

## *Redução de viés na estimação semi-paramétrica de um parâmetro de escala*

**Frederico Caeiro**

*CMA e DM - Universidade Nova de Lisboa*

**Resumo:** Neste trabalho propõem-se, num contexto de variação regular de segunda ordem, novos estimadores semi-paramétricos de um parâmetro de escala de primeira ordem. Tratam-se de estimadores de viés reduzido que permitem a redução do erro médio quadrático. É utilizado o Método de Monte Carlo de modo a obter, para amostras de dimensão finita, o comportamento destes novos estimadores comparativamente com outros existentes na literatura.

**Palavras-chave:** estatística de extremos, estimação semi-paramétrica, cauda pesada, simulação

**Abstract:** In this paper, and in a second order regular variation framework we propose new scale parameter semi-parametric estimators. The new reduced bias estimators enable us to achieve a smaller mean squared error. These new estimators are compared with other alternatives through the use of Monte Carlo simulation.

**Keywords:** statistical theory of extremes, semi-parametric estimation, heavy tail, simulation.

## 1 Introdução

Os modelos de valores extremos, de cauda pesada, são cada vez mais utilizados em áreas tais como, por exemplo, o tráfego de telecomunicações, ou a análise de dados financeiros. Diz-se que  $F$  é de cauda pesada se a função cauda  $\bar{F} = 1 - F \in RV_{-1/\gamma}$ ,  $\gamma > 0$  onde  $RV_\alpha$  denota a classe de funções de variação regular no infinito, com índice de variação regular  $\alpha$ , isto é, funções positivas e mensuráveis  $g$  tais que  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(tx)/g(t) = x^\alpha$ , para todo o  $x > 0$  (Gnedenko, 1943).

A condição anterior pode ser expressa de modo equivalente utilizando a função quantil,  $U(t) = F^{\leftarrow}(1 - 1/t)$ ,  $t \geq 1$ , onde  $F^{\leftarrow}(x) = \inf\{y : F(y) \geq x\}$  representa a função inversa generalizada. Assim, um modelo é de cauda pesada se a função quantil verificar,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\gamma, \quad (1)$$

para qualquer  $x > 0$ , ou seja,  $U(t)$  é de variação regular com índice positivo,  $\gamma$

(de Haan, 1970). Para estimar o índice de cauda positivo, um dos estimadores mais conhecidos é o estimador de Hill (1975),

$$H(k) = \widehat{\gamma}_n^H(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_{ik} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i, \quad (2)$$

onde  $X_{i:n}$  representa a  $i$ -ésima estatística ordinal ascendente associada à amostra  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,

$$V_{ik} := \ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-k:n}, \quad 1 \leq i \leq k < n, \quad (3)$$

são os excessos das log-observações, e

$$U_i := i (\ln X_{n-i+1:n} - \ln X_{n-i:n}), \quad 1 \leq i \leq k < n, \quad (4)$$

são os espaçamentos das log-observações devidamente escalados. Trata-se de um estimador consistente de  $\gamma$ , sempre que  $k = k_n$  é uma sequência intermédia, isto é, uma sequência de valores inteiros positivos tal que

$$k = k_n \rightarrow \infty, \quad k/n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Para obter a distribuição assintótica deste e de outros estimadores, é usual admitir-se uma condição de segunda ordem que mede a velocidade de convergência de  $U(tx)/U(t) - x^\rho$  para zero,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln U(tx) - \ln U(t) - \gamma \ln x}{A(t)} = \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad (6)$$

para qualquer  $x > 0$ , onde  $|A(t)|$  é uma função de variação regular de índice  $\rho \leq 0$  (Geluk e de Haan, 1987).

Neste trabalho admite-se que  $F$  é um modelo pertencente à classe de Hall (Hall, 1982; Hall e Welsh, 1985), com função quantil do tipo

$$U(t) = Ct^\gamma \left( 1 + \frac{A(t)}{\rho} (1 + o(1)) \right), \quad A(t) = \gamma \beta t^\rho, \quad t \rightarrow \infty, \quad (7)$$

onde  $C > 0$  é o parâmetro de escala que interessa estimar, e  $\rho < 0$ , e  $\beta \in \mathbb{R}$  são parâmetros de segunda ordem. O estimador do parâmetro de escala proposto por Hall e Welsh é

$$C(k) \equiv C_H(k) := \left( \frac{k}{n} \right)^{H(k)} X_{n-k:n}. \quad (8)$$

**Observação 1.1.** Para  $k$  intermédio tal que  $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$  (finito) e sob a condição (6), pode-se garantir a validade da seguinte representação em distribuição,

$$\sqrt{k}(H(k) - \gamma) \stackrel{d}{=} \left( \gamma Z_k^{(1)} + \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{1 - \rho} \right) (1 + o_p(1)), \quad (9)$$

e

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln n} \left( \frac{C_H(k) - C}{C} \right) \stackrel{d}{=} \left( \frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \left( \gamma Z_k^{(1)} + \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{1 - \rho} \right) (1 + o_p(1)). \quad (10)$$

onde  $Z_k^{(1)}$  é uma variável aleatória normal padrão.

As condições impostas permitem verificar que  $\ln k / \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2\rho / (1 - 2\rho)$ .

Assim, pode-se garantir que o estimador é assintoticamente normal com viés eventualmente não nulo igual a  $\frac{-\lambda}{(1-\rho)(1-2\rho)}$ .

Devido às propriedades deste estimador é bastante difícil escolher-se adequadamente o nível  $k$ , isto é, o número de estatísticas ordinais de topo a utilizar. Por um lado para pequenos valores de  $k$  temos uma variância elevada, por outro um viés elevado para  $k$  grande. O ideal seria escolher sempre o nível óptimo ( $k_0$ ), isto é, o nível que minimize o erro médio quadrático ( $MSE$ ). Uma possível solução é tentar estimar o nível óptimo, e depois estimar o parâmetro de escala nesse nível. Este tipo de técnica não costuma funcionar muito bem porque as trajectórias amostrais são muitos instáveis e um pequeno desvio do nível óptimo resulta numa estimativa um pouco diferente da obtida no respectivo nível óptimo. Nos últimos anos este tipo de problemas relacionados com a escolha do nível  $k$  tem sido resolvido através da introdução de estimadores “assintoticamente centrados”, isto é, estimadores cujo termo dominante de viés é nulo (Caeiro *et al.* 2005, Gomes e Martins 2002). Este tipo de estimadores, apresenta muitas vezes trajectórias amostrais bastantes mais estáveis junto ao verdadeiro valor do parâmetro a estimar, tornando a escolha de  $k$  menos relevante.

**Observação 1.2.** Nos modelos pertencentes à classe de Hall, o erro médio quadrático assintótico de  $H(k)$  e de  $C_H(k)$  é aproximadamente igual a  $\frac{\gamma^2}{k} + \left( \frac{\gamma\beta}{1-\rho} \right)^2 \left( \frac{n}{k} \right)^{2\rho}$ . O mínimo é atingido em  $k_0 = \left( \frac{1-\rho}{\sqrt{-2\rho\beta n^\rho}} \right)^{2/(1-2\rho)}$ .

**Observação 1.3.** Embora na representação (10) só apareça um termo de viés, a sua remoção poderá não ser suficiente para tornar o estimador “assintoticamente centrado”. O termo de viés que aparece em (10) resulta de  $\left( \frac{k}{n} \right)^{H(k)}$ , ou seja, da estimação do índice de cauda no mesmo nível  $k$ . Por outro lado há outro termo de viés que resulta da v.a.  $X_{n-k:n}$ , mas que por ser de ordem inferior não aparece em na representação em distribuição. Alguns resultados de simulação indicaram que mesmo a remoção dos dois termos de viés deste estimador não foram suficientes para tornar as trajectórias amostrais muito mais estáveis. É por esta razão que se neste trabalho se introduz um novo estimador para o parâmetro de escala  $C$ .

Como, para  $k$  intermédio,  $(k/n)^\gamma X_{n-k:n} \sim C$ , considerem-se os seguintes estimadores associados às variáveis aleatórias:

$$\widehat{C}_\gamma(k) := \left(\frac{k}{n}\right)^\gamma \frac{X_{n-[k/2]:n} - X_{n-k:n}}{2^\gamma - 1}, \quad (11)$$

e

$$\widetilde{C}_{\gamma,\rho,\beta}(k) := \left(\frac{k}{n}\right)^\gamma \frac{X_{n-[k/2]:n} - X_{n-k:n}}{2^\gamma - 1} \times \left(1 - B(\widehat{C}_\gamma(k))\right), \quad (12)$$

onde  $B(\widehat{C}_\gamma(k))$  representa o termo dominante de viés de  $\widehat{C}_\gamma(k)$  que terá de ser determinado, e  $[x]$  a parte inteira de  $x$ . Estes estimadores serão denotados  $\widehat{C}(k) = \widehat{C}_{\widehat{\gamma}}(k)$  e  $\widetilde{C}(k) = \widetilde{C}_{\widehat{\gamma},\widehat{\rho},\widehat{\beta}}(k)$ , onde  $\widehat{\gamma}$ ,  $\widehat{\rho}$  e  $\widehat{\beta}$  são estimadores adequados de  $\gamma$ ,  $\rho$  e  $\beta$ , respectivamente. A estimação de  $\gamma$  será feita recorrendo a um dos vários estimadores assintoticamente centrados existentes na literatura, de modo a remover a componente dominante de viés assintótico dos estimadores do parâmetro  $C$ . O segundo estimador,  $\widetilde{C}(k)$ , segue a ideia presente em Caeiro *et al.* (2004) tem também a segunda componente de viés eliminada.

**Observação 1.4.** *Será demonstrado que*

$$B(\widehat{C}_\gamma(k)) = \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^\gamma - 1} \frac{A(n/k)}{\rho}. \quad (13)$$

Na Figura 1 apresentam-se trajectórias amostrais de  $C(k)$  e  $\widehat{C}_\gamma(k)$  (sem a estimação de  $\gamma$ ) para uma amostra do modelo Burr(1,-1). Verifica-se que, a segunda trajectória amostral, relativa a um dos estimadores propostos, está muito mais próxima do verdadeiro valor  $C = 1$ .

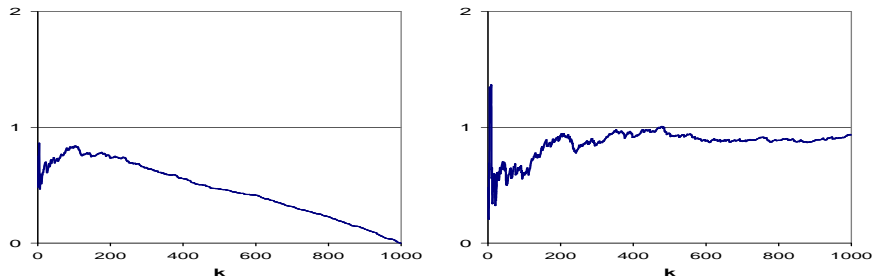


Figura 1: Trajectória amostral de  $C(k)$  (esquerda) e  $\widehat{C}_\gamma(k)$  (direita) calculada a partir de uma amostra de dimensão 1000 do modelo Burr(1,-1) com f.d.,  $F(x) = 1 - (1+x)^{-1}$ ,  $x > 0$ .

## 2 Estimação de outros parâmetros de primeira e segunda ordem

### 2.1 Estimação do índice de cauda $\gamma$

Para estimar o índice cauda,  $\gamma$  vamos considerar, nos estimadores propostos, (11) e (12), dois estimadores “assintoticamente centrados”. O primeiro é um dos estimadores Jackknife Generalizado, o segundo é o estimador de máxima verosimilhança do tipo do estimador implícito proposto por Feuerverger e Hall (1999). Estes dois estimadores foram estudados em Gomes e Martins (2002):

$$GJ(k) = \hat{\gamma}_n^{GJ(\hat{\rho})}(k) := \frac{(2 - \hat{\rho}) \frac{M_n^{(2)}(k)}{2M_n^{(1)}(k)} - 2\sqrt{\frac{M_n^{(2)}(k)}{2}}}{-\hat{\rho}} \quad (14)$$

$$ML(k) = \hat{\gamma}_n^{ML(\hat{\rho})}(k) := N_n^{(1)}(k) - N_n^{(1-\hat{\rho})}(k) \frac{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}}\right) N_n^{(1)}(k) - N_n^{(1-\hat{\rho})}(k)}{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}}\right) N_n^{(1-\hat{\rho})}(k) - N_n^{(1-2\hat{\rho})}(k)} \quad (15)$$

onde  $\hat{\rho}$  é um estimador consistente de  $\rho$ ,

$$M_n^{(\alpha)}(k) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left( \ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-k:n}} \right)^\alpha = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_{ik}^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

e

$$N_n^{(\alpha)}(k) := \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^\alpha \ln \frac{X_{n-i+1:n}}{X_{n-i:n}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{\alpha-1} U_i, \quad \alpha \geq 1.$$

**Observação 2.1.** *Seja  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma sucessão são variáveis aleatórias i.i.d. exponenciais de valor médio 1. Verificando-se a condição de variação regular de segunda ordem, (6), e para  $k$  intermédio, tem-se*

$$M_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma^\alpha \left( \Gamma(\alpha + 1) + \frac{\sigma_\alpha^{(1)} Z_k^{(\alpha)}}{\sqrt{k}} + \frac{1 - (1 - \rho)^\alpha}{\gamma \rho (1 - \rho)^\alpha} A(n/k) \right) (1 + o_p(1)),$$

$$N_n^{(\alpha)}(k) \stackrel{d}{=} \frac{\gamma}{\alpha} + \left( \frac{\gamma \bar{Z}_k^{(\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha - 1)k}} + \frac{A(n/k)}{\alpha - \rho} \right) (1 + o_p(1)),$$

onde ,

$$Z_k^{(\alpha)} := \frac{\sqrt{k}}{\sigma_\alpha^{(1)}} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E_i^\alpha - \Gamma(\alpha + 1) \right), \quad \sigma_\alpha^{(1)} := \sqrt{\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)} \quad (16)$$

e

$$\bar{Z}_k^{(\alpha)} := \sqrt{(2\alpha - 1)k} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \binom{i}{k}^{\alpha-1} E_i - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (17)$$

são assintoticamente variáveis aleatórias  $Normal(0,1)$  e  $\Gamma(\cdot)$  representa a função Gama. Sabe-se adicionalmente que as variáveis têm a seguinte estrutura de covariância

$$\begin{aligned} Cov(Z_k^{(\alpha)}, Z_k^{(\beta)}) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1) - \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\sigma_\alpha^{(1)} \sigma_\beta^{(1)}}, \\ Cov(\bar{Z}_k^{(\alpha)}, \bar{Z}_k^{(\beta)}) &= \frac{\sqrt{(2\alpha - 1)(2\beta - 1)}}{\alpha + \beta - 1}. \end{aligned}$$

No que se segue vai-se representar os dois estimadores (14) e (15) por  $\hat{\gamma}_n^{\bullet(\hat{\rho})}(k)$ , onde “ $\bullet$ ” representa “ $GJ$ ” ou “ $ML$ ”.

**Proposição 2.1.** *Admitindo que  $k$  é uma sequência intermédia e que é válida a condição de segunda ordem, (6), e que  $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$ ,*

$$\hat{\gamma}_n^{\bullet(\rho)}(k) \stackrel{d}{=} \gamma + \frac{\gamma \sigma_\bullet}{\sqrt{k}} Z_k^\bullet + o_p(A(n/k)), \quad (18)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_{GJ}^2 &:= 1 + \left( \frac{1-\rho}{\rho} \right)^2, \\ \sigma_{ML}^2 &:= \left( \frac{1-\rho}{\rho} \right)^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z_k^{GJ} &= \frac{1}{\sigma_{GJ}} \left[ \frac{(1-\rho)\sqrt{5}Z_k^{(2)} - (2-\rho)Z_k^{(1)}}{-\rho} \right], \\ Z_k^{ML} &= \frac{1}{\sigma_{ML}} \left[ \left( \frac{1-\rho}{\rho} \right)^2 \bar{Z}_k^{(1)} - \frac{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{\rho^2} \bar{Z}_k^{(1-\rho)} \right], \end{aligned}$$

são assintoticamente variáveis aleatórias normais padrão.

O seguinte corolário pode ser visto mais detalhadamente em Gomes e Martins, (2002):

**Corolário 2.1.** *Se se verificarem as condições da Proposição 2.1, a distribuição do estimador do índice de variação regular,  $\hat{\gamma}_n^{\bullet(\hat{\rho})}(k)$ , mantém-se igual à apresentada em (18), para qualquer estimador  $\hat{\rho}$  que verifique  $\hat{\rho} - \rho = o_p(1)$  independente de  $k$ .*

**2.2 Estimação dos parâmetros de segunda ordem  $\rho$  e  $\beta$**

Para a estimação do parâmetro de segunda ordem,  $\rho$ , vai-se utilizar a classe de estatísticas proposta em Fraga Alves *et al.* (2003). Sob condições de regularidade de segunda ordem é assintoticamente normais e apresenta elevada estabilidade enquanto função de  $k$ . Essa classe depende do parâmetro de controlo  $\tau \in \mathbb{R}$  e é definida por

$$\widehat{\rho}_n^{(\tau)}(k) := - \left| \frac{3(T_n^{(\tau)}(k)) - 1}{T_n^{(\tau)}(k) - 3} \right|, \tag{19}$$

onde

$$T_n^{(\tau)}(k) := \begin{cases} \frac{(M_n^{(1)}(k))^\tau - (M_n^{(2)}(k)/2)^{\tau/2}}{(M_n^{(2)}(k)/2)^{\tau/2} - (M_n^{(3)}(k)/6)^{\tau/3}}, & \text{se } \tau \neq 0, \\ \frac{\ln(M_n^{(1)}(k)) - \frac{1}{2} \ln(M_n^{(2)}(k)/2)}{\frac{1}{2} \ln(M_n^{(2)}(k)/2) - \frac{1}{3} \ln(M_n^{(3)}(k)/6)}, & \text{se } \tau = 0, \end{cases}$$

são estimadores consistentes de  $\frac{3(1-\rho)}{3-\rho}$ .

**Proposição 2.2.** *Se se verificar a condição de segunda ordem com  $\rho < 0$ , se  $k$  é intermédio e se  $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ , o estimador  $\widehat{\rho}_n^{(\tau)}(k)$  é consistente para qualquer  $\tau \in \mathbb{R}$ . É ainda possível provar que*

$$\widehat{\rho}_n^{(\tau)}(k) \stackrel{d}{=} \rho + \frac{\gamma \sigma_\rho W_k^\rho}{\sqrt{k}A(n/k)} + o_p(1).$$

com

$$\sigma_\rho^2 := \left( \frac{(1-\rho)^3}{\rho} \right)^2 (2\rho^2 - 2\rho + 1),$$

e

$$W_k^\rho := \frac{(1-\rho)^3}{\rho \sigma_\rho} \left[ (3-\rho)Q_k^{(1)} - (3-2\rho)Q_k^{(2)} + (1-\rho)Q_k^{(3)} \right],$$

$$Q_k^{(\alpha)} := \frac{\sigma_\alpha^{(1)} Z_k^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

**Observação 2.2.** *Os resultados teóricos e de simulação apresentados em Fraga Alves *et al.* (2003) e em Gomes e Martins (2002) levam a que se utilize o nível*

$$k_1 = \min(n-1, 2n/\ln \ln n) \tag{20}$$

(não é escolhido de forma óptima) e a utilização dos parâmetros de controlo  $\tau = 0$  se  $\rho \geq -1$  e  $\tau = 1$  se  $\rho < -1$ , denotando-se  $\hat{\rho} = \hat{\rho}_n^{(\tau)}(k_1)$ . Mas para dados reais é sempre aconselhável desenhar trajectórias amostrais usando vários valores de  $\tau$  e escolher a que apresentar maior estabilidade.

**Observação 2.3.** O nível  $k_1$  em (20) verifica  $\sqrt{k_1}A(n/k_1) \rightarrow \infty$ .

Para estimar o parâmetro de “escala” de segunda ordem  $\beta$ , da função  $A(t) = \gamma \beta t^\rho$ , vai-se considerar o estimador obtido em Gomes e Martins (2002). Seja  $\hat{\rho}$  o estimador proposto em (19), calculado no nível  $k_1$ . O estimador para  $\beta$  é:

$$\hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k) := \left(\frac{k}{n}\right)^{\hat{\rho}} \frac{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}}\right) N_n^{(1)}(k) - N_n^{(1-\hat{\rho})}(k)}{\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{-\hat{\rho}}\right) N_n^{(1-\hat{\rho})}(k) - N_n^{(1-2\hat{\rho})}(k)} \quad (21)$$

Também neste estimador será utilizado o nível  $k_1$ , referido em (20), denotando-se  $\hat{\beta} = \hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k_1)$ . Em seguida apresentam-se alguns resultados para este estimador.

**Proposição 2.3.** Se se verificar a condição de segunda ordem, (6), com  $A(t) = \gamma \beta t^\rho$ ,  $\rho < 0$ , se  $k = k_n$  é uma sequência intermédia, se  $\hat{\rho}$  é consistente para  $\rho$  e se  $\sqrt{k}A(n/k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ , o estimador  $\hat{\beta}$  é consistente. Pode-se ainda demonstrar que:

$$\hat{\beta}^{ML(\rho)} \stackrel{d}{=} \beta + \frac{\gamma \beta \sigma_\beta}{\sqrt{k}A(n/k)} W_k^\beta + R_k^\beta, \quad \text{com } R_k^\beta = o_p(1),$$

onde

$$W_k^\beta = \frac{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{|\rho|} \left( \frac{\bar{Z}_k^{(1)}}{1-\rho} - \frac{\bar{Z}_k^{(1-\rho)}}{\sqrt{1-2\rho}} \right)$$

é assintoticamente normal padrão, e

$$\sigma_\beta = \frac{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho}}{|\rho|}.$$

**Proposição 2.4.** Nas condições da Proposição anterior e sempre que

$$\hat{\rho} - \rho = o_p(1/\ln n), \quad n \rightarrow \infty,$$

$\hat{\beta} \equiv \hat{\beta}_n^{ML(\hat{\rho})}(k_1)$  é consistente para a estimação de  $\beta$ . Além disso tem-se

$$\hat{\beta} - \beta \sim -\beta \ln(n/k_1) (\hat{\rho} - \rho).$$



### 3 Propriedades assintóticas dos novos estimadores

Nesta secção pretende-se apresentar alguns resultados assintóticos dos estimadores do parâmetro de escala de primeira ordem. Será dado destaque ao estudo do viés e variância. Começa-se por apresentar alguns resultados fundamentais para derivar as propriedades assintóticas dos estimadores introduzidos neste trabalho.

**Proposição 3.1.** *Se  $k$  for uma seqüência intermédia e se se verificar a condição de segunda ordem, verifica-se*

$$\frac{X_{n-k:n}}{U(n/k)} \stackrel{d}{=} 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} B_k + o_p(A(n/k)), \quad (22)$$

onde  $B_k$  é uma v.a. assintoticamente normal padrão e

$$\text{Cov}(B_i, B_j) = \frac{\sqrt{i}\sqrt{j}(1-j/n)}{j-1}, \quad i < j. \quad (23)$$

*Demonstração.* Seja  $Y$  uma v.a. com distribuição Pareto, isto é, com função de distribuição  $F(y) = 1 - 1/y$ ,  $y > 1$ . Como  $X_{n-k:n} \stackrel{d}{=} U(Y_{n-k:n})$ , podemos utilizar a condição de segunda ordem, (6), com  $t = n/k$  e  $x = \frac{k}{n} Y_{n-k:n}$ , resultando

$$\frac{X_{n-k:n}}{U(n/k)} \stackrel{d}{=} \left( \frac{k}{n} Y_{n-k:n} \right)^\gamma \left[ 1 + \frac{\left( \frac{k}{n} Y_{n-k:n} \right)^\rho - 1}{\rho} A(Y_{n-k:n}) (1 + o(1)) \right]$$

Como  $\frac{k}{n} Y_{n-k:n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$  e  $x^\alpha = 1 + \alpha(x-1) + o(x)$ ,  $x \rightarrow 1$ , temos agora que

$$\begin{aligned} \frac{X_{n-k:n}}{U(n/k)} &\stackrel{d}{=} (1 + \gamma \left( \frac{k}{n} Y_{n-k:n} - 1 \right)) \left[ 1 + \left( \frac{k}{n} Y_{n-k:n} - 1 \right) A(Y_{n-k:n}) (1 + o_p(1)) \right] \\ &\stackrel{d}{=} 1 + \gamma \left( \frac{k}{n} Y_{n-k:n} - 1 \right) + o_p(A(n/k)) = 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} B_k + o_p(A(n/k)) \end{aligned}$$

A justificação da normalidade assintótica da v.a.  $B_k = \sqrt{k} \left( \frac{k}{n} Y_{n-k:n} - 1 \right)$  encontra-se, por exemplo, em Arnold *et al.* (1992) ou em Falk (1989). Utilizando algumas propriedades das estatísticas ordinais, de v.a. com distribuição Pareto, calcula-se facilmente a covariância indicada em (23).  $\square$

**Corolário 3.1.** *Nas condições da proposição anterior tem-se para modelos  $F$  pertencentes à classe de Hall, (7),*

$$\frac{X_{n-k:n}}{(n/k)^\gamma} \stackrel{d}{=} C \left( 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} B_k + \frac{A(n/k)}{\rho} + o_p(A(n/k)) \right). \quad (24)$$

Na Proposição que se segue vai-se estudar o comportamento assintótico da variável aleatória baseada nos espaçamentos,  $X_{n-[k\theta]:n} - X_{n-k:n}$ ,

$$\widehat{C}^{(\theta)}(k) \equiv \widehat{C}_\gamma^{(\theta)}(k) := \left(\frac{k}{n}\right)^\gamma \frac{X_{n-[k\theta]:n} - X_{n-k:n}}{\theta^{-\gamma} - 1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (25)$$

que generaliza  $\widehat{C}(k)$  em (11).

**Proposição 3.2.** *Admita-se válida a condição de segunda ordem, (6), que  $k$  é uma sequência intermédia e  $F$  um modelo pertencente à classe de Hall, com os parâmetros  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\rho$  conhecidos. Nestas condições verifica-se que:*

$$\widehat{C}^{(\theta)}(k) \stackrel{d}{=} C \left( 1 + \frac{\gamma \sigma_{C,\theta}}{\sqrt{k}} Z_{k,\theta}^C + \frac{\theta^{-(\gamma+\rho)} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} + o_p(A(n/k)) \right) \quad (26)$$

onde

$$\sigma_{C,\theta}^2 = 1 + (\theta^{-1} - 1) \left( \frac{\theta^{-\gamma}}{\theta^{-\gamma} - 1} \right)^2 \quad (27)$$

e

$$Z_{k,\theta}^C = \frac{\theta^{-(\gamma+1/2)} B_{k\theta} - B_k}{\sigma_C(\theta^{-\gamma} - 1)} \quad (28)$$

é assintoticamente normal padrão.

*Demonstração.*

Utilizando o resultado (24) apresentado no Corolário 3.1 e o facto de nos modelos pertencentes à classe de Hall,  $A(n/k\theta) \sim \theta^{-\rho} A(n/k)$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{C}^{(\theta)}(k) &= \frac{1}{\theta^{-\gamma} - 1} \left( \frac{X_{n-k\theta:n}}{\left(\frac{n}{k\theta}\right)^\gamma} \theta^{-\gamma} - \frac{X_{n-k:n}}{\left(\frac{n}{k}\right)^\gamma} \right) \\ &\stackrel{d}{=} \frac{C \left[ \left( 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k\theta}} B_{k\theta} + \frac{A(n/k\theta)}{\rho} \right) \theta^{-\gamma} - 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{k}} B_k - \frac{A(n/k)}{\rho} \right]}{\theta^{-\gamma} - 1} (1 + o_p(1)) \\ &= C \left( 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \frac{\theta^{-(\gamma+1/2)} B_{k\theta} - B_k}{\theta^{-\gamma} - 1} + \frac{\theta^{-(\gamma+\rho)} - 1}{\theta^{-\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} + o_p(A(n/k)) \right). \end{aligned}$$

Como  $Cov(B_{k\theta}, B_k) = \frac{\sqrt{k\theta}\sqrt{k}(1-k/n)}{k-1} \sim \sqrt{\theta}$ , resulta que

$$\sigma_{C,\theta}^2 = V(Z_{k,\theta}^C) = \frac{\theta^{-(2\gamma+1)} - 2\theta^{-\gamma} + 1}{(\theta^{-\gamma} - 1)^2} = 1 + (\theta^{-1} - 1) \left( \frac{\theta^{-\gamma}}{\theta^{-\gamma} - 1} \right)^2$$

e conclui-se que a representação em distribuição (26) é verdadeira.  $\square$

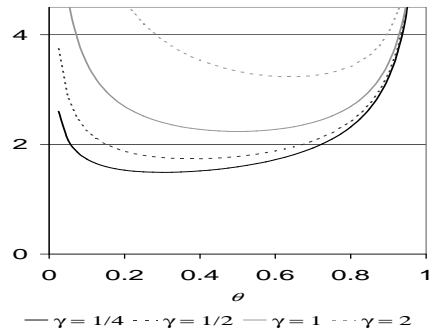


Figura 2: Gráfico de  $\gamma\sigma_C$  para vários valores de  $\gamma$  e  $\theta$ .

A Figura 2 apresenta, para vários valores de  $\gamma$  e  $\tau$  o desvio padrão de  $\widehat{C}^{(\theta)}(k)$ . Pode-se verificar no gráfico que o valor de  $\theta$  que minimiza o desvio padrão não é sempre o mesmo, isto é, depende de  $\gamma$ . No que se segue considera-se  $\theta = 1/2$  já que este parece ser um valor que permite obter um desvio padrão próximo do valor mínimo (para os valores de  $\gamma$  apresentados).

**Corolário 3.2.** *Nas condições da proposição anterior,*

$$\sqrt{k} \left( \frac{\widehat{C}_\gamma(k) - C}{C} \right) \stackrel{d}{=} \gamma\sigma_C Z_k^C + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^\gamma - 1} \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)), \quad (29)$$

e

$$\sqrt{k} \left( \frac{\widetilde{C}_{\gamma,\rho,\beta}(k) - C}{C} \right) \stackrel{d}{=} \gamma\sigma_C Z_k^C + o_p(\sqrt{k}A(n/k)), \quad (30)$$

onde

$$\sigma_C = \sqrt{1 + \left( \frac{2^\gamma}{2^\gamma - 1} \right)^2}, \quad (31)$$

e

$$Z_k^C = \frac{2^{\gamma+1/2}B_{k/2} - B_k}{\sigma_C(2^\gamma - 1)}, \quad (32)$$

é assintoticamente normal padrão.

*Demonstração.* O primeiro resultado é uma consequência imediata da proposição anterior.

Como o termo dominante de viés de  $\widehat{C}_\gamma(k)$  é  $\frac{2^{\gamma+\rho}-1}{2^\gamma-1} \frac{A(n/k)}{\rho}$ , resulta que

$$\widetilde{C}_{\gamma,\rho,\beta}(k) \stackrel{d}{=} C \left( 1 + \frac{\gamma\sigma_C}{\sqrt{k}} Z_k^C + o_p(A(n/k)) \right)$$

e o resultado (30) é imediato.  $\square$

**Teorema 3.1.** *Nas condições da Proposição 3.2, e admitindo que  $\gamma$  é estimado através de um dos estimadores assintoticamente centrados e que  $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow \lambda$  (finito), eventualmente não nulo,*

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\ln n} \left( \frac{\widehat{C}(k) - C}{C} \right) &\stackrel{d}{=} \left( \frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \gamma \sigma_{\bullet} Z_k^{\bullet} + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{(2^{\gamma} - 1)\rho} \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{\ln n} \\ &+ o_p \left( \frac{\sqrt{k}A(n/k) \ln k}{\ln n} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

*Demonstração.* Aplicando o resultado indicado no Corolário 2.1 tem-se que  $\widehat{\gamma}^{\bullet} := \widehat{\gamma}^{\bullet(\rho)} \stackrel{d}{=} \widehat{\gamma}^{\bullet(\rho)}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \widehat{C}(k) &\stackrel{d}{=} \frac{1}{2^{\widehat{\gamma}^{\bullet}} - 1} \left( \frac{X_{n-k/2:n}}{\left(\frac{2n}{k}\right)^{\gamma}} 2^{\gamma} - \frac{X_{n-k:n}}{\left(\frac{n}{k}\right)^{\gamma}} \right) \left( \frac{k}{n} \right)^{\widehat{\gamma}^{\bullet} - \gamma} \\ &= C \frac{2^{\gamma} - 1}{2^{\widehat{\gamma}^{\bullet}} - 1} \left( 1 + \frac{\gamma \sigma_C}{\sqrt{k}} Z_k^C + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^{\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} (1 + o_p(1)) \right) e^{-(\widehat{\gamma}^{\bullet} - \gamma) \ln(n/k)} \end{aligned}$$

Aplicando a expansão resultante da aplicação do método delta,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{\widehat{\gamma}^{\bullet}} - 1} &= g(\widehat{\gamma}^{\bullet}) \sim g(\gamma) + g'(\gamma)(\widehat{\gamma}^{\bullet} - \gamma) = \frac{1}{2^{\gamma} - 1} - \frac{2^{\gamma} \ln 2}{(2^{\gamma} - 1)^2} (\widehat{\gamma}^{\bullet} - \gamma) \\ &= \frac{1}{2^{\gamma} - 1} \left( 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \frac{2^{\gamma} (\ln 2) \sigma_{\bullet}}{2^{\gamma} - 1} Z_k^{\bullet} + o_p(A(n/k)) \right), \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} \widehat{C}(k) &\stackrel{d}{=} C \frac{2^{\gamma} - 1}{2^{\gamma} - 1} \left( 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \frac{2^{\gamma} \ln 2 \sigma_{\bullet}}{2^{\gamma} - 1} Z_k^{\bullet} + o_p(A(n/k)) \right) (1 - (\widehat{\gamma}^{\bullet} - \gamma) \ln(n/k)) \\ &\times \left( 1 + \frac{\gamma \sigma_C}{\sqrt{k}} Z_k^C + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^{\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} + o_p(A(n/k)) \right) \\ &= C \left( 1 - \ln(n/k) \frac{\gamma \sigma_{\bullet}}{\sqrt{k}} Z_k^{\bullet} + o_p(\ln(n/k) A(n/k)) \right) \\ &\times \left( 1 + \frac{\gamma \sigma_C}{\sqrt{k}} Z_k^C + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^{\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} + o_p(A(n/k)) \right) \\ &= C \left( 1 - \ln(n/k) \frac{\gamma \sigma_{\bullet}}{\sqrt{k}} Z_k^{\bullet} + \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^{\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} + o_p(\ln(n/k) A(n/k)) \right) \end{aligned}$$

Efectuando alguma operações elementares obtem-se a representação em distribuição (33).  $\square$

Conclui-se que este estimador apresenta uma velocidade de convergência igual à do estimador proposto por Hall e Welsh, (8). No entanto em relação ao viés pode-se ter a componente dominante nula se  $\gamma + \rho = 0$ .

**Teorema 3.2.** *Nas condições do teorema anterior,*

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln n} \left( \frac{\tilde{C}(k) - C}{C} \right) \stackrel{d}{=} \left( \frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \gamma \sigma_{\bullet} Z_k^{\bullet} - \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{(2^{\gamma} - 1)\rho} \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{\ln n} (\hat{\rho} - \rho) \ln(k_1/k)$$

*Demonstração.* Usando mais uma vez o método delta,

$$\begin{aligned} \frac{2^{\hat{\gamma}^{\bullet} + \hat{\rho}} - 1}{2^{\hat{\gamma}^{\bullet}} - 1} \frac{\hat{\gamma} \hat{\beta}}{\hat{\rho}} \left( \frac{n}{k} \right)^{\hat{\rho}} &= \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^{\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} \times \\ &\times \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\gamma 2^{\gamma} (2^{\rho} - 1)}{(2^{\gamma} - 1)(2^{\gamma+\rho} - 1)} \right) \left( \frac{\hat{\gamma}^{\bullet} - \gamma}{\gamma} \right) + \frac{\hat{\beta} - \beta}{\beta} + (\hat{\rho} - \rho) \ln(n/k) \right] \\ &\sim \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^{\gamma} - 1} \cdot \frac{A(n/k)}{\rho} [1 + (\hat{\rho} - \rho) \ln(k_1/k)] \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{C}(k) = \tilde{C}_{\hat{\gamma}^{\bullet}, \hat{\beta}, \hat{\rho}} &= \hat{C}(k) \left( 1 - \frac{2^{\hat{\gamma}^{\bullet} + \hat{\rho}} - 1}{2^{\hat{\gamma}^{\bullet}} - 1} \frac{\hat{\gamma} \hat{\beta}}{\hat{\rho}} \left( \frac{n}{k} \right)^{\hat{\rho}} \right) \\ &\stackrel{d}{=} \hat{C}(k) \left( 1 - \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^{\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} \right) - \hat{C}(k) \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{2^{\gamma} - 1} \frac{A(n/k)}{\rho} (\hat{\rho} - \rho) \ln(k_1/k) \end{aligned}$$

Resulta assim que

$$\frac{\sqrt{k}}{\ln n} \left( \frac{\tilde{C}(k) - C}{C} \right) \stackrel{d}{=} \left( \frac{\ln k}{\ln n} - 1 \right) \gamma \sigma_{\bullet} Z_k^{\bullet} - \frac{2^{\gamma+\rho} - 1}{(2^{\gamma} - 1)\rho} \frac{\sqrt{k}A(n/k)}{\ln n} (\hat{\rho} - \rho) \ln(k_1/k)$$

□

Mais uma vez a velocidade de convergência igual à do estimador anterior e à do estimador proposto por Hall e Welsh, (8). No entanto em relação ao viés, a componente dominante é sempre nula.

#### 4 Propriedades para amostras de dimensão finita

Os resultados desta secção baseiam-se em simulações com 10000 amostras de dimensão  $n$  (com  $n$  a variar entre 100 e 25000), para o seguinte conjunto de estimadores:

$$\begin{array}{lll} C_1 := C_{H(k)} & C_3 := \hat{C}_{ML(k)} & C_5 := \hat{C}_{GJ(k)} \\ C_2 := C_{H(\hat{k}_0)} & C_4 := \tilde{C}_{ML(k)} & C_6 := \tilde{C}_{GJ(k)} \end{array}$$

Todos os parâmetros foram estimados usando os estimadores apresentados neste trabalho. No estimador clássico, (8), optou-se por utilizar o estimador de Hill no mesmo nível ( $C_1$ ) e o estimador de Hill no nível fixo estimado  $k_0$  ( $C_2$ ). Nos novos estimadores presentes neste trabalho, os parâmetros de segunda ordem  $\rho$  e  $\beta$  foram estimados no nível fixo  $k_1$ , (20), enquanto que o parâmetro de primeira ordem,  $\gamma$  foi estimado através dos estimadores ML, (15), ( $C_3$  e  $C_4$ ) ou Jackknife Generalizado, (14), ( $C_5$  e  $C_6$ ). Devido ao elevado número de estimadores em estudo e à semelhança existente entre algumas trajectórias, as próximas figuras apenas apresentam as trajectórias amostrais, do valor esperado simulado e erro médio quadrático simulados, dos estimadores  $C_1$ ,  $C_3$  e  $C_4$ .

O estudo visou a simulação do valor médio ( $E$ ), erro médio quadrático ( $MSE$ ) e nível óptimo ( $k_0 = \arg \min_k MSE(k)$ ) para os seguintes modelos:

1. modelo Fréchet,  $F(x) = \exp(-x^{-1/\gamma})$ ,  $x > 0$ , com  $\gamma = 0.5, 1, 2$  ( $\rho = -1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $C = 1$ );
2. modelo Burr,  $F(x) = 1 - (1 + x^{-\rho/\gamma})^{1/\rho}$ ,  $x > 0$ , com  $\gamma = 1$  e  $\rho = -0.5, -1, -2$  ( $\beta = 1$ ,  $C = 1$ );
3. modelo Cauchy,  $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $\gamma = 1$ ,  $\rho = -2$ ,  $\beta = \frac{2}{3}\pi^2$  e  $C = \frac{1}{\pi}$ .

**Observação 4.1.** *O modelo Cauchy corresponde ao modelo  $t$  com 1 grau de liberdade. O modelo  $t$  com  $\nu$  graus de liberdade também pertence à classe de Hall, (7). Utilizando resultados presentes em Abramowitz e Stegun (1970), relativos à função de distribuição deste modelo, é possível demonstrar que*

$$U(t) \sim C_\nu t^{1/\nu} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\nu+1}{\nu+2} \right) \left( \frac{\nu!!\tau}{(\nu-1)!!} \right)^{2/\nu} t^{-2/\nu} (1 + o(1)) \right], \quad t \rightarrow \infty$$

onde  $!!$  representa o duplo factorial definido por

$$n!! = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \{-1, 0, 1\}; \\ n(n-2)!!, & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \end{cases}$$

e,  $C_\nu = \left( \frac{(\nu-1)!!\nu^{\nu/2}}{\nu!!\tau} \right)^{1/\nu}$ , onde  $\tau = \pi$  se  $\nu$  é ímpar ou  $\tau = 2$  se  $\nu$  é par.

Nas Tabelas 1 - 4 apresenta-se a fracção óptima, valor médio e erro médio quadrático simulado para os modelos estudados. São apresentadas nas Figuras 3 - 9 trajectórias amostrais do valor médio e erro médio quadrático simulado para amostras de dimensão 5000 dos modelos em estudo.

Tabela 1: Fracção óptima da amostra para os modelos Burr e Fréchet

	100	500	1000	2000	5000	10000	25000
<b>modelo Burr(1,-0.5)</b>							
$C_1$	0.0960	0.0462	0.0345	0.0254	0.0160	0.0117	0.0074
$C_2$	0.1180	0.0558	0.0417	0.0301	0.0200	0.0149	0.0099
$C_3$	0.4360	0.2276	0.1810	0.1354	0.0971	0.0733	0.0506
$C_4$	0.4520	0.2516	0.1996	0.1449	0.1070	0.0813	0.0555
$C_5$	0.5190	0.2572	0.5944	<b>0.9929</b>	0.9882	<b>0.9866</b>	<b>0.9848</b>
$C_6$	<b>0.5180</b>	<b>0.2788</b>	<b>0.2122</b>	0.1562	<b>0.1214</b>	0.0913	0.0663
<b>modelo Burr(1,-1)</b>							
$C_1$	0.2230	0.1394	0.1119	0.0863	0.0671	0.0534	0.0408
$C_2$	0.2600	0.1698	0.1408	0.1148	0.0854	0.0692	0.0534
$C_3$	<b>0.9800</b>	<b>0.9776</b>	<b>0.9004</b>	<b>0.9001</b>	<b>0.8892</b>	<b>0.8164</b>	<b>0.6356</b>
$C_4$	0.9800	0.9304	0.7162	0.6746	0.6013	0.5305	0.4025
$C_5$	0.7220	0.6764	0.6024	0.5820	0.5519	0.5089	0.4401
$C_6$	0.8180	0.6816	0.5624	0.5281	0.4930	0.4517	0.3751
<b>modelo Burr(1,-2)</b>							
$C_1$	0.4150	0.3182	0.2798	0.2467	0.2040	0.1812	0.1540
$C_2$	0.3980	0.2712	0.2336	0.2106	0.1842	0.1500	0.1223
$C_3$	0.7900	0.6432	0.5750	0.5205	0.4683	0.4063	0.3490
$C_4$	0.9420	0.9048	0.8852	0.8649	<b>0.8004</b>	<b>0.7531</b>	<b>0.7027</b>
$C_5$	0.9900	0.9960	0.9970	0.9975	0.9980	0.9983	0.9365
$C_6$	<b>0.9800</b>	<b>0.9692</b>	<b>0.9616</b>	<b>0.9453</b>	<b>0.8690</b>	0.8088	0.7300
<b>modelo Fréchet(0.5)</b>							
$C_1$	0.3210	0.2006	0.1673	0.1317	0.0989	0.0816	0.0634
$C_2$	0.3740	0.2286	0.1600	0.1129	0.0861	0.0659	0.0476
$C_3$	0.6960	0.5172	0.4552	0.4054	0.3204	0.2945	0.2945
$C_4$	<b>0.8520</b>	<b>0.8584</b>	<b>0.8654</b>	<b>0.8423</b>	<b>0.7759</b>	<b>0.7462</b>	<b>0.7222</b>
$C_5$	0.7040	0.5316	0.4866	0.4300	0.3346	0.3051	0.2409
$C_6$	0.8260	0.8336	0.8566	0.8335	0.7681	0.7299	0.7166
<b>modelo Fréchet(1)</b>							
$C_1$	<b>0.3240</b>	0.2014	0.1670	0.1333	0.0999	0.0816	0.0634
$C_2$	0.3830	0.2428	0.1883	0.1316	0.0982	0.0687	0.0476
$C_3$	0.8720	0.7724	0.7342	0.7146	<b>0.6486</b>	<b>0.6155</b>	<b>0.5740</b>
$C_4$	0.8920	<b>0.8376</b>	<b>0.8362</b>	<b>0.8397</b>	0.7810	0.7694	0.7561
$C_5$	0.8420	0.7700	0.7436	0.7216	0.6505	0.6193	0.5758
$C_6$	0.8700	0.8328	0.8342	0.8353	0.7755	0.7485	0.7448
<b>modelo Fréchet(2)</b>							
$C_1$	0.3460	0.2072	0.1703	0.1374	0.1014	0.0815	0.0636
$C_2$	0.4150	0.2554	0.2032	0.1681	0.1224	0.0911	0.0488
$C_3$	<b>0.9800</b>	<b>0.9980</b>	0.9990	0.9995	0.4172	0.3381	0.2532
$C_4$	0.9800	0.9776	<b>0.9738</b>	<b>0.9945</b>	<b>0.9950</b>	<b>0.9969</b>	<b>0.9979</b>
$C_5$	0.9190	0.9900	0.9987	0.9987	0.4472	0.3599	0.2754
$C_6$	0.9610	0.9384	0.9394	0.9548	0.9321	0.9114	0.9730

Tabela 2: Valores esperados simulados para os modelos Burr e Fréchet

	100	500	1000	2000	5000	10000	25000
<b>modelo Burr(1,-0.5)</b>							
$C_1$	0.3652	0.4659	0.4933	0.5298	0.5902	0.6191	0.6668
$C_2$	0.1799	0.2636	0.3028	0.3413	0.4055	0.4497	0.5066
$C_3$	0.4369	0.5391	0.5617	0.5977	0.6429	0.6804	0.7228
$C_4$	0.4832	0.5548	0.5800	0.6181	0.6603	0.6973	0.7391
$C_5$	0.4866	0.5856	0.5968	<b>0.6942</b>	0.7011	<b>0.7757</b>	<b>0.8563</b>
$C_6$	<b>0.5336</b>	<b>0.6029</b>	<b>0.6319</b>	0.6616	<b>0.6875</b>	0.7213	0.7499
<b>modelo Burr(1,-1)</b>							
$C_1$	0.6758	0.7633	0.7978	0.8325	0.8588	0.8817	0.9032
$C_2$	0.6544	0.7620	0.8004	0.8259	0.8589	0.8815	0.9046
$C_3$	<b>1.1669</b>	<b>1.1487</b>	<b>1.1407</b>	<b>1.1057</b>	<b>1.0731</b>	<b>1.0595</b>	<b>1.0442</b>
$C_4$	1.2340	1.2407	1.2304	1.1630	1.1061	1.0847	1.0614
$C_5$	1.4328	1.2268	1.1866	1.1301	1.0851	1.0660	1.0475
$C_6$	1.4045	1.2883	1.2539	1.1743	1.1135	1.0900	1.0652
<b>modelo Burr(1,-2)</b>							
$C_1$	0.8656	0.9146	0.9309	0.9442	0.9595	0.9666	0.9741
$C_2$	0.8387	0.8954	0.9135	0.9300	0.9497	0.9611	0.9709
$C_3$	1.2306	1.1047	1.0766	1.0603	1.0500	1.0368	1.0261
$C_4$	1.0933	1.0329	1.0230	1.0155	<b>1.0062</b>	<b>1.0023</b>	<b>0.9994</b>
$C_5$	1.1692	1.0354	1.0143	1.0034	1.0056	1.0019	1.0045
$C_6$	<b>0.9841</b>	<b>0.9762</b>	<b>0.9805</b>	<b>0.9860</b>	<b>0.9973</b>	0.9981	0.9979
<b>modelo Fréchet(0.5)</b>							
$C_1$	0.8628	0.9066	0.9195	0.9335	0.9471	0.9547	0.9626
$C_2$	0.8587	0.9044	0.9228	0.9327	0.9448	0.9533	0.9618
$C_3$	1.3775	1.1513	1.1160	1.0890	1.0618	1.0538	1.0538
$C_4$	<b>1.1035</b>	<b>1.0063</b>	<b>1.0004</b>	<b>0.9981</b>	<b>0.9973</b>	<b>0.9969</b>	<b>0.9982</b>
$C_5$	1.5164	1.1815	1.1425	1.1078	1.0734	1.0621	1.0451
$C_6$	1.1494	1.0005	0.9971	0.9938	0.9949	0.9930	0.9963
<b>modelo Fréchet(1)</b>							
$C_1$	<b>0.7575</b>	0.8290	0.8513	0.8745	0.8987	0.9135	0.9280
$C_2$	0.7478	0.8201	0.8488	0.8704	0.8926	0.9103	0.9263
$C_3$	1.2736	1.0881	1.0627	1.0411	<b>1.0238</b>	<b>1.0172</b>	<b>1.0107</b>
$C_4$	1.2196	<b>1.0274</b>	<b>1.0156</b>	<b>0.9980</b>	0.9898	0.9913	0.9928
$C_5$	1.4063	1.1022	1.0727	1.0471	1.0276	1.0206	1.0133
$C_6$	1.2858	1.0332	1.0170	0.9959	0.9884	0.9864	0.9889
<b>modelo Fréchet(2)</b>							
$C_1$	0.5895	0.7033	0.7378	0.7724	0.8153	0.8420	0.8653
$C_2$	0.5722	0.6855	0.7283	0.7519	0.7943	0.8253	0.8625
$C_3$	<b>0.8995</b>	<b>0.8178</b>	0.8134	0.7965	0.8486	0.8713	0.8991
$C_4$	1.2862	1.0253	<b>1.0079</b>	<b>0.9794</b>	<b>0.9735</b>	<b>0.9808</b>	<b>0.9877</b>
$C_5$	1.0821	0.8383	0.8613	0.8117	0.8486	0.8737	0.8989
$C_6$	1.4382	1.0218	0.9975	0.9461	0.9296	0.9288	0.9549



Tabela 3: Erro médio quadrático simulado para os modelos Burr e Fréchet.

	100	500	1000	2000	5000	10000	25000
<b>modelo Burr(1,-0.5)</b>							
$C_1$	0.5586	0.4210	0.3714	0.3221	0.2611	0.2226	0.1783
$C_2$	0.6886	0.5559	0.4990	0.4456	0.3662	0.3148	0.2541
$C_3$	0.4511	0.3271	0.2830	0.2411	0.1935	0.1601	0.1235
$C_4$	0.3852	0.2836	0.2469	0.2135	0.1708	0.1403	0.1087
$C_5$	0.4224	0.2911	0.2484	<b>0.1604</b>	0.1563	<b>0.1161</b>	<b>0.0696</b>
$C_6$	<b>0.3517</b>	<b>0.2490</b>	<b>0.2164</b>	0.1898	<b>0.1530</b>	0.1271	0.0993
<b>modelo Burr(1,-1)</b>							
$C_1$	0.1946	0.1031	0.0774	0.0580	0.0393	0.0287	0.0188
$C_2$	0.1923	0.0996	0.0749	0.0558	0.0385	0.0282	0.0185
$C_3$	<b>0.1663</b>	<b>0.0464</b>	<b>0.0343</b>	<b>0.0189</b>	<b>0.0091</b>	<b>0.0060</b>	<b>0.0036</b>
$C_4$	0.1779	0.0815	0.0736	0.0396	0.0194	0.0128	0.0075
$C_5$	0.8183	0.1368	0.0855	0.0426	0.0192	0.0114	0.0060
$C_6$	0.4879	0.1450	0.1099	0.0564	0.0271	0.0171	0.0093
<b>modelo Burr(1,-2)</b>							
$C_1$	0.0507	0.0193	0.0127	0.0083	0.0047	0.0031	0.0018
$C_2$	0.0557	0.0202	0.0133	0.0090	0.0052	0.0034	0.0019
$C_3$	0.2021	0.0434	0.0246	0.0150	0.0084	0.0051	0.0027
$C_4$	0.0682	0.0122	0.0061	0.0035	<b>0.0020</b>	<b>0.0012</b>	<b>0.0006</b>
$C_5$	0.1227	0.0173	0.0083	0.0061	0.0062	0.0052	0.0036
$C_6$	<b>0.0428</b>	<b>0.0077</b>	<b>0.0040</b>	<b>0.0028</b>	<b>0.0020</b>	0.0013	0.0007
<b>modelo Fréchet(0.5)</b>							
$C_1$	0.0342	0.0165	0.0121	0.0089	0.0058	0.0041	0.0027
$C_2$	0.0347	0.0164	0.0119	0.0090	0.0060	0.0043	0.0027
$C_3$	0.4693	0.0801	0.0454	0.0268	0.0142	0.0088	0.0088
$C_4$	<b>0.1094</b>	<b>0.0143</b>	<b>0.0069</b>	<b>0.0043</b>	<b>0.0026</b>	<b>0.0016</b>	<b>0.0008</b>
$C_5$	0.8606	0.0993	0.0553	0.0327	0.0174	0.0107	0.0058
$C_6$	0.1855	0.0178	0.0086	0.0054	0.0032	0.0020	0.0010
<b>modelo Fréchet(1)</b>							
$C_1$	<b>0.1059</b>	0.0552	0.0415	0.0312	0.0207	0.0150	0.0099
$C_2$	0.1075	0.0551	0.0410	0.0319	0.0219	0.0158	0.0102
$C_3$	0.3553	0.0529	0.0266	0.0147	<b>0.0077</b>	<b>0.0044</b>	<b>0.0021</b>
$C_4$	0.3061	<b>0.0380</b>	<b>0.0180</b>	<b>0.0119</b>	0.0083	0.0054	0.0029
$C_5$	0.8080	0.0660	0.0323	0.0177	0.0094	0.0053	0.0025
$C_6$	0.4763	0.0462	0.0217	0.0144	0.0100	0.0064	0.0034
<b>modelo Fréchet(2)</b>							
$C_1$	0.2768	0.1606	0.1254	0.0983	0.0679	0.0509	0.0344
$C_2$	0.2788	0.1615	0.1251	0.1014	0.0726	0.0543	0.0361
$C_3$	<b>0.2263</b>	<b>0.0654</b>	0.0500	0.0509	0.0460	0.0343	0.0223
$C_4$	0.6815	0.0791	<b>0.0371</b>	<b>0.0270</b>	<b>0.0225</b>	<b>0.0156</b>	<b>0.0090</b>
$C_5$	0.7282	0.0858	0.0565	0.0613	0.0473	0.0351	0.0232
$C_6$	1.2364	0.1025	0.0474	0.0364	0.0306	0.0225	0.0141

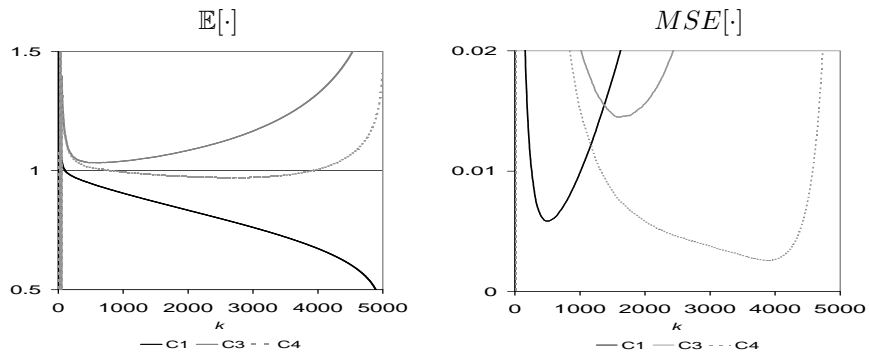


Figura 3: Modelo *Fréchet*(0.5)

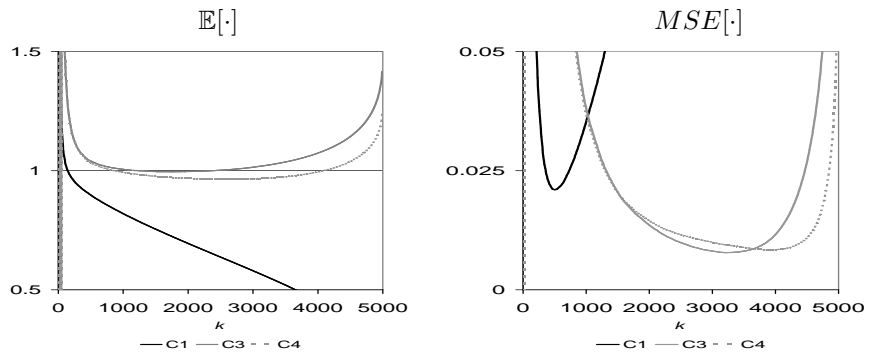


Figura 4: Modelo *Fréchet*(1)

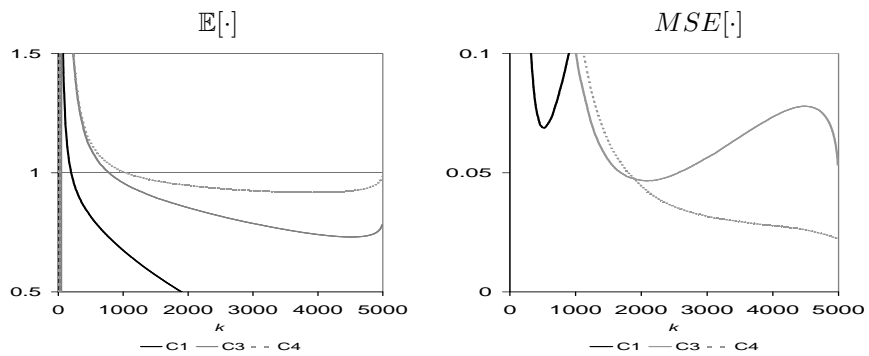


Figura 5: Modelo *Fréchet*(2)

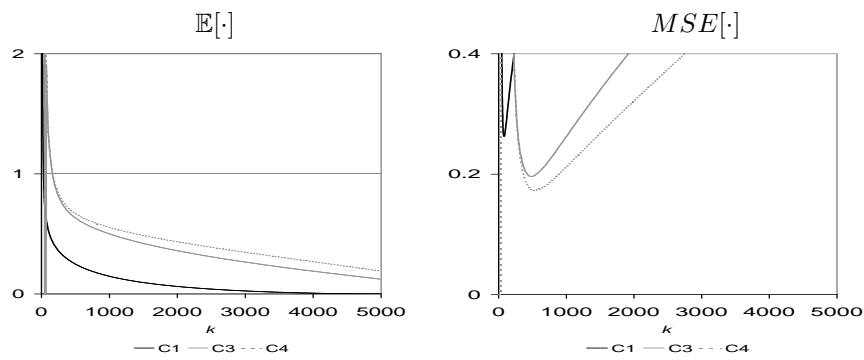


Figura 6: Modelo  $Burr(1,-0.5)$

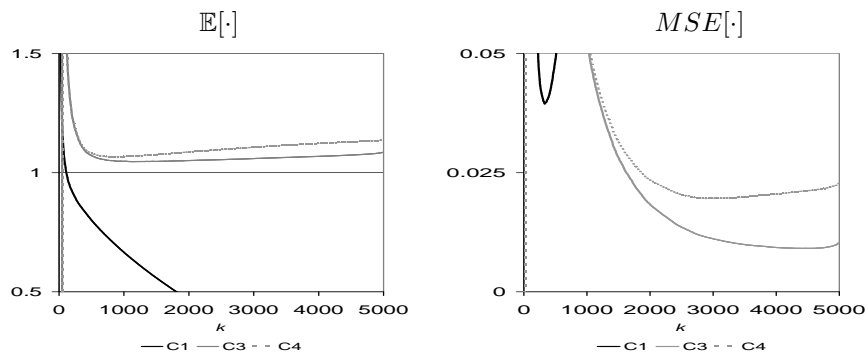


Figura 7: Modelo  $Burr(1,-1)$

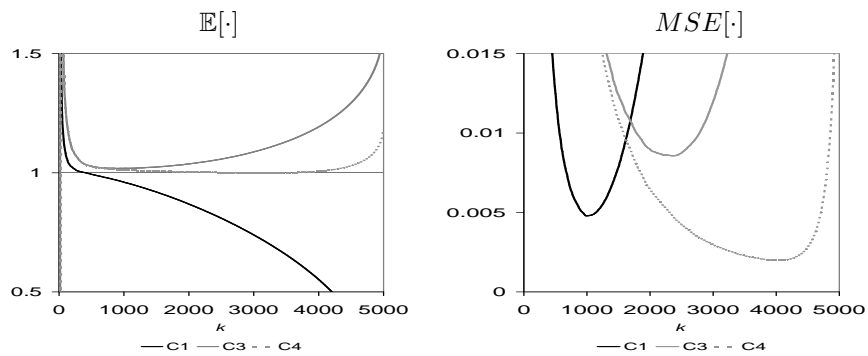
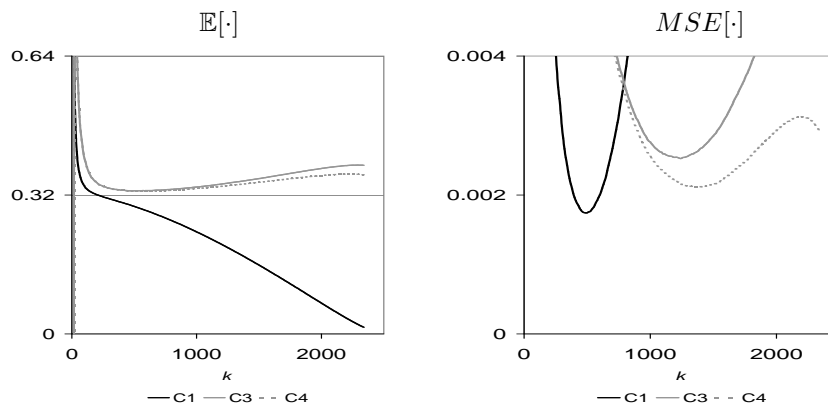


Figura 8: Modelo  $Burr(1,-2)$

Tabela 4: Fração óptima da amostra, valor médio e erro médio quadrático simulados para o modelo Cauchy.

k0	100	500	1000	2000	5000	10000	25000
	$k_0$						
$C_1$	<b>0.2140</b>	0.1584	0.1362	0.1178	0.0991	0.0867	<b>0.0714</b>
$C_2$	0.3600	0.2468	0.2139	0.1745	0.1264	0.0857	0.1314
$C_3$	0.4220	0.4332	0.4516	0.3137	0.2428	0.1850	0.1102
$C_4$	0.4220	0.4352	0.4518	0.4646	0.2690	0.2003	0.0846
$C_5$	0.4300	0.4344	0.4400	0.4454	0.4554	0.4770	0.1140
$C_6$	0.4260	<b>0.4296</b>	<b>0.4346</b>	<b>0.4382</b>	<b>0.4454</b>	<b>0.4716</b>	0.0912
	$E$						
$C_1$	<b>0.2360</b>	0.2673	0.2783	0.2868	0.2943	0.2992	<b>0.3045</b>
$C_2$	0.1650	0.1179	0.1523	0.1915	0.2391	0.2779	0.3021
$C_3$	0.3687	0.3691	0.3674	0.3537	0.3455	0.3450	0.3630
$C_4$	0.3542	0.3555	0.3532	0.3540	0.3442	0.3430	0.3902
$C_5$	0.3234	0.3276	0.3226	0.3202	0.3201	0.3250	0.3620
$C_6$	0.3188	<b>0.3219</b>	<b>0.3178</b>	<b>0.3164</b>	<b>0.3184</b>	<b>0.3228</b>	0.3951
	$MSE$						
$C_1$	<b>0.0201</b>	0.0073	0.0047	0.0031	0.0017	0.0011	<b>0.0006</b>
$C_2$	0.0460	0.0411	0.0281	0.0165	0.0066	0.0020	0.0013
$C_3$	0.0500	0.0088	0.0053	0.0039	0.0025	0.0023	0.0069
$C_4$	0.0442	0.0071	0.0038	0.0026	0.0021	0.0020	0.0157
$C_5$	0.0409	0.0061	0.0028	0.0014	0.0007	0.0013	0.0075
$C_6$	0.0371	<b>0.0054</b>	<b>0.0025</b>	<b>0.0013</b>	<b>0.0006</b>	<b>0.0009</b>	0.0173

Figura 9: Modelo *Cauchy* ( $n=5000$ )

## 5 Considerações finais

Os estimadores aqui introduzidos, para o parâmetro de escala de primeira ordem, apresentam trajectórias amostrais muito mais estáveis que as do estimador clássico. Isto significa que os novos estimadores apresentam um termo de viés muito inferior ao do estimador clássico. A estabilidade das trajectórias amostrais torna menos relevante a escolha do nível  $k$ . Apenas para modelos com valores de  $\rho$  próximos de 0, como no caso do modelo Burr(1,-0.5), os novos estimadores, embora consigam reduzir o erro médio quadrático, apresentam trajectórias amostrais semelhantes à do estimador clássico.

O padrão do erro médio quadrático dos novos estimadores exhibe para todos os modelos simulados, excepto o Cauchy, uma região de valores inferiores ao valor mínimo do erro médio quadrático do estimador clássico.

Relativamente ao estimador de  $\gamma$ , nos modelos Fréchet e Burr (excepto quando  $\rho = -0.5$ ) o estimador “ML” é o melhor enquanto que no modelo Cauchy é o estimador “GJ”.

No modelo Cauchy nem sempre existe diminuição do erro médio quadrático com o aumento da dimensão da amostra. Esta situação ocorre principalmente com os estimadores  $C_4$  e  $C_6$  nas amostras de dimensão 25000. É provável que este aumento esteja relacionado com o nível  $k_1$  utilizado em  $\hat{\beta}^{ML}$ , uma vez que esta situação também ocorre neste estimador.

## Agradecimentos

Investigação parcialmente financiada por FCT / POCTI e POCI / FEDER.

## Referências

- [1] Abramowitz, M. e Stegun, I. (1970). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover.
- [2] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. e Nagaraja, H. N. (1992). *A First Course in Order Statistics*. John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Caeiro, F., Gomes, M.I. e Pestana, D. (2005). Direct Reduction of Bias of the Classical Hill Estimator. *Revstat* 3(2),113-136.
- [4] Falk M. (1989). A note on uniform asymptotic normality of intermediate order statistics. *Ann. Inst. Statist. Math. A.* 41, 19-29.
- [5] Feuerverger, A. e Hall, P. (1999). Estimating a tail exponent by modelling departure from a Pareto distribution. *Ann. Statist.* **27**, 760-781.
- [6] Fraga Alves, M.I., Gomes, M. I. e de Haan, L. (2003). A new class of semi-parametric estimators of the second order parameter. *Portugaliae Mathematica* **60**:1, 193-213.
- [7] Geluk, J. e de Haan, L. (1987). *Regular Variation, Extensions and Tauberian Theorems*. Tech. Report CWI Tract 40, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, Netherlands.

- [8] Gnedenko, B.V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.* **44**, 423-453.
- [9] Gomes, M.I., Martins, M.J. e Neves, M. (2000). Alternatives to a Semi-Parametric Estimator of Parameters of Rare Events - The Jackknife Methodology. *Extremes* **3**:3, 207-229.
- [10] Gomes, M.I. e Martins, M.J. (2001). Generalizations of the Hill estimator - asymptotic versus finite sample behaviour. *J. Statist. Planning and Inference* **93**, 161-180.
- [11] Gomes, M.I. e Martins, M.J. (2002). "Asymptotically Unbiased" Estimators of the Tail Index Based on External Estimation of the Second Order Parameter. *Extremes* **5**:1, 5-31.
- [12] Gomes, M.I., de Haan, L. e Peng, L. (2002). Semi-parametric estimation of the second order parameter - asymptotic and finite sample behavior. *Extremes* **5**(4), 387-414.
- [13] de Haan, L. (1970). *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*. Mathematical Centre Tract 32, Amsterdam.
- [14] Hall, P. (1982). On some Simple Estimates of an Exponent of Regular Variation. *J. R. Statist. Soc.* **44**, no. 1, 37-42.
- [15] Hall, P. e Welsh, A.H. (1985). Adaptive estimates of parameters of regular variation. *Ann. Statist.* **13**, 331-341.
- [16] Hill, B.M. (1975). A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution. *Ann. Statist.* **3**, no. 5, 1163-1174.