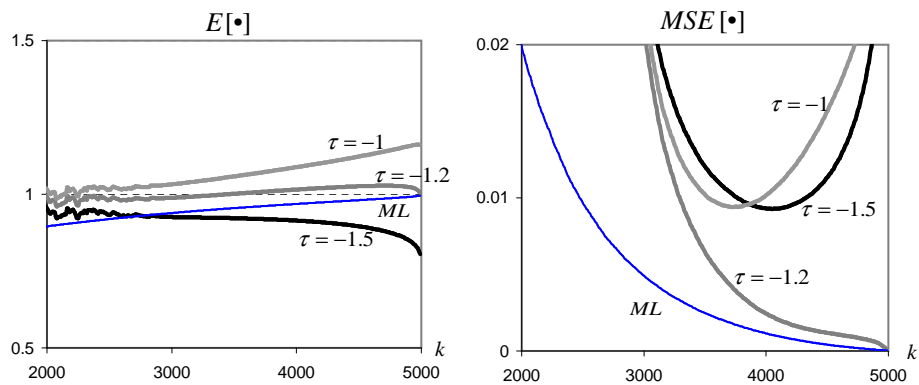


Figura 7.4: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 5000$ do modelo *Burr* com $\rho = -1$.

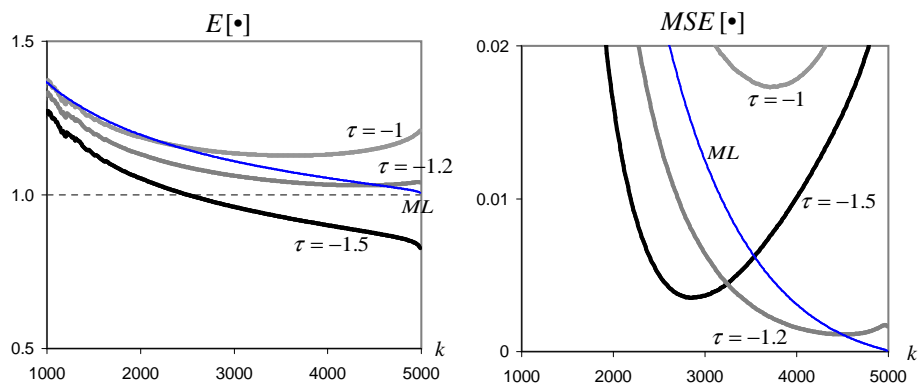


Figura 7.5: Valores médios e erros médios quadráticos simulados, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, para amostras de dimensão $n = 5000$ do modelo *Burr* com $\rho = -0.5$.

Tabela 7.1: Fração óptima da amostra simulada, k_0/n , dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem.

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
modelo Fréchet								
$\tau = -3$	0.988	0.998	0.993	0.985	0.972	0.962	0.956	0.950
$\tau = -2.8$	0.988	0.998	0.997	0.995	0.992	0.990	0.990	0.989
$\tau = -2.5$	0.988	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
ML	0.973	0.946	0.804	0.716	0.600	0.564	0.545	0.528
modelo Burr, $\rho = -0.5$								
$\tau = -1.5$	0.919	0.754	0.697	0.629	0.571	0.544	0.526	0.511
$\tau = -1.2$	0.980	0.970	0.962	0.934	0.957	0.999	0.999	0.999
$\tau = -1.0$	0.917	0.820	0.802	0.771	0.745	0.739	0.728	0.720
ML	0.990	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
modelo Burr, $\rho = -1$								
$\tau = -1.5$	0.961	0.921	0.894	0.861	0.809	0.776	0.736	0.693
$\tau = -1.2$	0.981	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
$\tau = -1.0$	0.968	0.908	0.868	0.822	0.751	0.699	0.640	0.588
ML	0.990	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
modelo Burr, $\rho = -2$								
$\tau = -1.5$	0.990	0.992	0.982	0.965	0.940	0.922	0.907	0.891
$\tau = -1.2$	0.990	0.998	0.997	0.994	0.990	0.988	0.986	0.985
$\tau = -1.0$	0.990	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
ML	0.990	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
modelo Cauchy								
$\tau = -0.25$	0.428	0.454	0.461	0.467	0.475	0.477	0.473	0.469
$\tau = 0$	0.432	0.452	0.458	0.459	0.453	0.439	0.428	0.411
ML	0.402	0.397	0.382	0.366	0.351	0.341	0.333	0.269

Tabela 7.2: Valor médio simulado, E , dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, nos respectivos níveis ótimos.

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
modelo Fréchet								
$\tau = -3$	0.514	0.430	0.446	0.463	0.483	0.491	0.494	0.498
	± 0.011	± 0.006	± 0.011	± 0.013	± 0.002	± 0.000	± 0.000	± 0.000
$\tau = -2.8$	0.557	0.475	0.472	0.480	0.494	0.497	0.499	0.499
	± 0.011	± 0.005	± 0.006	± 0.010	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000
$\tau = -2.5$	0.630	0.550	0.529	0.517	0.504	0.507	0.504	0.500
	± 0.011	± 0.005	± 0.001	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
ML	0.872	0.841	0.776	0.751	0.722	0.717	0.716	0.716
	± 0.007	± 0.004	± 0.020	± 0.023	± 0.002	± 0.002	± 0.001	± 0.001
modelo Burr, $\rho = -0.5$								
$\tau = -1.5$	0.863	0.910	0.928	0.950	0.972	0.982	0.990	0.996
	± 0.002	± 0.002	± 0.003	± 0.002	± 0.002	± 0.002	± 0.001	± 0.001
$\tau = -1.2$	1.035	1.035	1.034	1.032	1.032	1.032	1.031	1.030
	± 0.000	± 0.000	± 0.001	± 0.001	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000
$\tau = -1.0$	1.149	1.130	1.129	1.128	1.128	1.128	1.129	1.129
	± 0.005	± 0.002	± 0.001	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
ML	1.009	1.007	1.006	1.005	1.005	1.004	1.004	1.003
	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
modelo Burr, $\rho = -1$								
$\tau = -1.5$	0.865	0.890	0.898	0.906	0.914	0.917	0.919	0.921
	± 0.006	± 0.001	± 0.001	± 0.001	± 0.001	± 0.001	± 0.001	± 0.000
$\tau = -1.2$	1.027	1.008	1.006	1.003	1.001	1.001	1.000	1.000
	± 0.002	± 0.002	± 0.000	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
$\tau = -1.0$	1.162	1.128	1.112	1.095	1.072	1.057	1.039	1.023
	± 0.010	± 0.004	± 0.004	± 0.005	± 0.003	± 0.003	± 0.001	± 0.002
ML	0.990	0.995	0.996	0.997	0.997	0.998	0.998	0.998
	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
modelo Burr, $\rho = -2$								
$\tau = -1.5$	0.853	0.830	0.871	0.906	0.943	0.962	0.975	0.987
	± 0.011	± 0.006	± 0.008	± 0.012	± 0.002	± 0.002	± 0.001	± 0.000
$\tau = -1.2$	1.009	0.941	0.954	0.973	0.986	0.992	0.996	0.998
	± 0.011	± 0.002	± 0.008	± 0.004	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000
$\tau = -1.0$	1.129	1.072	1.055	1.042	1.028	1.020	1.012	1.004
	± 0.012	± 0.002	± 0.001	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
ML	1.015	1.012	1.010	1.008	1.007	1.006	1.006	1.005
	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
modelo Cauchy								
$\tau = -0.25$	6.129	7.064	7.056	7.007	6.934	6.883	6.832	6.784
	± 0.146	± 0.067	± 0.027	± 0.016	± 0.011	± 0.010	± 0.003	± 0.003
$\tau = 0$	6.659	7.896	7.919	7.851	7.699	7.580	7.502	7.420
	± 0.244	± 0.056	± 0.028	± 0.026	± 0.020	± 0.015	± 0.008	± 0.008
ML	5.679	6.054	6.205	6.334	6.441	6.497	6.529	6.480
	± 0.081	± 0.021	± 0.020	± 0.015	± 0.011	± 0.011	± 0.007	± 0.011

Tabela 7.3: Erro médio quadrático simulado, $MSE (\times 100)$, dos estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem, nos respectivos níveis ótimos.

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
modelo Fréchet								
$\tau = -3$	53.757	2.505	0.820	0.465	0.124	0.059	0.031	0.012
	± 16.887	± 0.656	± 0.345	± 0.264	± 0.016	± 0.003	± 0.001	± 0.000
$\tau = -2.8$	56.480	2.285	0.519	0.255	0.044	0.019	0.009	0.003
	± 17.079	± 0.757	± 0.305	± 0.188	± 0.007	± 0.001	± 0.000	± 0.000
$\tau = -2.5$	61.783	2.824	0.515	0.209	0.029	0.016	0.008	0.003
	± 17.400	± 0.910	± 0.346	± 0.178	± 0.002	± 0.001	± 0.000	± 0.000
ML	15.413	12.898	9.016	7.345	5.481	5.030	4.856	4.723
	± 0.371	± 0.263	± 1.004	± 1.288	± 0.081	± 0.052	± 0.030	± 0.017
modelo Burr, $\rho = -0.5$								
$\tau = -1.5$	2.194	1.328	0.957	0.652	0.349	0.197	0.108	0.045
	± 0.020	± 0.016	± 0.013	± 0.014	± 0.008	± 0.006	± 0.002	± 0.001
$\tau = -1.2$	0.141	0.129	0.126	0.121	0.111	0.103	0.096	0.089
	± 0.002	± 0.001	± 0.001	± 0.002	± 0.001	± 0.001	± 0.000	± 0.000
$\tau = -1$	3.057	2.139	1.931	1.817	1.721	1.693	1.682	1.684
	± 0.043	± 0.031	± 0.024	± 0.019	± 0.011	± 0.012	± 0.007	± 0.003
ML	0.019	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.002	0.001
	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
modelo Burr, $\rho = -1$								
$\tau = -1.5$	2.939	1.498	1.290	1.113	0.925	0.823	0.748	0.678
	± 1.277	± 0.018	± 0.009	± 0.012	± 0.010	± 0.011	± 0.008	± 0.005
$\tau = -1.2$	1.087	0.046	0.027	0.016	0.007	0.004	0.002	0.001
	± 1.495	± 0.001	± 0.001	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
$\tau = -1$	3.950	2.174	1.784	1.405	0.931	0.655	0.418	0.212
	± 1.323	± 0.049	± 0.061	± 0.071	± 0.032	± 0.030	± 0.013	± 0.006
ML	0.041	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
	± 0.005	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
modelo Burr, $\rho = -2$								
$\tau = -1.5$	29.817	5.384	3.127	1.925	0.944	0.582	0.338	0.156
	± 10.685	± 0.450	± 0.349	± 0.377	± 0.029	± 0.017	± 0.006	± 0.005
$\tau = -1.2$	31.599	1.972	0.747	0.369	0.137	0.074	0.039	0.016
	± 11.859	± 0.351	± 0.140	± 0.123	± 0.006	± 0.002	± 0.001	± 0.001
$\tau = -1$	36.304	2.429	0.717	0.331	0.117	0.061	0.030	0.011
	± 12.804	± 0.452	± 0.139	± 0.113	± 0.003	± 0.002	± 0.001	± 0.000
ML	0.311	0.043	0.020	0.012	0.006	0.005	0.004	0.003
	± 0.040	± 0.003	± 0.001	± 0.001	± 0.000	± 0.000	± 0.000	± 0.000
modelo Cauchy								
$\tau = -0.25$	1713.085	594.102	308.013	148.854	56.711	30.268	17.908	9.327
	± 98.649	± 35.792	± 12.894	± 15.886	± 3.553	± 1.101	± 0.443	± 0.200
$\tau = 0$	1944.668	825.143	516.082	327.588	198.390	142.259	110.383	83.875
	± 100.633	± 41.321	± 14.782	± 18.564	± 7.182	± 3.410	± 1.770	± 1.371
ML	481.994	80.337	49.242	29.984	14.881	8.560	4.946	9.953
	± 14.220	± 1.967	± 1.143	± 0.841	± 0.376	± 0.217	± 0.186	± 0.274

amostral mais estável e próxima do verdadeiro valor β . Nos exemplos apresentados a escolha indicada para os modelos Fréchet, Burr e Cauchy parece ser $\tau = -2.8, -1.2$ e -0.25 , respectivamente. Esta escolha tem em conta, não só o valor do valor médio e MSE simulados no nível óptimo, bem como as trajectórias amostrais apresentadas nas Figuras.

- A escolha do parâmetro de controlo τ , para o qual existe estabilidade das trajectórias amostrais próxima de β , parece depender do modelo F . Contrariamente ao que acontece com o estimador do parâmetro de segunda ordem ρ , que se baseia no mesmo tipo de estatísticas, a escolha indicada do parâmetro de controlo, τ , parece recair sempre em valores negativos.
- Num problema prático, não é aconselhável escolher um só valor para o parâmetro de controlo τ . É mais sensato representar algumas trajectórias amostrais de $\widehat{\beta}_\rho^{(\tau)}(k)$, por exemplo para $\tau = 0, -0.5, -1, -1.5, -2, -3$, enquanto função de k , e escolher o valor de τ associado à maior estabilidade da trajectória (para k elevado). Para encontrar a trajectória com maior estabilidade pode-se utilizar um critério do tipo mínimo quadrados. Por exemplo, pode-se definir a região de níveis entre $i_n = [n^{0.85}]$ e $j_n = [n^{0.999}]$, calcular a mediana

$$\chi(\tau, i_n, j_n) := \widehat{\chi}_{1/2}(\widehat{\beta}_\rho^{(\tau)}(k), i_n \leq k \leq j_n),$$

e

$$\sum(\tau, i_n, j_n) := \sum_{k=i_n}^{j_n} \{\widehat{\beta}_\rho^{(\tau)}(k) - \chi(\tau, i_n, j_n)\}^2.$$

Depois pode-se escolher

$$\tau_0 := \arg \min_{\tau} \sum(\tau, i_n, j_n), \quad \widehat{\beta} := \chi(\tau_0, i_n, j_n).$$

Pode-se também escolher outros valores para i_n e j_n (suficientemente afastados) porque o método é suficientemente robusto para não depender muito dessa escolha.

- O comportamento de $\widehat{\beta}_\rho^{ML}(k)$ depende muito do modelo. Se por um lado apresenta bom comportamento para o Modelo Burr, por outro lado apresenta um

comportamento razoável ou mau nos modelos Fréchet e Cauchy. De acordo com a Observação 3.3.4, $\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k)$ é assintoticamente centrado para o modelo Burr, por isso apresenta melhores resultados neste modelo.

- No modelo Cauchy, como o verdadeiro valor de β é elevado, o estimador $\widehat{\beta}_{\rho}^{(\tau)}(k)$ tem uma variância muito grande, já que esta é proporcional a $\beta^2 = (\frac{2}{3}\pi^2)^2$. É por esta razão que para amostras de pequena dimensão, o erro médio quadrático simulado no nível óptimo é elevado e muito superior ao observado nos modelos Fréchet e Burr.
- De modo a atingir o nível óptimo, de $\widehat{\beta}_{\rho}^{(\tau)}(k)$ (com τ devidamente escolhido) ou de $\widehat{\beta}_n^{ML(\rho)}(k)$, é muitas vezes necessário utilizar quase todos os valores da amostra (ver Tabela 7.1).

7.3.2 Estudo de simulação realizado num nível fixo, k_1

Quando se analisa um conjunto de dados não se conhece o padrão do erro médio quadrático, nem o respectivo nível óptimo. Por isso, na Tabela 7.4 apresentamos, para os modelos aqui considerados, o valor médio e o erro médio quadrático simulado no nível heurístico $k_1 = [n^{0.995}]$ definido em (3.44). Para cada modelo, os valores “sublinhados” indicam o valor mais baixo do erro médio quadrático. Os resultados obtidos não diferem muito dos já apresentados para o nível óptimo k_0 . Apenas para o modelo Burr, o erro médio quadrático mais pequeno é dado pelo estimador $\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)$. Nos restantes modelos é o estimador $\widehat{\beta}_{\rho}^{(\tau)}(k_1)$ que apresenta um erro médio quadrático mais pequeno.

Tabela 7.4: Valor médio e Erro médio quadrático simulado, no nível $k_1 = \lceil n^{0.995} \rceil$

n	100	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000
Fréchet: ($\rho = -1$)								
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	0.879	0.860	0.852	0.846	0.840	0.837	0.833	0.830
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-2.8)}(k_1)]$	0.577	0.557	0.530	0.532	0.528	0.529	0.530	0.532
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	<u>0.155</u>	<u>0.135</u>	<u>0.125</u>	0.121	0.116	0.113	0.111	0.109
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-2.8)}(k_1)]$	1.153	0.518	0.126	<u>0.068</u>	<u>0.002</u>	<u>0.001</u>	<u>0.001</u>	<u>0.001</u>
Burr: $\rho = -2$								
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	1.022	1.034	1.035	1.036	1.037	1.038	1.039	1.040
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-1.2)}(k_1)]$	1.058	1.052	1.037	1.035	1.036	1.038	1.039	1.042
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	<u>0.008</u>	<u>0.005</u>	<u>0.003</u>	<u>0.002</u>	<u>0.002</u>	<u>0.002</u>	<u>0.002</u>	<u>0.002</u>
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-1.2)}(k_1)]$	0.927	0.318	0.052	0.029	0.006	0.004	0.003	0.002
Burr: $\rho = -1$								
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	0.987	0.988	0.989	0.988	0.988	0.988	0.988	0.987
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-1.2)}(k_1)]$	1.035	1.030	1.029	1.028	1.027	1.027	1.026	1.025
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	<u>0.001</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-1.2)}(k_1)]$	0.041	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
Burr: $\rho = -0.5$								
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	1.012	1.017	1.018	1.019	1.020	1.021	1.022	1.023
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-1.2)}(k_1)]$	1.035	1.035	1.035	1.036	1.036	1.036	1.037	1.037
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.000</u>	<u>0.001</u>
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-1.2)}(k_1)]$	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
Cauchy: ($\gamma = 1, \rho = -2$)								
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	12861.764	550.008	4.805	4.761	4.737	4.726	4.720	4.717
$\mathbb{E} [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-0.25)}(k_1)]$	7.740	7.315	7.149	7.046	6.944	6.888	6.844	6.797
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{ML}(k_1)]$	> 50.000	> 50.000	8.120	3.644	3.507	3.494	3.489	3.483
$MSE [\widehat{\beta}_{\rho}^{(-0.25)}(k_1)]$	<u>11.203</u>	<u>3.892</u>	<u>2.163</u>	<u>1.195</u>	<u>0.532</u>	<u>0.297</u>	<u>0.179</u>	<u>0.095</u>

Capítulo 8

Algumas Conclusões

Esta dissertação abordou a estimação semi-paramétrica de parâmetros de modelos de acontecimentos raros, uma área da Teoria de Valores Extremos. Após uma introdução ao tema e à apresentação de resultados importantes, abordámos a estimação de parâmetros duma distribuição de valores extremos num contexto i.i.d.. A inferência baseou-se nas k maiores observações da amostra. Referimos que muitos dos estimadores clássicos apresentam uma variância elevada para k pequeno e um viés elevado para k grande. Por isso, procurámos a remoção da componente dominante de viés de estimadores de parâmetros de primeira ordem de modo a tornar a escolha do nível k mais fácil.

Começámos por tratar a estimação do índice de valores extremos, γ , um dos parâmetros mais importantes nesta área. Consideramos apenas $\gamma > 0$, isto é, que o modelo subjacente à amostra tinha cauda pesada. Introduzimos dois estimadores do índice de valores extremos, “assintoticamente centrados”, isto é, com componente dominante de viés nula, que apresentam no nível óptimo erro médio quadrático inferior ao dos estimadores clássicos. O segundo estimador “assintoticamente centrado” considerado, diferia do primeiro por apresentar uma variância assintótica igual à do estimador de Hill, a mais pequena entre os estimadores do índice de valores extremos positivo. A remoção do viés depende da adequada estimação dos parâmetros de segunda ordem ρ e β . As propriedades assintóticas e os resultados obtidos por simulação através do método de Monte Carlo levam-nos a concluir que os estimadores introduzi-

dos apresentam melhor comportamento do que o estimador de Hill. Essa melhoria não só se verifica no nível óptimo, como numa região de níveis próximos do nível óptimo. Na realidade, um dos novos estimadores “assintoticamente centrados” apresenta melhor comportamento mesmo em regiões com pequenos valores de k , uma região onde este tipo de estimadores costuma apresentar erro médio quadrático superior ao do estimador de Hill.

Na estimação do parâmetro de escala de primeira ordem, \mathcal{C} , tentámos também remover o termo dominante de viés assintótico. Propusemos dois novos estimadores, embora apenas um deles fosse sempre “assintoticamente centrado”. A estimação deste parâmetro é de extrema importância porque está relacionada com a estimação de quantis elevados. Demonstrámos não só a consistência, como também a normalidade assintótica. Os resultados, obtidos por simulação para o estimador assintoticamente centrado, foram melhores dos que os obtidos para o estimador clássico. A remoção do termo dominante de viés assintótico permitiu obter uma redução do erro médio quadrático. Consequentemente as trajectórias amostrais do novo estimador são muito mais estáveis junto ao verdadeiro valor do parâmetro de escala de primeira ordem. No entanto, para valores de ρ próximos de 0, as trajectórias amostrais do valor médio do estimador assintoticamente centrado continuam a apresentar elevada volatilidade.

A terminar este trabalho de investigação, estudámos uma nova classe de estimadores do parâmetro de “escala” de segunda ordem β . Abordámos a consistência e normalidade assintótica sob a validade de condições de variação regular de segunda e terceira ordem. Com a aplicação do método de Monte Carlo analisámos o comportamento da nova classe de estimadores, e efectuámos a comparação com outro estimador existente na literatura, num conjunto de modelos de cauda pesada.

Fica em aberto, para qualquer dos novos estimadores aqui considerados, a escolha do nível k , que aqui se baseou apenas na estabilidade das trajectórias amostrais. Para já isso não é possível porque requer a estimação de parâmetros de variação regular de terceira ordem. Fica também em aberto o comportamento deste conjunto de estimadores para sucessões dependentes.

Bibliografia

- [1] Abramowitz, M. and Stegun I. (eds.)(1970). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover.
- [2] Arnold, B. C., Balakrishnan N. and Nagaraja H. N. (1992). *A first course in order statistics*. John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Beirlant, J., Dierckx, G., Goegebeur, Y. and Matthys, G. (1999). Tail index estimation and an exponential regression model. *Extremes*, **2**(2), 177-200.
- [4] Caeiro, F. (2001). *Generalizações de Estimadores Clássicos do Índice de Variação Regular*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- [5] Caeiro, F. and Gomes, M. I. (2001). A class of asymptotically unbiased semi-parametric estimators of the tail index. *Test*, **11**(2), 345-364.
- [6] Caeiro, F., Figueiredo, F. and Gomes, M. I. (2004). Bias reduction of a tail index estimator through an external estimation of the second-order parameter. *Statistics*, **38**(6), 497-510.
- [7] Caeiro, F., Gomes, M. I. and Pestana, D. (2005). Direct Reduction of Bias of the Classical Hill Estimator. *Revstat* 3(2),113-136.
- [8] Caeiro, F. (2006). *Redução de Viés na Estimação Semi-Paramétrica de um Parâmetro de Escala*. Notas e Comunicações 1/06, CEAUL.

-
- [9] Csörgő S., Deheuvels, P. and Mason, D. (1985). Kernel Estimates of the Tail Index of a Distribution. *Ann. Statist.* 13, no. 3, 1050-1077.
- [10] Csörgő S. and Mason D. (1985). Central limit theorems for sums of extreme values. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **98**, 547-558.
- [11] David, H. A. (1981). *Order Statistics*. John Wiley & Sons, Inc.
- [12] Dekkers, A. L. M., Einmahl, J. H. J. and de Haan, L. (1989). A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Ann. Statist.* **17**, no. 4, 1833-1855.
- [13] Draisma, G., de Haan, L., Peng, L. and Pereira, T. (1999). A Bootstrap-based Method to Achieve Optimality in Estimating the Extreme-value Index. *Extremes.* **2:4**, 367-404.
- [14] Drees, H. (2002). Tail empirical processes under mixing conditions. In Dehling *et al.* (eds.), *Empirical Process Techniques for Dependent Data*, 325-342. Birkhäuser, Boston.
- [15] Drees, H. (2003). Extreme Quantile Estimation for Dependent Data with Applications to Finance. *Bernoulli* **9**, 617-657.
- [16] Falk, M. (1989). A note on uniform asymptotic normality of intermediate order statistics. *Ann. Inst. Statist. Math. A.* 41, 19-29.
- [17] Ferreira, A. (2002). *Statistics of Extremes: Estimation and Optimality*. PhD thesis, Tilburg University. Center Dissertation Series, No.107, The Netherlands.
- [18] Ferreira, A., de Haan, L. and Peng, L. (2003). On optimizing the estimation of high quantiles of a probability distribution. *Statistics* 37(5), 401-434.
- [19] Feuerverger, A. and Hall, P. (1999). Estimating a tail exponent by modelling departure from a Pareto distribution. *Ann. Statist.* **27**, 760-781.

-
- [20] Fisz, M. (1963). *Probability theory and mathematical statistics*, 3rd ed., Malabar.
- [21] Fraga Alves, M. I., Gomes, M. I. and de Haan, L. (2003). A new class of semi-parametric estimators of the second order parameter. *Portugaliae Mathematica* **60**:1, 193-213.
- [22] Geluk, J. and de Haan, L. (1987). *Regular Variation, Extensions and Tauberian Theorems*. Tech. Report CWI Tract 40, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, Netherlands.
- [23] Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.* **44**, 423-453.
- [24] Gomes, M. I., and Martins, M. J. (1999). *Asymptotic efficiency of generalised Jackknife semi-parametric estimators of a heavy tail index*. Notas e Comunicações 16/99, CEAUL.
- [25] Gomes, M. I., Martins, M. J. and Neves, M. (2000). Alternatives to a Semi-Parametric Estimator of Parameters of Rare Events - The Jackknife Methodology. *Extremes* 3:3, 207-229.
- [26] Gomes, M. I., and Martins, M. J. (2001). Generalizations of the Hill estimator - asymptotic versus finite sample behaviour. *Journal of Statistical Planning and Inference* 93, 161-180.
- [27] Gomes, M. I., and Oliveira, O. (2001). The Bootstrap methodology in Statistical Extremes - choice og the optimal sample fraction. *Extremes* 4:4, 331-358.
- [28] Gomes, M. I., and Martins, M. J. (2002). "Asymptotically unbiased" estimators of the tail index based on external estimation of the second order. *Extremes* **5**:1, 5-31.

-
- [29] Gomes, M. I. and Viseu, C. (2005). *Empirical Tail Index and VaR Analysis*. Notas e Comunicações 20/05, CEAUL.
- [30] de Haan, L. (1970). *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*. Mathematical Centre Tract 32, Amesterdam.
- [31] de Haan, L. (1984). Slow variation and characterization of domains of attraction. *Statistical Extremes and Applications*, J. Tiago de Oliveira, ed., 31-38. Reidel, Dordrecht.
- [32] de Haan, L. and Peng, L. (1998). Comparison of Tail Index Estimators. *Statistica Neerlandica* **52**, 60-70.
- [33] Hall, P. (1982). On some Simple Estimates of an Exponent of Regular Variation. *J. R. Statist. Soc.* **44**, no. 1, 37-42.
- [34] Hall, P. and Welsh, A. H. (1985). Adaptive estimates of parameters of regular variation. *Ann. Statist.* **13**, 331-341.
- [35] Hill, B. M. (1975). A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution. *Ann. Statist.* **3**, no. 5, 1163-1174.
- [36] Leadbetter, M. R., Lindgren, G. and Rootzén, H. (1983). *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer-Verlag, New York.
- [37] Martins, M. J. (2000). *Estimação de Caudas Pesadas - variantes ao Estimador de Hill*. Tese de Doutoramento, D.E.I.O., Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- [38] Peng, L. (1998). Asymptotically unbiased estimator for the extreme-value index. *Stat. Prob. Lett.*, **38**(2), 107-115.
- [39] Pereira, M. T. (1994). *Contribuições à Teoria de Valores Extremos*. Tese de Doutoramento, D.E.I.O., Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

- [40] Pestana, D. e Velosa, S. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- [41] Pickands III, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Statist.* **3**, 119-131.
- [42] Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I. (1986). *Integrals and Series, Vol.1: Elementary Functions*. Gordon & Breach Science Publishers, New York.
- [43] Reiss, R. D. (1989). *Aproximate Distributions of Order Statistics*. Springer - Verlag, New York.
- [44] Resnick, S. I. (1987). *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*. Springer - Verlag.
- [45] von Mises, R. (1936). La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev. Math. Union Interbalcanique*, 1, 141-160. Reproduced in Selected Papers of Richard von Mises, *Am. Math. Soc II* (1964), 271-294.
- [46] Weissman, I. (1978). Estimation of parameters of large quantiles based on the k largest observations. *J. Amer. Statist. Assoc.* **73**, 812-815.