## DETERMINAÇÃO DE RELAÇÕES TENSÃO-ABERTURA DE FENDA DE BRFA ATRAVÉS DE ANÁLISE INVERSA

### DETERMINATION OF TENSION-CRACK OPENING RELATIONSHIP OF SFRC THROUGH AN INVERSE ANALYSIS

Gouveia, N.D.<sup>1</sup>; Custódio, A.L.<sup>2</sup>; Faria, D.M.<sup>1,3</sup>; Ramos, A.P.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> UNIC, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa <sup>2</sup> CMA, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa <sup>3</sup> École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suíça



#### RESUMO

A aplicação de fibras de aço discretas no betão tem suscitado um crescente interesse nas últimas décadas, devido ao melhor comportamento à tracção que estas proporcionam aos elementos de betão. Em geral, este comportamento pode ser descrito em termos de uma relação tensão-abertura de fenda ( $\sigma$ -w), determinada com base em ensaios. Neste trabalho apresentam-se os resultados de uma campanha experimental, cujo objectivo era a determinação das leis  $\sigma$ -w para betões com diferentes percentagens volumétricas de fibras. Estas leis são o resultado de uma análise inversa baseada na relação força-deslocamento obtida em vigas entalhadas e em painéis circulares. As relações  $\sigma$ -w propostas foram determinadas por um processo iterativo de minimização do erro entre as curvas força-deslocamento teórica e experimental, utilizando o código SID-PSM, que corresponde à implementação de um método de optimização sem recurso a derivadas. Com este processo é possível incluir o comportamento à tracção do betão reforçado com fibras de aço (BRFA) em outras análises em que este comportamento é importante, como por exemplo no punçoamento em lajes fungiformes.

#### ABSTRACT

The application of discrete steel fibres in concrete has sparked a growing interest in the last decades due to the better tensile behaviour that they provide to the concrete elements. In general, this behaviour can be described in terms of a stress-crack opening relationship ( $\sigma$ -w), determined on the basis of tests. This paper presents the results of an experimental campaign, whose purpose was to determine the  $\sigma$ -w laws for concretes with differents volumetric fibre percentages. These laws are the result of an inverse analysis based on the load-displacement relationship obtained on notched beams and round panels. The  $\sigma$ -w relationships proposals were determined by an iterative process of minimizing the error between the theoretical and experimental load-displacement curves, using the code SID-PSM, which corresponds to an implementation of a derivative-free optimization method. With this process it is possible to include the tension behaviour of steel fibre reinforced concrete (SFRC) in other analyses where it is important, for instance in the punching of flat slabs structures.

### 1- INTRODUÇÃO

O uso de fibras de aço no betão armado tem tido um grande crescimento, devido essencialmente à sua fácil produção e ao melhoramento das propriedades mecânicas do betão, especialmente no que se refere ao comportamento à tracção. Diferentes ensaios podem ser utilizados comportamento para determinar 0 mecânico do Betão Reforcado com Fibras de Aço (BRFA), sendo os mais comuns os ensaios indirectos, ou seja, aqueles que recorrem a vigas e painéis. Menos frequentes são os ensaios de traccão directos por serem de difícil realização.

Existem poucos trabalhos aue comparem as diferenças entre estes dois tipos de ensaios de flexão (Bernard, 2002; De Montaignac et al., 2012 e Gouveia et al., 2013). O presente trabalho apresenta os resultados de uma campanha experimental, onde são utilizadas vigas entalhadas e painéis circulares para determinar o comportamento pós-fendilhação do BRFA. Os resultados dos ensaios são apresentados, comentados e comparados em termos de comportamento à flexão. Além disso, as propriedades do BRFA são avaliadas através de relações tensão-abertura de fenda  $(\sigma$ -w), determinadas a partir desses ensaios a vigas entalhadas e a painéis circulares, utilizando um procedimento de análise As relações  $\sigma$ -w propostas inversa. traduzem a melhor correspondência entre o modelo de simulação da resposta teórica e a experimental dos elementos, sendo determinada por um processo iterativo de minimização do erro entre as curvas forçadeslocamento teórica e experimental. No processo de minimização é utilizado o código SID-PSM (Custódio e Vicente, 2007), que corresponde à implementação de um método de optimização sem recurso a derivadas

### 2- ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Todas as amostras de betão foram preparadas, betonadas e ensaiadas no

Departamento de Engenharia Civil (DEC) da Faculdade de Ciências e Tecnologia (FCT) da Universidade Nova de Lisboa (UNL), tendo sido ensaiadas com a mesma idade.

#### 2.1 - Constituintes do BRFA

A mistura de betão foi realizada com sete constituintes, tendo sido optimizada e desenvolvida por forma a garantir uma boa trabalhabilidade em estado fresco. Desta forma o betão resultante apresenta-se homogéneo, melhorando consequentemente o seu comportamento à tracção em estado endurecido. Para a realização das misturas foi utilizado cimento CEM II/B-L 32.5 N, areia fina 0/2, areia grossa 2/4, agregado calcário 0/12.5, água, adjuvante e fibras. As fibras utilizadas foram metálicas com ganchos nas extremidades da Bekaert's (DRAMIX® RC 65/35 BN). O adjuvante utilizado foi o Sika® Viscocrete 3008. Realizaram-se três misturas de BRFA, identificando-as como F1.0, F1.5 e F2.0.

Na Tabela 1 apresenta-se um resumo das composições de betão em cada mistura.

mistura.					
Mistura Material (kg/m <sup>3</sup> )	F1.0	F1.5	F2.0		
Cimento	450.0				
Água	202.5				
Adjuvante	5.47				
Areia Fina	309.5				
Areia Grossa	525.3				
Agregado Calcário	752.9	745.6	738.2		
Fibras	80.0 (1.0%)	120.0 (1.5%)	160.0 (2.0%)		

Tabela 1 – Composição de betão utilizada em cada mistura.

#### 2.2 - Ensaios à flexão

Neste trabalho o comportamento à tracção foi determinado com base em ensaios indirectos, nomeadamente realizando ensaios à flexão em vigas e em painéis.

#### 2.2.1 Vigas entalhadas

O ensaio às vigas entalhadas seguiu a norma EN 14651, 2005. Na Fig. 1 apresentase o esquema adoptado.

(a)



Fig. 1 – Ensaio em vigas entalhadas, (a) foto e (b) instrumentação.

Na realização do ensaio, as vigas com 600x150x150 mm e um entalhe a meio do vão com 25 mm de profundidade são carregadas pontualmente na vertical a meio do vão, estando apoiadas em dois pontos extremidades. próximos das 0 deslocamento central é medido utilizando dois deflectómetros posicionados na parte superior, em ambos os lados da viga a meio do vão. A abertura de fenda é também medida através de outros dois deflectómetros, posicionados na horizontal em ambas as faces laterais da viga.

Na Fig. 2 são apresentados os resultados médios força-deslocamento central para cada mistura, respeitantes aos ensaios às vigas entalhadas.



Fig. 2 – Curvas experimentais força-deslocamento central das vigas entalhadas.

Os resultados mostram que depois da matriz fendilhar dá-se um aumento de força com uma redução gradual de rigidez até se atingir um pico. Segue-se uma fase de "softening", com o aumento da deformação.

#### 2.2.2 Painéis circulares

O ensaio aos painéis circulares seguiu a norma ASTM C1550-12, 2012. Na Fig. 3 é apresentado o esquema adoptado para o respectivo ensaio.





Fig. 3 – Ensaio aos painéis circulares, (a) foto, (b) dimensões (em mm) e instrumentação.

# DETERMINAÇÃO DE RELAÇÕES TENSÃO-ABERTURA DE FENDA DE BRFA ATRAVÉS DE ANÁLISE INVERSA

Os painéis circulares têm um raio de 400 mm e uma espessura de 75 mm. Na realização do ensaio, os painéis estão apoiados em três pontos igualmente circunferência espacados numa com diâmetro igual a 750 mm. O carregamento é efectuado no centro do painel, na parte superior, através de um pistão de aco hemisférico. O deslocamento central é medido utilizando um deflectómetro posicionado no centro da superfície inferior do painel.

Na Fig. 4 são apresentados os resultados médios força-deslocamento central para cada mistura, correspondentes aos ensaios dos painéis circulares.



Fig. 4 – Curvas experimentais força-deslocamento central dos painéis circulares.

O comportamento apresentado é qualitativamente semelhante ao obtido com os ensaios nas vigas entalhadas.

#### 3- ANÁLISE INVERSA

O comportamento à tracção do betão pode ser descrito em termos de abertura de fenda na zona de tracção, em que as fibras ligam as faces da fenda (Zhang e Stang, 1998; Marti *et al.*, 1999; Kooiman *et al.*, 2000; Voo e Foster, 2004; Sousa e Gettu, 2006; Nour *et al.*, 2011; De Montaignac *et al.*, 2012 e Gouveia *et al.*, 2013).

Neste trabalho, a relação  $\sigma$ -w é estabelecida recorrendo a uma análise inversa, utilizando os dados obtidos experimentalmente a partir dos ensaios à flexão. Nesta análise inversa, a relação

 $\sigma$ -w é determinada por forma a obter a simulação da viga ou painel, neste caso a relação forca-deslocamento central, que melhor aiusta aos resultados se experimentais. Trata-se de um procedimento iterativo, onde a relação  $\sigma$ -w é optimizada até que a resposta numérica corresponda à analítica, com o menor erro possível. Neste considerando diferentes trabalho. as misturas, o valor máximo para o erro obtido foi cerca de 4%.

# 3.1 - Modelo de análise das vigas entalhadas

A análise das vigas entalhadas é realizada recorrendo a um processo iterativo que relaciona a flecha ( $\delta$ ), a máxima abertura de fenda ( $w_{max}$ ) e a profundidade da fenda ( $\alpha h$ ). Na Fig. 5 é apresentada a distribuição de tensões na secção fendilhada.



Fig. 5 – Distribuição de tensões na secção fendilhada no caso das vigas entalhadas.

Uma fenda forma-se quando a tensão de tracção máxima atinge a resistência à tracção do betão. Após a matriz fendilhar, e assumindo um perfil linear da fenda, o comprimento da fenda ( $\alpha h$ ), a máxima abertura de fenda ( $w_{max}$ ) e o momento de flexão externo (M) podem ser relacionados através da mecânica de fractura, permitindo o cálculo da abertura de fenda (w) em função da altura x (Eq. (1)) (Zhang e Stang, 1998):

$$w = w_{max} \cdot \left(1 - \frac{x}{\alpha \cdot h}\right) \tag{1}$$

As condições de equilíbrio obrigam a que as Eq. (2) e (3) sejam satisfeitas:

$$\int_{0}^{\alpha h} \sigma_{I}(w(x)) \cdot b \, dx + + \int_{\alpha h}^{h} \sigma_{II}(x) \cdot b \, dx = 0$$
(2)  
$$\int_{0}^{\alpha h} \sigma_{I}(w(x)) \cdot (h - x) \cdot b \, dx + ch \qquad (2)$$

Gouveia, N.D., Custódio, A.L., Faria, D.M, Ramos, A.P.

onde *M* representa o momento de flexão externo no centro da viga, *b* a largura da secção e  $\sigma_I(w(x))$  e  $\sigma_{II}(x)$  as tensões da zona fendilhada e não fendilhada, respectivamente. O valor de  $\sigma_I(w(x))$  (Eq. (4)) pode ser relacionado com  $\alpha h$  e  $w_{max}$ usando as relações  $\sigma$ -w em conjunto com a Eq. (1):

$$\sigma_I(w(x)) = \sigma_I\left(w_{max} \cdot \left(1 - \frac{x}{\alpha \cdot h}\right)\right) (4)$$

Por outro lado,  $\sigma_{II}(x)$  pode ser relacionado com  $\alpha h \in \beta h$  de acordo com a Eq. (5):

$$\sigma_{II}(x) = \sigma_t \cdot \left(1 - \frac{x - \alpha \cdot h}{\beta \cdot h - \alpha \cdot h}\right)$$
(5)

onde  $\sigma_t$  representa a resistência à tracção da matriz e  $\beta h$  a altura da secção da zona traccionada, sendo determinada pela resolução conjunta das Eq. (5) e (2):

$$\beta = \frac{\alpha \cdot \int_0^{\alpha h} \sigma_I(w(x)) \, dx + 0.5 \cdot \sigma_t \cdot h \cdot (1 - \alpha^2)}{\int_0^{\alpha h} \sigma_I(w(x)) \, dx + \sigma_t \cdot h \cdot (1 - \alpha)} \quad (6)$$

De acordo com Zhang e Stang, 1998, a abertura de fenda máxima ( $w_{max}$ ) pode ser decomposta em:

$$w_{max} = w_M + w_{\sigma_I(x)} \tag{7}$$

em que  $w_M$  e  $w_{\sigma_I(x)}$  representam as componentes de  $w_{max}$  causadas pelo momento externo M e pela tensão  $\sigma_I$ , respectivamente. Neste caso,  $w_{\sigma_I(x)}$  pode ser obtido pela Eq. (8):

$$w_{\sigma_{\mathrm{I}}(x)} = w_{M'} + w_{\sigma'} \tag{8}$$

em que M' e  $\sigma'$  são dados por:

$$M' = \int_0^{ah} b \cdot \sigma_{\mathrm{I}}(w(x)) \cdot \left(\frac{h}{2} - x\right) \, dx \qquad (9)$$

$$\sigma' = \frac{1}{h} \cdot \int_0^{\alpha h} \sigma_{\rm I}(w(x)) \, dx \tag{10}$$

Ainda de acordo com Zhang e Stang, 1998, a abertura de fenda máxima ( $w_{max}$ ) é expressa pela Eq. (11):

$$w_{max} = \frac{24 \cdot \alpha}{b \cdot h \cdot E} \cdot \left[ M \cdot V_1(\alpha) - M' \cdot V_2(\alpha) \right] - \frac{4 \cdot \sigma' \cdot \alpha \cdot h}{E} \cdot V_3(\alpha) \quad (11)$$

em que

$$V_1(\alpha) = 0.33 - 1.42 \cdot \alpha + 3.87 \cdot \alpha^2 - -2.04 \cdot \alpha^3 + \frac{0.66}{(1-\alpha)^2}$$
(12)

$$V_{2}(\alpha) = 0.8 - 1.7 \cdot \alpha + 2.4 \cdot \alpha^{2} + \frac{0.66}{(1-\alpha)^{2}}$$
(13)

$$V_{3}(\alpha) = \frac{1.46 + 3.42 \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi \cdot \alpha}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\pi \cdot \alpha}{2}\right)^{2}}$$
(14)

e E representa o módulo de elasticidade do betão. A relação força-deslocamento é determinada em várias etapas recorrendo a iterativo. um processo Para vários comprimentos de fenda ( $\alpha h$ ), a abertura de fenda máxima e o momento externo são determinados resolvendo as Eq. (2), (3) e (11). Assim, o deslocamento central da viga calculado adicionando pode ser ao deslocamento deslocamento elástico 0 associado à fissuração da viga ( $\delta_c$ ) (Eq. (15)):

$$\delta_c = \frac{w_{max} \cdot L_{viga}}{4 \cdot \alpha \cdot h} \cdot k \tag{15}$$

em que

$$k = \begin{cases} \frac{\alpha}{0.9} & \text{for } 0 \le \alpha \le 0.9\\ 1.0 & \text{for } 0.9 \le \alpha \le 1.0 \end{cases}$$
(16)

No cálculo deste último deslocamento assume-se que ambas as faces da fenda permanecem rectas e rodam com um determinado ângulo relativo entre si ( $\theta$ ) (Eq. (17)):

$$\theta = \frac{w_{max}}{2 \cdot \alpha \cdot h} \tag{17}$$

A força aplicada na viga é dada por (Eq. (18)):

$$P_{teo} = \frac{4 \cdot M}{L} \tag{18}$$

Com este processo obtém-se o comportamento força-deslocamento teórico da viga que pode ser comparado com o obtido experimentalmente.

Neste estudo foi adoptado um modelo quadrilinear para a relação  $\sigma$ -w na zona de tracção fendilhada, descrito pela Eq. (19):

$$\frac{\sigma_{I}(w(x))}{\sigma_{t}} = \begin{cases} a_{1} + c_{1}w & \text{if } w \leq w_{1} \\ a_{2} + c_{2}w & \text{if } w_{1} \leq w \leq w_{2} \\ a_{3} + c_{3}w & \text{if } w_{2} \leq w \leq w_{3} \\ a_{4} + c_{4}w & \text{if } w_{3} \leq w \leq w_{4} \end{cases}$$
(19)

#### 3.2 - Modelo de análise dos painéis circulares

Também no modelo de análise dos painéis circulares a relação  $\sigma$ -w é obtida considerando a simulação da resposta do painel, novamente através da relação forçadeslocamento central, que melhor se adapta aos dados experimentais. Na Fig. 6 é apresentada a distribuição de tensões numa secção fendilhada.



Fig. 6 – Distribuição de tensões numa secção fendilhada no caso dos painéis circulares.

A aplicação da análise inversa nos painéis pressupõe a adopção de algumas simplicações, à semelhança do já realizado noutros trabalhos de investigação (Marti *et al.*, 1999; Tran *et al.*, 2005 e Nour *et al.*, 2011). As duas últimas referências utilizam como base os parâmetros mecânicos das vigas a fim de resolver o problema dos painéis, sendo adoptada uma abordagem semelhante no presente estudo. Assim o procedimento de análise inversa a ser utilizado para os painéis corresponde ao usado no modelo das vigas (Eq. (1) a (19)), à excepção de dois factores:

1° - O cálculo de 
$$V_1(\alpha)$$
:  
 $V_{1,p}(\alpha) = 0.8 - 1.7 \cdot \alpha + 2.4 \cdot \alpha^2 + + \frac{0.66}{(1-\alpha)^2}$  (20)

 $2^{\circ}$  - O cálculo do deslocamento do painel, que pode ser obtido através da teoria das linhas de rotura em conjunto com o princípio dos trabalhos virtuais, a partir dos quais é possível obter uma relação entre a força aplicada *F* e o momento *M* originado (Eq. (21)):

$$\sum F \cdot \delta = \sum M \cdot \theta \cdot L \tag{21}$$

Neste caso  $\delta$  representa o deslocamento central do painel, *L* o comprimento da fenda e  $\theta$  o ângulo de

rotação da fenda (em radianos) (Fig. 6). O valor de  $\theta$  pode ser obtido segundo a Eq. (22):

$$\theta = \frac{w_{max}}{\alpha \cdot h} \tag{22}$$

De acordo com Nour *et al.*, 2011, o deslocamento no centro do painel e a força aplicada podem, por simplificação, ser obtidos pelas Eqs. (23) e (24), respectivamente:

$$\delta = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r \cdot \tan(\theta/2)}{3} \tag{23}$$

$$P_{teo} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{\theta}{\tan(\theta/2)} \cdot M$$
(24)

em que r representa o raio do painel calculado apenas até aos apoios e R o raio total.

#### 3.3 - Processo de optimização

A relação  $\sigma$ -w é estabelecida recorrendo à minimização do erro entre as curvas força-deslocamento teórica e experimental, o qual é definido por meio da função apresentada na Eq. (25):

$$erro = \int_0^{\delta_{max}} [P_{exp}(\delta) - P_{teo}(\delta)]^2 d\delta \quad (25)$$

Neste caso,  $\delta_{max}$  representa o máximo deslocamento central adoptado e  $P_{exp}$  e  $P_{teo}$ os valores das forças experimental e teórica, respectivamente, correspondentes ao mesmo deslocamento. O problema de minimização a depende variáveis resolver das sete  $(\sigma_t, w_1, w_2, w_3, c_1, c_2, c_3),$ tendo sido considerados limites máximos e mínimos para a respectiva variação, bem como algumas relações entre a sua magnitude  $(w_1 < w_2 \in w_2 \le w_3).$ 

Na impossibilidade de obter derivadas para a função erro, a correspondente minimização foi feita com recurso a um método de procura em padrão generalizada, em particular, utilizando o código computacional SID-PSM (Custódio e Vicente, 2007).

Qualquer iteração de um método de procura em padrão generalizada encontra-se organizada em dois tipos de passo: procura e sondagem. O passo de procura é muito

flexível, podendo mesmo ser omitido. Tem como grande objectivo o aumento da eficiência computacional. Quando falha em identificar um novo ponto (no caso actual. definido pelas sete variáveis consideradas) que permita decrescer o valor da função a minimizar. executa-se 0 passo de sondagem. Este é responsável pelas propriedades de convergência do método, pelo que segue uma estrutura mais rígida. A função a optimizar é avaliada em pontos correspondentes a direcções que satisfazem determinadas propriedades geométricas (conjuntos geradores positivos). escalonadas por um comprimento de passo. Este comprimento de passo vai sendo mantido constante ou aumentado em iterações bem sucedidas, para as quais é encontrado um novo ponto que permite decrescer o valor da função a minimizar. Iterações mal sucedidas correspondem, obrigatoriamente, a um decréscimo do valor do comprimento do passo.

No caso da implementação SID-PSM, o passo de procura é definido recorrendo à minimização de modelos quadráticos polinomiais. Estes são construídos com base nos pontos que o algoritmo vai avaliando no processo usual de optimização. Numa fase inicial, quando ainda não existe um histórico suficiente de pontos onde a função a minimizar tenha sido avaliada, consideram-se modelos com norma de Frobenius mínima. Logo que o número de pontos já avaliados o permita, são utilizados modelos quadráticos de interpolação polinomial (Custódio et al., 2010).

Ainda com o objectivo de aumentar a eficiência computacional, neste caso do passo de sondagem, o código SID-PSM utiliza o gradiente de um tipo particular de modelos lineares de interpolação polinomial (gradientes simpléticos) para estabelecer uma ordenação das direcções de sondagem antes de iniciar o processo de teste (Custódio e Vicente, 2007).

#### 3.4 - Resultados da análise inversa

As Figs. 7 e 8 correspondem aos resultados da aplicação dos modelos de

análise inversa às vigas entalhadas e aos painéis circulares, respectivamente, apresentando as curvas teóricas forçadeslocamento central, denominadas como A.I..



Fig. 7 – Resultados força-deslocamento central das vigas entalhadas.



Fig. 8 – Resultados força-deslocamento central dos painéis circulares.

Os resultados obtidos mostram que existe uma boa concordância entre as curvas teóricas e as experimentais para cada um dos três tipos de mistura considerados.

A aplicação desta metodologia de análise inversa levou à obtenção das relações  $\sigma$ -w apresentadas na Fig. 9 e nas Tabelas 2 e 3.

## DETERMINAÇÃO DE RELAÇÕES TENSÃO-ABERTURA DE FENDA DE BRFA ATRAVÉS DE ANÁLISE INVERSA



Fig. 9 – Relações σ-w adoptadas (a) nas vigas entalhadas e (b) nos painéis circulares.

Tabela 2 – Parâmetros adoptados nas relações σ-w quadrilineares no caso das vigas entalhadas.

Modelo	F1.0	F1.5	F2.0
σ <sub>t</sub> (MPa)	3.798	3.822	5.140
a <sub>1</sub> , c <sub>1</sub> (1/mm); <w<< th=""><th>1,-4.654; [0;5.62E-2]</th><th>1,-3.528; [0;6.60E-2]</th><th>1,-3.864; [0;6.60E-2]</th></w<<>	1,-4.654; [0;5.62E-2]	1,-3.528; [0;6.60E-2]	1,-3.864; [0;6.60E-2]
a <sub>2</sub> , c <sub>2</sub> (1/mm); <w<< th=""><th>0.715,0.417; [5.62E-2; 0.341]</th><th>0.733,0.517; [6.60E-2; 0.430]</th><th>0.738,0.107; [6.60E-2; 0.430]</th></w<<>	0.715,0.417; [5.62E-2; 0.341]	0.733,0.517; [6.60E-2; 0.430]	0.738,0.107; [6.60E-2; 0.430]
a3, c3 (1/mm); <w<< th=""><th>0.910,-0.155; [0.341;4.601]</th><th>1.019,-0.148; [0.430;5.958]</th><th>0.848,-0.148; [0.430;4.890]</th></w<<>	0.910,-0.155; [0.341;4.601]	1.019,-0.148; [0.430;5.958]	0.848,-0.148; [0.430;4.890]
a4, c4 (1/mm); <w<< th=""><th>0.270,-0.015; [4.601;17.5]</th><th>0.205,-0.012; [5.958;17.5]</th><th>0.170,-0.010; [4.890;17.5]</th></w<<>	0.270,-0.015; [4.601;17.5]	0.205,-0.012; [5.958;17.5]	0.170,-0.010; [4.890;17.5]

 $\sigma_t$  - tensão de tracção da matriz;

w - abertura de fenda;

 $a_1, c_1$  - parâmetros adoptados na relação  $\sigma$ -w.

Tabela 3 – Parâmetros adoptados nas relações σ-w quadrilineares no caso dos painéis circulares.

Modelo	F1.0	F1.5	F2.0	
σt (MPa)	3.198	3.058	3.644	
aı, cı (1/mm); <w<< td=""><td>1,-325.612; [0;1.17E-3]</td><td>1,-244.344; [0;1.44E-3]</td><td>1,-269.305; [0;1.22E-3]</td></w<<>	1,-325.612; [0;1.17E-3]	1,-244.344; [0;1.44E-3]	1,-269.305; [0;1.22E-3]	
a2, C2 (1/mm); <w<< td=""><td>0.620,0.288; [1.17E-3; 0.418]</td><td>0.647,0.234; [1.44E-3; 0.706]</td><td>0.671,0.355; [1.22E-3; 0.457]</td></w<<>	0.620,0.288; [1.17E-3; 0.418]	0.647,0.234; [1.44E-3; 0.706]	0.671,0.355; [1.22E-3; 0.457]	
a3, c3 (1/mm); <w<< td=""><td>0.798,-0.138; [0.418;4.649]</td><td>0.905,-0.132; [0.706;6.021]</td><td>0.895,-0.135; [0.457;5.778]</td></w<<>	0.798,-0.138; [0.418;4.649]	0.905,-0.132; [0.706;6.021]	0.895,-0.135; [0.457;5.778]	
a4, c4 (1/mm); <w<< td=""><td>0.213,-0.012; [4.649;17.5]</td><td>0.171,-0.010; [6.021;17.5]</td><td>0.170,-0.010; [5.778;17.5]</td></w<<>	0.213,-0.012; [4.649;17.5]	0.171,-0.010; [6.021;17.5]	0.170,-0.010; [5.778;17.5]	

 $\sigma_t$  - tensão de tracção da matriz;

w - abertura de fenda;

**a**<sub>1</sub>, **c**<sub>1</sub> - parâmetros adoptados na relação  $\sigma$ -w.

É possível observar na Fig. 9 que após a matriz fendilhar ocorre uma queda súbita de tensões, seguida por uma fase de endurecimento até ser atingido um pico máximo, verificando-se depois uma fase de "softening" gradual. É ainda possível verificar que geralmente a tensão máxima pós-fendilhação aumenta com o aumento da percentagem volumétrica de fibras.

Pode afirmar-se que as relações  $\sigma$ -w obtidas nos ensaios às vigas entalhadas têm tensões de pico mais elevadas do que as relações obtidas nos ensaios aos painéis circulares, quando se compara misturas idênticas (Fig. 9). Note-se que os ensaios aos proporcionam painéis melhor uma representação do volume de betão, não entalhe pré-definido, existindo um formando-se fendas em várias direcções com maior superfície, evitando o efeito de parede Montaignac *et al.*, 2012). Esta (De sobrestimação pode ser justificada pela existência de uma direcção preferencial das fibras nas vigas entalhadas, enquanto que nos painéis existem várias fendas que são atravessadas pelas fibras, tomando diferentes direcções, tal como mencionado em De Montaignac et al., 2012 e Gouveia et al., 2013. No geral, verifica-se ainda que o comportamento pós-fendilhação melhora

Gouveia, N.D., Custódio, A.L., Faria, D.M, Ramos, A.P.

com o aumento da percentagem volumétrica de fibras.

Obtido o comportamento à tracção do BRFA, é agora possível incluí-lo em outras análises, em que o comportamento e a capacidade de algumas estruturas são avaliados, tais como o punçoamento de lajes fungiformes (Gouveia *et al.*, 2014).

### 4- CONCLUSÕES

Neste trabalho, as propriedades mecânicas de várias misturas de BRFA são avaliadas por meio de ensaios de flexão, com o objectivo de determinar o comportamento à flexão (vigas entalhadas e painéis circulares) do BRFA utilizado. Esta análise permitiu a comparação do comportamento das diferentes misturas, mostrando a influência da percentagem de fibras no betão, permitindo ainda obter relações  $\sigma$ -w que caracterizam o BRFA.

Conclui-se que as relações  $\sigma$ -w obtidas nos ensaios às vigas entalhadas apresentam tensões de pico mais elevadas do que as obtidas a partir dos ensaios aos painéis circulares. Verifica-se ainda que com o aumento da percentagem de fibras adicionadas ao betão existe um melhor comportamento pós-fissuração. Este benefício pode ser justificado pela melhor ligação entre as fibras de aço e a matriz, permitindo que as fibras "conectem" eficazmente as fissuras da matriz.

### **5- AGRADECIMENTOS**

Este trabalho teve o apoio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia – Ministério da Ciência e Tecnologia e Ensino Superior através do Projecto FCT/MCTES - PTDC/ECM/114492/2009: FLAT – Comportamento de Lajes Fungiformes Sujeitas a Acções Cíclicas e Sísmicas.

Ao Eng<sup>o</sup> Erik Ulrix da BIU (Portugal) e à Eng<sup>a</sup> Ann Lambrechts da BEKAERT (Bélgica), pelo fornecimento das fibras. À empresa SONANGIL S.A. pelo fornecimento dos agregados e à SIKA PORTUGAL S. A. pelo fornecimento do plastificante.

### 6- REFERÊNCIAS

- Bernard, E.S. (2002): Correlations in the behaviour of fibre reinforced shotcrete beam and panel specimens, *Materials and Structures*, Vol. 35, pp. 156-164.
- De Montaignac, R., Massicotte, B., Charron, J-P. e Nour. A. (2012): Design of SFRC structural elements: post-cracking tensile strength measurement, *Materials and Structures*, Vol. 45, pp. 609-622.
- Gouveia, N., Fernandes, N., Faria, D., Ramos, A. e Lúcio, V. (2013): Punching of steel fibre reinforced concrete flat slabs, Proceedings of fib symposium Tel-Aviv 2013, Tel Aviv, Abril.
- Custódio, A. L. e Vicente, L. N. (2007): Using sampling and simplex derivatives in pattern search methods, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 18, pp. 537 - 555.
- EN 14651 (2005): Test method for metallic fibered concrete measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual), European Committee for Standardization, Brussels.
- American Society for Testing and Materials (ASTM) (2012): Standard test method for flexural toughness of fibre reinforced concrete (using centrally loaded round panel), American Society for Testing and Materials standard C-1550-12, West Conshohoken.
- Zhang, J. e Stang, H. (1998): Applications of stress crack width relationship in predicting the flexural behavior of fibre-reinforced concrete, *Cement & Concrete Research*, Vol. 28, pp. 439-452.
- Marti, P., Pfyl, T., Sigrist, V. e Ulaga, T. (1999): Harmonized test procedures for steel fiberreinforced concrete, *ACI Materials Journal*, Vol. 96, pp. 676-686.
- Kooiman, A.G., Veen, C., e Walraven, J.C. (2000): Modelling the post-cracking behavior of steel fibre reinforced concrete for structural design purposes, *Heron*, Vol. 45, pp. 275-307.
- Voo, J.Y.L. e Foster, S.J: (2004): Tensile fracture of fibre reinforced concrete: variable engagement model, 6th Rilem symposium of fibre reinforced concrete (FRC), Varenna, Itália, pp. 75-84.
- Sousa, J. e Gettu, R. (2006): Determining the tensile stress-crack opening curve of concrete

# DETERMINAÇÃO DE RELAÇÕES TENSÃO-ABERTURA DE FENDA DE BRFA ATRAVÉS DE ANÁLISE INVERSA

by inverse analysis, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 132, pp. 141-148.

- Nour. A., Massicotte, B., De Montaignac, R. e Charron, J-P. (2011): Derivation of a crack opening deflection relationship for fibre reinforced concrete panels using a stochastic model: Application for predicting the flexural behaviour of round panels using stress crack opening diagrams, *Cement and Concrete Research*, Vol. 41, pp. 964-974.
- Tran, V. N. G., Bernard, E. S. e Beasley, A. J. (2005): Constitutive modeling of fiber reinforced shotcrete panels, *ASCE Journal* of Engineering Mechanics, Vol. 131.
- Custódio, A. L., Rocha, H. e Vicente, L. N. (2010): Incorporating minimum Frobenius norm models in direct search, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 46, pp. 265 - 278.
- Gouveia, N., Fernandes, N., Faria, D., Ramos, A. e Lúcio, V. (2014): SFRC flat slabs punching behaviour – experimental research, *Composites: Part B*, Vol. 63, pp. 161-171.

DOI:10.1016/j.compositesb.2014.04.005